110. Band Heft 4, Dezember 2008

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

4 – 2008

Herausgegeben von K. Hulek
unter Mitwirkung von
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar

VIEWEG+
TEUBNER

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an *Prof. Dr. K. Hulek* zu richten. Für Buchbesprechungen ist *Prof. Dr. H. Lange* zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert.
Die Autoren werden gebeten, für Manuskripte und Buchbesprechungen die **Standard-LATEX-Klasse article mit 10pt (default), \textwidth139mm, \textheight205mm** zu benutzen. Sollen Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Ein Foto des Autors sollte als Bilddatei in einem der gängigen Grafikformate (am unproblematischsten: TIF-Format; Graustufenbild mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi) oder als normaler Papier-Fotoabzug zum Einscannen mitgeschickt werden. Als Datenträger sind Disketten und CD-ROM möglich.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Weitere Informationen zum „Jahresbericht“ finden Sie unter
http://www.dmv.mathematik.de/publikationen/jahresbericht

Verlag:
Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.viewegteubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Ralf Birkelbach (Vors.),
Albrecht F. Schirmacher
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Ingo Eichel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:
Melanie Engelhard-Gökalp
Telefon: (06 11) 78 78-3 15, Fax: (06 11) 78 78-4 40, E-Mail: melanie.engelhard-goekalp@viewegteubner.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65, Fax: (0 52 41) 80-96 20, E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Anzeigenleitung
Christian Kannenberg
Telefon: (06 11) 78 78-3 69, Fax: (06 11) 78 78-4 30, E-Mail: christian.kannenberg@gwv-media.de
www.gwv-anzeigen.de

Es gilt die Preisliste vom 01.01.2009.

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4 Mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 130,– inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Krips b.v., Meppel, Printed in the Netherlands ISSN 0012-0456

Jahresinhaltsverzeichnis

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 110. Bd. 2008

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

Übersichtsartikel	**Historische Beiträge**	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	**Buchbesprechungen**

Inhalt

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 110. Bd. 2008, Nr. 4

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 110. Bd. 2008, Nr. 4

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

M. Schütt: Arithmetic of K3 Surfaces
G. Burde, R. Weidmann: Heiner Zieschang

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Algebraische Geometrie,
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover,
Welfengarten 1, 30167 Hannover
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth
E-Mail: Joerg.Rambau@uni-bayreuth.de

Prof. Dr. A. Schied, School of Operations Research and Information Engineering, Cornell University, 232 Rhodes Hall, Ithaca, NY 14850, U.S.A.
E-Mail: schied@cornell.edu

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig, Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 110. Bd. 2008, Nr. 4

Vorwort

Das vorliegende Heft schließt den Band 110 und damit das Jahr 2008 ab. Es werden darin Themen aus sehr unterschiedlichen Bereichen aufgegriffen.

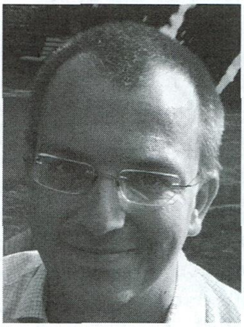
In einem historischen Beitrag diskutiert Herr Deiser die verschiedenen Beweise Cantors über die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Dabei geht es besonders um den ersten Beweis, der nur brieflich überliefert ist, aber nicht veröffentlicht wurde.

Der Artikel von Herrn Deuflhard, Frau Lutz-Westphal und Herrn Nowak geht, ebenso wie die im letzten Heft erschienene Arbeit von Herrn Kirchgraber, auf einen ‚Schnittstellenvortrag" der gemeinsamen Tagung von DMV und GDM im März 2007 in Berlin zurück. Naturgemäß treffen hier zwei verschiedene Kulturen aufeinander und dementsprechend gibt es auch unterschiedliche Ansätze, die von der jeweilig anderen Seite nicht immer kritiklos akzeptiert werden. Dennoch erscheint es mir wichtig, diesen Dialog zu führen und weiter auszubauen.

Herr Huckleberry beschreibt in seinem Nachruf auf Karl Stein das Leben und Werk dieses bedeutenden Mathematikers, der die Komplexe Analysis nicht nur in Deutschland, sondern weltweit maßgeblich mitgestaltet hat.

Mit diesem Heft möchte ich mich von den Leserinnen und Lesern des Jahresberichts verabschieden. Ab dem nächsten Heft werden Herr Grunau aus Magdeburg und seine Mitherausgeber die Herausgabe des Jahresberichts übernehmen. Ich danke allen, die an der Gestaltung des Jahresberichts beteiligt waren. Hierzu gehören zunächst die Autorinnen und die Autoren, aber ebenso all jene, die es übernommen haben, Arbeiten aus dem Jahresbericht zu referieren. Herzlichen Dank auch an die anderen Mitglieder des Herausgebergremiums, vor allem an Frau Gather und an Herrn Lange, die ebenfalls mit Ablauf dieses Jahres ausscheiden werden. Die Zusammenarbeit mit Frau Schmickler-Hirzebruch und Frau Rußkamp vom Viehweg+Teubner Verlag war stets äußerst kooperativ. Dies gilt ebenso für das Zusammenwirken mit Frau Behrens von Fotosatz Behrens. Schließlich gilt mein Dank auch den Sekretärinnen in Hannover, nämlich Frau Andrea Wiese und Frau Stefanie Heidemann, deren Mithilfe mir sehr wertvoll war. Zum Schluss möchte ich dem neuen Herausgeber, Herrn Grunau und den übrigen Herausgebern alles Gute für die Weiterführung des Jahresberichts wünschen.

K. Hulek



„In der Unvollkommenheit des ersten Conceptes“ Die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Oliver Deiser

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 01-02, 01 A 55, 03-03
- Keywords and Phrases: Überabzählbarkeit, Cantor, Baire'scher Kategoriensatz, Diagonalverfahren

Wir diskutieren die verschiedenen Beweise, die Cantor für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen gefunden hat. Ein Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem allerersten nur brieflich überlieferten Beweis vom 7. Dezember 1873. Wir argumentieren, dass Cantor hier im Wesentlichen bereits den Baire'schen Kategoriensatz bewiesen hat.

Eingegangen: 25.01.2008

Oliver Deiser, Fachbereich Mathematik, FU Berlin
deiser@math.fu-berlin.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

1 Einführung

Die Geschichte der reellen Zahlen ist von einem großen wiederkehrenden Thema durchdrungen: Die reellen Zahlen sind komplizierter und reichhaltiger als man annehmen möchte. Die Pythagoreer entdeckten im 5. Jh. v. Chr. die Existenz irrationaler Zahlen: Das Kontinuum lässt sich also nicht auf eine reine Verhältnislehre reduzieren.[1] Liouville bewies 1844 stärker die Existenz von transzendenten Zahlen: Nicht jeder Punkt des Kontinuums ist Lösung einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten.[2] Cantor zeigte 1873 dann noch einmal stärker, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind: Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ reeller Zahlen lässt reelle Zahlen aus.[3] Die sich anschließende eingehende Untersuchung dieses Phänomens ergab zudem, dass wir die Anzahl der reellen Zahlen im Rahmen der klassischen Mathematik nicht bestimmen können: Die Kontinuumshypothese ist weder beweisbar noch widerlegbar.[4] Die Menge der reellen Zahlen bleibt in dieser Hinsicht dunkel – eine beunruhigende Erkenntnis.[5]

Der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen wohnt ein Zauber inne, der über die mathematische Bedeutung des Resultats weit hinausreicht. Hält man an der Existenz der Menge $\mathbb{R}$ fest – wie es ja die klassische, mengentheoretisch axiomatisierte Mathematik tut, die $\mathbb{R}$ aus der Potenzmenge der natürlichen Zahlen gewinnt – so ergibt sich ein faszinierendes Bild der „Größenunterschiede im Unendlichen", in dem die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ und die Menge der reellen Funktionen nur drei von unübersehbar vielen Stufen markieren. Cantor griff in seinen Arbeiten und Briefen die uralte theologische und philosophische Diskussion über das Unendliche auf, und er sah seine mathematische Forschung auch als eine Bereicherung und Vertiefung dieser Diskussion an. Diese Haltung hat der modernen Mathematik, die von Cantor entscheidend mitgeprägt wurde, einen gewissen „romantischen Charakter" verliehen, der sie seither ebenso befruchtet wie belastet.

In diesem Artikel zeichnen wir die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen durch Georg Cantor aus rein mathematischer Sicht nach, indem wir die vier von Cantor zwischen 1873 und 1895 gefundenen Beweise im Lichte ihrer heutigen Bedeutung studieren. Diese Beweise sind:

(1) Der brieflich an Dedekind mitgeteilte Beweis vom 7. Dezember 1873.
(2) Der in „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller algebraischen Zahlen" veröffentlichte Beweis von 1874.
(3) Der auf der Tagung der DMV in Halle 1891 vorgestellte Beweis, der das „Cantor'sche Diagonalverfahren" eingeführt hat.
(4) Der von Cantor nicht explizit notierte Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, der sich aus seiner ordnungstheoretischen Charakterisierung der rationalen Zahlen von 1895 ergibt.

2 Der erste Beweis vom 7. Dezember 1873

In einem Brief an Richard Dedekind vom 29. November 1873 stellt Cantor die Frage, ob – in späterer Formulierung – die reellen Zahlen abzählbar seien.[6] Dedekind liefert sogleich einen Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, kann aber die Frage von Cantor nicht beantworten; er billigt auch dem Problem keine allzu große Bedeutung zu, mangels praktischen Interesses. In seinem Antwortschreiben vom 2. Dezember bestätigt Cantor Dedekinds Einschätzung, weist aber darauf hin, dass sich aus der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen ein neuer Beweis der Existenz von transzendenten Zahlen ergeben würde, wenn man die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zeigen könnte. Diese einfache Folgerung hat Dedekind übersehen. In seinen privaten Aufzeichnungen über den Briefwechsel mit Cantor notiert er:

> „Die von mir ausgesprochene Meinung aber, dass die erste Frage [nach der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen] nicht zuviel Mühe verdiene, weil sie kein besonderes praktisches Interesse habe, ist durch den von Cantor gegebenen Beweis für die Existenz von transzendenten Zahlen ... schlagend widerlegt.“[7]

In der Folge scheint es dann eine Unstimmigkeit zwischen Dedekind und Cantor gegeben zu haben. Dedekind wirft Cantor in seinen privaten Aufzeichnungen vor, seinen Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen „fast wörtlich“ in der späteren Veröffentlichung von 1874 wiedergegeben zu haben, ohne Referenzen an Dedekind.[8] Andererseits hatte Cantor bereits in seinem ersten Brief vom 29. November die Abzählbarkeit der Menge aller endlichen Tupel $(n_1, \ldots, n_k)$ von natürlichen Zahlen erwähnt, aus der sich die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen unschwer ergibt. Möglicherweise war aber der Vorfall der Grund dafür, dass der Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind nach 1874 ins Stocken geriet.[9]

In seinem Brief vom 2. Dezember schreibt Cantor auch, dass sich ihm das Problem der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen bereits vor mehreren Jahren gestellt habe, er sich aber nie ernsthaft damit beschäftigt hätte. Wie Cantor auf die Frage gestoßen ist, ist nicht bekannt. Einer Überlieferung zufolge hat er bereits als Student die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen in einem Seminar von Weierstraß vorgeführt,[10] und dann ist die Frage nach der Abzählbarkeit aller reellen Zahlen nur natürlich. Als eine direkte Inspirationsquelle kommt Cantors Konstruktion der reellen Zahlen über Fundamentalfolgen rationaler Zahlen von 1872 in Frage.

Am 7. Dezember 1873 findet Cantor einen ersten Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Keine Geschichte der modernen Mathematik kommt an dieser Entdeckung vorbei, ohne innezuhalten und ihre Bedeutung zu betrachten. Wir werden den Brief vom 7. Dezember gleich vollständig wiedergeben und zu dem Schluss kommen, dass Cantor im Wesentlichen bereits 1873 den Baire'schen Kategoriensatz für das Kontinuum bewiesen hat.[11]

Der weitere Gang der Geschichte ist, im Überblick, folgender: Sowohl Cantor als auch Dedekind finden unabhängig voneinander Modifikationen des Beweises vom 7. Dezember, die ihnen einfacher erscheinen. Dedekind teilt Cantor seinen vereinfachten Beweis brieflich am 8. Dezember mit, doch bereits am 9. Dezember, also wohl noch vor Ankunft seines eigenen Briefes erreicht ihn seinerseits ein Schreiben von Cantor, in dem dieser ebenfalls von einer gefundenen Vereinfachung spricht. Leider teilt Cantor seine neue Version nicht explizit mit. Dedekind notiert in seinen Aufzeichnungen, dass seine vereinfachte Darstellung „ebenfalls [wie schon sein Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen] fast wörtlich in Cantors Abhandlung (Crelle Bd. 77) übergegangen

[ist]".[12] Möglicherweise waren die beiden von Cantor und Dedekind unabhängig voneinander gefundenen Modifikationen des Beweises in der Tat sehr ähnlich. Insgesamt musste es aber Dedekind irritieren, Teile aus seinen Briefen in Cantors Publikation zu finden. Der ganze Vorfall ist umso bedauerlicher, als die veröffentlichte Modifikation aus heutiger Sicht den mathematischen Reichtum des Briefbeweises nicht voll zur Geltung bringt.

Obwohl also Cantor und Dedekind selber von einem vereinfachten Beweis reden, lohnt es sich, auf die erste Quelle zurückzugreifen, bei der sich zudem keine urheberrechtlichen Fragen ergeben. Wir geben den Brief von Cantor an Dedekind vom 7. Dezember 1873 vollständig wieder. Er ist auch heute noch gut lesbar, und der darin vorgestellte Beweis ist aus heutiger Sicht alles andere als „recht compliziert", wie Dedekind in seinen Aufzeichnungen urteilte. Cantor schreibt:

Hochgeehrter Herr Kollege!

In den letzten Tagen habe ich die Zeit gehabt, etwas nachhaltiger meine Ihnen gegenüber ausgesprochene Vermutung zu verfolgen; erst heute glaube ich mit der Sache fertig geworden zu sein; sollte ich mich jedoch täuschen, so finde ich gewiss keinen nachsichtigeren Beurtheiler, als Sie. Ich nehme mir also die Freiheit, Ihrem Urtheile zu unterbreiten, was soeben in der Unvollkommenheit des ersten Conceptes zu Papier gebracht ist.

Man nehme an, es könnten alle positiven [reellen] Zahlen $\omega < 1$ in die Reihe gebracht werden:

(I) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$

Auf ω_1 folgend sei ω_α das nächst größere Glied, auf dieses folgend ω_β das nächst größere, u.s.f. Man setze: $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$ u.s.f. und hebe aus (I) die unendliche Reihe aus:

$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^n \ldots,$

In der übrig bleibenden Reihe werde das erste Glied mit ω_2^1, das nächst folgende größere mit ω_2^2 bezeichnet, u.s.f. so hebe man die zweite Reihe aus:

$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \ldots, \omega_2^n, \ldots$

Wird diese Betrachtung fortgesetzt, so erkennt man dass die Reihe (I) sich in die unendlich vielen zerlegen lässt:

(1) $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^n, \ldots$

(2) $\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \ldots, \omega_2^n, \ldots$

(3) $\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \ldots, \omega_3^n, \ldots$

$\ldots \qquad \ldots$

in jeder von ihnen wachsen aber die Glieder fortwährend von links nach rechts zu; es ist:

$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}$.

Man nehme nun ein Intervall $(p \ldots q)$ so an, dass kein Glied der Reihe (1) in ihm liegt; also etwa innerhalb $(\omega_1^1 \ldots \omega_1^2)$; nun könnten auch etwa sämtliche Glieder der zweiten Reihe, oder der dritten außerhalb $(p \ldots q)$ liegen; es muss jedoch einmal eine Reihe kommen, ich will sagen die k^{te}, bei welcher nicht alle Glieder außerhalb $(p \ldots q)$ liegen; (denn sonst würden die innerhalb $(p \ldots q)$ liegenden Zahlen nicht in (I) enthalten sein, gegen die Voraussetzung); dann kann man ein Intervall $(p' \ldots q')$ innerhalb $(p \ldots q)$ fixieren, so dass die Glieder der k^{ten} Reihe alle außerhalb desselben liegen; von selbst verhält sich dann $(p' \ldots q')$ in gleicher Weise in Bezug auf die vorhergehenden Reihen; im weiteren Verlaufe muss jedoch eine k'^{te} Reihe erscheinen, deren Glieder nicht sämmtlich außerhalb $(p' \dots q')$ liegen und man nehme dann innerhalb $(p' \dots q')$ ein drittes Intervall $(p'' \dots q'')$ an, so dass alle Glieder der k'^{ten} Reihe außerhalb desselben liegen.

So sieht man, dass es möglich ist, eine unendliche Reihe von Intervallen zu bilden:

$$(p \dots q), (p' \dots q'), (p'' \dots q''), \dots$$

von denen jedes die folgenden einschließt und die zu unsern Reihen (1), (2), (3), ... sich wie folgt verhalten:

Die Glieder der 1^{ten}, 2^{ten}, ..., $k-1^{ten}$ Reihe liegen außerhalb $(p \dots q)$.

Die Glieder der k^{ten}, ..., $k'-1^{ten}$ Reihe liegen außerhalb $(p' \dots q')$.

Die Glieder der k'^{ten}, ..., $k''-1^{ten}$ Reihe liegen außerhalb $(p'' \dots q'')$.

...

Es lässt sich nun stets *wenigstens* eine Zahl, ich will sie η nennen, denken, welche im Innern eines jeden dieser Intervalle liegt; von dieser Zahl η, welche offenbar > 0, < 1, sieht man rasch, dass sie in keiner unserer Reihen (1), (2), ..., (n), enthalten sein kann. So würde man, von der Voraussetzung ausgehend, dass alle Zahlen > 0, < 1 in (I) enthalten seien, zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt sein, dass eine bestimmte Zahl $\eta > 0$, < 1 *nicht* unter (I) zu finden sei; folglich ist die Voraussetzung eine unrichtige gewesen.

So glaube ich schließlich zu dem Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefen mit (x) bezeichnete Inbegriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen lässt.

Mit den besten Grüßen

Ihr ergebenster

Georg Cantor[13]

Die tragende Struktur dieses Arguments ist die folgende: Wir betrachten Mengen $M_n \subseteq \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ (oben: $M_n = \{\omega_n^i | i \in \mathbb{N}\}$). Gesucht ist eine reelle Zahl x^* mit $x^* \notin \bigcup_n M_n$. Um ein solches x^* zu finden, konstruieren wir eine Folge von abgeschlossenen geschachtelten Intervallen I_n positiver Länge mit $I_n \cap M_n = \emptyset$ für alle n (oben: $I_1 = [p \dots q]$, $I_2 = [p' \dots q']$, usw.). Gelingt dies, so ist jedes Element $x^* \in \bigcap_n I_n$ $(\neq \emptyset)$ wie gewünscht. Die Konstruktion der Intervalle I_n ist aber offenbar möglich, wenn für alle $M = M_n$ folgende Bedingung erfüllt ist:

(+) Ist $I \neq \emptyset$ ein Intervall positiver Länge, so gibt es ein Intervall $J \subseteq I$ positiver Länge mit $J \cap M = \emptyset$.

Die Bedingung (+), die de facto von Cantor zur Konstruktion der Intervallschachtelung benutzt wird, ist heute als M *ist nirgendsdicht* bekannt. Das Argument von Cantor zeigt klar:

Baire'scher Kategoriensatz für $\mathbb{R}$

Ist M_n eine Folge von nirgendsdichten Teilmengen von $\mathbb{R}$, so enthält die Vereinigung aller M_n kein Intervall $I \neq \emptyset$ positiver Länge.[14]

Es ist müßig zu diskutieren, warum Dedekind und Cantor der originale Beweis als kompliziert erschienen ist, und warum sie den vollen mathematischen Gehalt des Arguments nach einer gefundenen Modifikation anscheinend nicht weiter untersucht haben. Sicherlich ist die Briefkonstruktion nicht optimal zugeschnitten für einen Beweis, der möglichst direkt die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zeigen will (so spielt etwa die Konstruktion der Matrix ω_n^k keine wesentliche Rolle).[15] Wie dem auch sei: Der Beweis vom 7. Dezember zeigt den Baire'schen Kategoriensatz für das Kontinuum, den Baire erst 1899 explizit notiert hat.[16]

Insgesamt können wir den Baire'schen Kategoriensatz sowohl historisch wie inhaltlich als eine natürliche Verallgemeinerung der Überabzählbarkeit jedes nichtleeren offenen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ lesen: Die Überabzählbarkeit von I besagt, dass I nicht „klein" ist im Sinne einer abzählbaren Vereinigung von einzelnen Punkten. Der Baire'sche Satz besagt stärker, dass I nicht „klein" ist im Sinne einer abzählbaren Vereinigung von nirgendsdichten Mengen. I ist, wie man sagt, nicht *mager*.

Die Isolation und begriffsbildende Analyse der tragenden Bedingungen eines Beweises gilt heute allgemein als ein wichtiger Schritt der mathematischen Erkenntnis, und in keinem Falle soll hier Cantor ein erst viel später in seiner Bedeutung erkannter Satz zugeschrieben werden. Aber wir können Cantor den Beweis des Satzes zuschreiben. Und das Schicksal des Arguments ist bemerkenswert: Cantor veröffentlichte nur eine Variante des Arguments – möglicherweise sogar in Dedekinds Worten. Weiter hat dann das spätere Diagonalverfahren auch diese Variante zumindest so weit verdrängt, dass viele Mathematiker die Beweise von 1873/74 nicht kennen[17] und den Baire'schen Kategoriensatz nicht im Zusammenhang mit der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen sehen.

Wir betrachten nun die veröffentlichte Cantor-Dedekind'sche Variante des Briefbeweises genauer.

3 Der veröffentlichte Beweis von 1874

Die Veröffentlichung des neuen abstrakten Beweises für die Existenz transzendenten Zahlen kam wohl auf Vermittlung von Weierstraß zustande. Cantors Arbeit heißt „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", greift also aus heutiger Sicht nicht die primäre neue Erkenntnis in ihrem Titel auf. Ob die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen für sich stehend überhaupt veröffentlicht worden wäre, ist zweifelhaft![18]

Der veröffentlichte Beweis der Überabzählbarkeit von 1874 verläuft, in modernisierter Notation, wie folgt. Für zwei reelle Zahlen $x \neq y$ sei dabei $I(x, y) = [x, y]$, falls $x < y$, und $I(x, y) = [y, x]$ sonst.

Der Beweis von 1874[19]

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ reelle Zahlen, und sei $I_0 = [a, b]$ mit $a < b$.
Wir finden ein $x^* \in I_0$ mit $x^* \neq x_n$ für alle $n \geq 1$. Hierzu konstruieren wir rekursiv geschachtelte abgeschlossene Intervalle I_n positiver Länge:

Sei I_n bereits konstruiert. Im Falle der Existenz seien dann x_k und x_m die ersten beiden voneinander verschiedenen Glieder der Folge, die im Inneren von I_n liegen. Wir setzen dann $I_{n+1} = I(x_k, x_m)$.

Ist I_{n+1} nicht definiert für ein n, so liegt höchstens ein Glied der Folge im Inneren von I_n, und damit lässt die Folge sogar ein offenes nichtleeres Intervall aus. Sind alle

I_n definiert, so ist jedes x^* im nichtleeren Durchschnitt der I_n verschieden von allen Gliedern der Folge, wie eine einfache Überlegung zeigt.

Die Verbindung zum Baire'schen Kategoriensatz ist bei diesem schrittweisen Ausheben von Intervallen immer noch spürbar, aber bei weitem nicht mehr so deutlich wie im Beweis des Briefes.

Aus heutiger Sicht lässt sich der Beweis vom 7. Dezember leicht in einer Weise notieren, die die Analogie zum Baire'schen Satz klar herausstellt und dabei allen überflüssigen Ballast entfernt:

Variante des Beweises vom 7. Dezember

Seien wieder reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ und $I_0 = [a, b], a < b$, gegeben.
Wir definieren rekursiv Intervalle I_n wie folgt:

I_{n+1} = „ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq I_n$ positiver Länge mit $x_{n+1} \notin I$".[20]

Dann ist jedes $x^* \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ($\neq \emptyset$) verschieden von allen x_n.

Hier konstruieren wir Intervalle, die einzelnen Punkten fernbleiben.[21] Ersetzt man die Punkte x_n durch nirgendsdichte Mengen M_n, so bleibt die Konstruktion durchführbar: Es existieren immer und überall Intervalle, die den Mengen M_n fernbleiben. Das Argument zeigt dann den Baire'schen Kategoriensatz.

4 Das Diagonalargument von 1891

Es ist nicht genau bekannt, wann Cantor sein auf der Tagung der DMV in Halle 1891 vorgetragenes Diagonalargument gefunden hat. Er zeigt, dass die Menge aller *Belegungen* von $\mathbb{N}$, d. h. aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, überabzählbar ist:

Beweis der Überabzählbarkeit der Menge $F = \{f \mid f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$

Seien $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ Elemente von F. Wir definieren $f^* \in F$ durch

$f^*(n) = 1$, falls $f_n(n) = 0$, und $f^*(n) = 0$, falls $f_n(n) = 1$.

Dann ist $f^*(n) \neq f_n(n)$ für alle n. Also ist f^* von jedem f_n verschieden.

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen gewinnt man nun aus der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und F.[22]

Allgemein zeigt das Diagonalargument, dass für jede Menge M keine Bijektion zwischen M und der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M existiert. In dieser allgemeinen Form wird das Ergebnis heute zitiert als:

Satz von Cantor

Sei M eine Menge, und sei G eine Funktion mit Definitionsbereich M.
Dann liegt die Menge

$D = \{x \in M \mid x \notin G(x)\}$

nicht im Wertebereich von G.
Insbesondere existiert also kein surjektives $G : M \to \mathcal{P}(M)$.

Denn wäre $G(x) = D$, so wäre $x \in D$ genau dann, wenn $x \notin D$, was nicht sein kann.

Cantors Diagonalargument spielt dann in der weiteren Geschichte der Mathematik in vielen Varianten eine wichtige Rolle. Wir nennen einige Beispiele:

(1) Angewendet auf eine Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ von reellen Zahlen in Dezimaldarstellung ergibt sich der bekannte Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ durch Diagonalisierung einer unendlichen Matrix von Nachkommastellen.

(2) Ein Diagonalargument zeigt folgenden Satz von Julius König und Ernst Zermelo von 1904: Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Teilmengenvon $\mathbb{R}$ derart, dass jedes A_n von kleinerer Mächtigkeit ist als $\mathbb{R}$, so ist auch die Vereinigung aller A_n von kleinerer Mächtigkeit als $\mathbb{R}$. Für einelementige Mengen M_n erhalten wir so wieder die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

(3) Das Diagonalargument von Cantor hat Bertrand Russell zur Entdeckung der Antinomie der Menge aller Mengen geführt, die sich selbst nicht als Element enthalten. Sei nämlich $R = \{x \mid x$ ist eine Menge mit $x \notin x\}$. Dann gilt $R \in R$ genau dann, wenn $R \notin R$, *Widerspruch*. Die uneingeschränkte Mengenbildung durch Aufsammlung aller Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft ist also widersprüchlich und muss durch eine vorsichtigere Axiomatik ersetzt werden. Auf die Russell'sche Klasse R kommt man durch Setzen von M = „die Menge aller Mengen“ und G = „die Identität“ im Satz von Cantor: $R = \{x \in M \mid x \notin x\} = D$ liegt nicht im Wertebereich der Identität auf M, ist also keine Menge.

(4) In der mathematischen Logik tauchen Diagonalargumente an prominenten Stellen auf, etwa im Beweis des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes oder im Beweis der Existenz einer effektiv aufzählbaren Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, die nicht berechenbar ist.[23]

(5) Auf Lebesgue (1905) geht ein Diagonalargument zurück, das zeigt, dass die iterierte Anwendung der Operationen der abzählbaren Vereinigung und des abzählbaren Durchschnitts ausgehend von den offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ immer wieder neue Mengen hervorbringt (Reichhaltigkeit der sog. Borel-Hierarchie).

(6) Diagonalisierungen können benutzt werden, um schnell oder langsam wachsende Funktionen zu konstruieren. Paul du Bois-Reymond hat bereits 1875 in dieser Weise gezeigt, dass zu jeder Folge von immer langsamer gegen unendlich konvergierenden Funktionen immer noch eine Funktion existiert, die langsamer gegen unendlich konvergiert als alle Glieder der Folge.[24]

5 Die ordnungstheoretische Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ von 1895

Im ersten Teil seiner „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ von 1895 zeigt Cantor einen grundlegenden Satz über die rationalen Zahlen:

Ordnungstheoretische Charakterisierung von $\mathbb{Q}$

Sei M eine linear (= total) geordnete Menge mit den Eigenschaften:

(a) M ist abzählbar.
(b) M hat kein kleinstes und kein größtes Element.
(c) M ist dicht, d. h. für alle $a < b$ existiert ein c mit $a < c < b$.

Dann ist M ordnungsisomorph zu $\mathbb{Q}$, d. h. es existiert eine Bijektion $f : M \to \mathbb{Q}$ sodass für alle a, $b \in M$ gilt: $a < b$ genau dann, wenn $f(a) < f(b)$.[25]

Zusammen mit der Existenz von irrationalen Zahlen, d. h. der Unvollständigkeit der Ordnung $\mathbb{Q}$, erhalten wir einen neuen Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen:

Ordnungstheoretischer Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Annahme, $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann erfüllt $\mathbb{R}$ die Eigenschaften (a), (b) und (c). Nach dem Satz sind also $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ ordnungsisomorph. Dies ist aber nicht der Fall, da $\mathbb{R}$ vollständig, $\mathbb{Q}$ aber unvollständig ist, und da ein Ordnungsisomorphismus die Vollständigkeit einer Ordnung erhält.[26]

Dieser Beweis benutzt die pythagoreische Erkenntnis der Existenz von irrationalen Zahlen, oder gleichwertig die Existenz von Lücken in $\mathbb{Q}$: Es gibt Dedekind'sche Schnitte (L, R) in $\mathbb{Q}$, deren linker Teil L kein Supremum und deren rechter Teil R kein Infimum besitzt. Es ist bemerkenswert, dass Cantors Charakterisierungssatz auch dazu geeignet ist, die Existenz von Lücken in $\mathbb{Q}$ nachzuweisen, und dies ohne jede Arithmetik: Denn die Ordnung $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}_0 + \mathbb{Q}_1$, die aus zwei hintereinander gehängten Kopien von $\mathbb{Q}$ besteht,[27] hat offenbar die Lücke $(\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_1)$. Aber $\mathbb{Q}^*$ erfüllt die Bedingungen des Cantor'schen Satzes, ist also isomorph zu $\mathbb{Q}$. Damit hat auch $\mathbb{Q}$ Lücken.

Cantors Charakterisierung liefert also neue ordnungstheoretische Beweise sowohl für die Existenz irrationaler Zahlen als auch für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen und beleuchtet damit zwei fundamentale und geschichtlich weit auseinanderliegende Erkenntnisse über $\mathbb{R}$ noch einmal von einer ganz eigenen Warte.

6 Zur Bedeutung

Die Entdeckung der Überabzählbarkeit wirft die Frage auf, wie viele reelle Zahlen es nun gebe. Die Cantor'sche Kontinuumshypothese von 1878 gibt die folgende Antwort:

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ *überabzählbar, so existiert eine Bijektion zwischen* A *und* $\mathbb{R}$.[28]

Kurz: Die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ ist die kleinste Unendlichkeitsstufe nach der durch die Menge $\mathbb{N}$ repräsentierten unendlichen Mächtigkeit – es gibt keine Mächtigkeit zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

Die Kontinuumshypothese ist nun aber im Rahmen der klassischen Mathematik nachweislich weder beweisbar noch widerlegbar, es sei denn, die klassische Mathematik ist selbst widersprüchlich.[29] Dieses metamathematische Ergebnis der sog. Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese haben Kurt Gödel 1938 und Paul Cohen 1963 bewiesen. Die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen hat insgesamt zur Analyse der Fundamente der Mathematik und zur Entwicklung von allgemeinen Methoden der mathematischen Logik geführt, die solche limitierende Resultate überhaupt ermöglichen. Das Ergebnis selbst zeigt, dass wir die so vertraut erscheinenden reellen Zahlen in gewisser Hinsicht nicht verstehen. Wie diese Verständnislücke zu interpretieren ist und ob und wie sie ausgefüllt werden könnte, ist nach wie vor Gegenstand der Diskussion.

Eine ganz andere praktische Bedeutung hat das Phänomen der Überabzählbarkeit in der Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie: Die Existenz eines abzählbar-additiven Maßes λ auf einer Menge M mit $\lambda(M) > 0$, das einzelnen Punkten das Maß 0 zuordnet, ist nur möglich, wenn M überabzählbar ist, denn sonst wäre $\lambda(M) = \sum_{x \in M} \lambda(\{x\}) = 0$. Die Längenmessung λ auf $\mathbb{R}$ erfüllt aber sicherlich $\lambda(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Integrationstheorie mit starken Vertauschungssätzen ruht auf einer abzählbar-additiven Längenmessung und damit notwendig auf einer überabzählbaren Struktur.

Diese beiden weit voneinander entfernt liegenden Gesichtspunkte zeigen, wie sehr sich sowohl Cantor als auch Dedekind in ihrer spontanen Einschätzung der Bedeutung der Frage geirrt haben.

Anmerkungen

1 Siehe [Christianidis 2004] für eine Auswahl von Aufsätzen zur Geschichte und Bedeutung der Entdeckung der irrationalen Verhältnisse durch die Griechen.
2 Veröffentlicht in [Liouville1851].
3 Veröffentlicht in [Cantor 1874, 1879, 1892].
4 Die Kontinuumshypothese besagt: Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar, so gibt es eine Bijektion zwischen A und $\mathbb{R}$. Gödel (1938) und Cohen (1963) zeigten die Unlösbarkeit der Kontinuumshypothese in der Axiomatik von Zermelo-Fraenkel, die für die gesamte klassische Mathematik ausreicht. Siehe hierzu auch Abschnitt 6 und Fußnote 29.
5 Zwei weitere Aspekte der Komplexität von $\mathbb{R}$ sind: Erstens die Frage nach der Existenz und mathematischen Einbindung infinitesimaler Größen, d. h. die Diskussion um den „korrekten" Kontinuumsbegriff selbst. Und zweitens die Untersuchung von einfachen Teilmengen von $\mathbb{R}$ innerhalb der deskriptiven Mengenlehre, die gezeigt hat, dass viele hier auftretende Fragen innerhalb des klassischen Rahmens ebenso unlösbar sind wie die Kontinuumshypothese, z. B. die Lebesgue-Meßbarkeit der sog. projektiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Siehe hierzu etwa [Deiser 2007, Kapitel 2.6].
6 Siehe [Cantor1932], [Cantor / Dedekind1937], [Dugac1976], [Cantor1991] für den Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind. Siehe weiter auch [Grattan-Guinness 1974].
7 Siehe [Cantor / Dedekind 1937, S. 18].
8 Siehe [Cantor / Dedekind 1937, S. 18f].
9 Vgl. hierzu speziell auch [Ferreirós 1999, S. 239f].
10 Siehe [Fraenkel 1930, S. 199].
11 Diese „Baire'sche Lesart" des Briefbeweises scheint in der Literatur bislang nicht diskutiert zu werden (vgl. z. B. [Cantor 1991, S. 35f], [Dauben 1979b, S. 50f], [Ferreirós 1999, S. 177f], [Grattan-Guinness 2000, S. 88], [Hallett 1984, S. 75f], [Meschkowski 1967, S. 29f], [Purkert / Ilgauds 1987, S. 45f]).
12 Siehe [Cantor / Dedekind 1937, S.19]. Eine Bemerkung in einem Brief von Cantor an Dedekind vom 25. Dezember 1873 hinterlässt den Eindruck, dass sich Cantor in der Tat bei Dedekind bedient hat – und sich gar nicht viel dabei dachte: „Dabei [bei der Abfassung der Publikation von 1874] kamen mir, wie Sie später finden werden, Ihre, mir so werthen, Bemerkungen und Ihre Ausdrucksweise sehr zu statten. Dies wollte ich mir erlauben, Ihnen mitzuteilen." ([Cantor / Dedekind 1937, S. 17]).
13 [Cantor / Dedekind 1937, S. 14f] und [Cantor 1991, S. 35f].
14 Siehe [Baire 1899, S. 65]. In der äquivalenten dualen Form besagt der Satz, dass der Durchschnitt abzählbar vieler offener und dichter Teilmengen von $\mathbb{R}$ wieder dicht ist.
15 Wir geben einen solchen Zuschnitt im nächsten Abschnitt.

16 Bei dieser Einschätzung ist auch erwähnenswert, dass die Eigenschaften *dicht* und *überalldicht in einem Intervall* in Cantors Arbeiten über „Lineare Punktmannigfaltigkeiten“ aus den 1880er Jahren eine wichtige Rolle spielen (siehe z. B. [Cantor 1879, S. 2f], [Cantor 1880, S. 358], [Cantor 1882, S. 114]). Cantor hat aber wohl die Aussage des Baire'schen Satzes nie explizit formuliert.

17 In manchen Lehrbüchern der Analysis wird allerdings der erste Cantor'sche Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ vorgestellt, siehe z.B. [Dieudonné 1985, S. 34].

18 Vgl. hierzu den Brief von Cantor an Dedekind vom 25. Dezember 1873 ([Cantor / Dedekind 1937, S. 16f]).

19 [Cantor 1874, S. 260f] und etwas ausführlicher auch in [Cantor 1879, S. 6–8]. Speziell in der ausführlichen Form ist der Beweis nicht mehr kürzer als der Briefbeweis.

20 Konkret können wir zum Beispiel immer entweder das linke oder rechte Drittelintervall von I_n wählen. Das Auswahlaxiom muss nicht verwendet werden.

21 Den veröffentlichten Beweis von 1874 können wir auch in dieser Weise lesen, denn auch hier gilt für alle $n \geq 1$, dass $x_n \notin I_{n+1}$. Bei obiger Variante wird diese Eigenschaft aber in den Mittelpunkt gestellt. Cantor hat auf diese Eigenschaft explizit in seiner zweiten Darstellung des Argumentes hingewiesen (siehe [Cantor 1879, S. 6]).

22 Die Gleichmächtigkeit der Mengen $\mathbb{R}$ und F ist nicht überraschend, wenn man an die Dualdarstellungen reeller Zahlen denkt, deren Nachkommaanteile wir ja als Elemente von F lesen können. Die Feinheiten sind aber nicht völlig trivial, und zumindest ist die Verwendung des Satzes von Cantor-Bernstein hilfreich. Deswegen hat sich für den Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ eine direkte Anwendung der Diagonalmethode verbreitet (siehe Beispiel (1) unten).

23 Es existiert dann ein Computerprogramm P, das die Elemente von A als Liste ausgibt, aber kein Computerprogramm P′, das bei Eingabe von n stets in korrekter Weise entscheidet, ob n ein Element von A ist oder nicht.

24 Genauer zeigte er: Seien $f_n\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim f_n(x) = \infty$ und $\lim f_n(x)/f_{n+1}(x) = \infty$ für alle n. Dann gibt es ein $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim g(x) = \infty$ und $\lim f_n(x)/g(n) = \infty$ für alle n (siehe [Bois-Reymond 1875, S. 365]). Der Beweis ist die erste bekannte diagonale Konstruktion. Die Arbeit ist auf deutsch in den Annalen erschienen und enthält gleich im ersten Absatz Formulierungen wie „nachdem ich meine Scheu überwunden, das Wort ‚unendlich‘ ... substantivisch zu gebrauchen“, die Cantors Interesse geweckt haben dürften. Es ist gut möglich, dass Cantor die Arbeit studiert hat.

25 Beweisskizze: Seien $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ Aufzählungen von M bzw. $\mathbb{Q}$. Wir definieren $f : M \to \mathbb{Q}$ rekursiv durch „$f(x_n) = q_k$,“ wobei k minimal ist, sodass die bislang definierte Funktion $f : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{Q}$ weiterhin ordnungstreu ist. Wir erhalten so einen Isomorphismus $f : M \to \mathbb{Q}$.

26 Eine linear geordnete Menge M heißt *(linear) vollständig*, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum in der Ordnung besitzt.

27 Formal sei $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \times \{0\}$, $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \times \{1\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}_0 \cup \mathbb{Q}_1$, und es sei $(q, i) < (r, j)$ in $\mathbb{Q}^*$, falls $i < j$ *oder* $i = j$ und $q < r$ in $\mathbb{Q}$.

28 Siehe [Cantor 1878, S. 257f].

29 Unter der „klassischen Mathematik“ verstehen wir informal das System der heute üblichen mathematischen Begriffsbildung und Argumentation. Genauer können wir „beweisbar in der klassischen Mathematik“ lesen als „beweisbar in der Axiomatik von Zermelo-Fraenkel mit Auswahlaxiom“. Weiter kann „beweisbar“ durch „formal herleitbar in einem syntaktischen logischen Kalkül“ präzisiert werden.

Literatur

Baire, René, 1899. *Sur les fonctions de variables réelles*; Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. IIIa 3 (1899), S. 1–123. Auch in: *Œvres Scientifiques*; Gauthier-Villars, Paris 1990, S. 49–173.

Bois-Reymond, Paul du, 1875. *Über asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen*; Mathematische Annalen 8 (1875), S. 363–414.

Cantor, Georg, 1872. *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*; Mathematische Annalen 5 (1872), S. 123–132.

– 1874. *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*; Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874), S. 258–262.

– 1878. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*; Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), S. 242–258.

– 1879–84. *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 1–6*; Mathematische Annalen: 15 (1879), S. 1–7; 17 (1880), S. 355–358; 20 (1882), S.113–121; 21 (1883), S. 51–58; 21 (1883), S. 545–591; 23 (1884), S. 453–488.

– 1892. *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Erster Band. 1890–91. 1 (1892), S. 75–78.

– 1895–1897. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. 1–2*; Mathematische Annalen: 46 (1895), S. 481–512; 49 (1897), S. 207–246.

– 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*; Hrsg. Ernst Zermelo. Springer, Berlin.

– 1991. *Briefe*; Hrsg. Herbert Meschkowski, Winfried Nilson. Springer, Berlin.

Cantor, Georg / Dedekind, Richard, 1937. *Briefwechsel Cantor – Dedekind*; Hrsg. E. Noether, J. Cavaillès. Hermann, Paris.

Christianidis, Jean (Hrsg.), 2004. *Classics in the History of Greek Mathematics*; Kluwer, Dordrecht.

Cohen, Paul, 1963. *The independence of the continuum hypothesis. Part I*; Proceedings of the National Academy of Science USA 50 (1963), S. 1143–1148.

Dauben, Joseph Warren, 1979a. *Georg Cantors creation of transfinite set theory: personality and psychology in the history of mathematics*; Annals of the New York Academy of Sciences 321 (1979), S. 27–44.

– 1979b. *Georg Cantor – His Mathematics and Philosophy of the Infinite*; Harvard University Press, Cambridge, Mass. (Nachdruck 1990, Princeton University Press.)

Deiser, Oliver, 2004. *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*; 2. erweiterte Auflage. Springer, Berlin.

– 2007. *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*; Springer, Berlin.

Dieudonné, Jean, 1985. *Grundzüge der modernen Analysis. Band I*; Dritte Auflage. Vieweg, Braunschweig.

Dugac, Pierre, 1976. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits)*; Vrin, Paris.

Ferreirós, José, 1993. *On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind*; Historia Mathematica 20 (1993), S. 343–363.

– 1999. *Labyrinths of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*; Birkhäuser, Basel.

Fraenkel, Abraham, 1930. *Georg Cantor*; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39 (1930), S. 189–266.

Gödel, Kurt, 1938. *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis*; Proceedings of the National Academy of Sciences USA 24 (1938), S. 556–557.

Grattan-Guinness, Ivor, 1974. *The rediscovery of the Cantor-Dedekind correspondence*; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 76 (1974), S. 104–139.

– 2000. *The Search for Mathematical Roots, 1870 – 1930. Logic, Set Theories and The Foundations of Mathematics from Cantor Through Russell to Gödel*; Princeton University Press, Princeton, NJ.

Hallett, Michael, 1984. *Cantorian set theory and limitation of size*; Clarendon Press, Oxford.

Kanamori, Akihiro, 1996. *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*; The Bulletin of Symbolic Logic 2 (1996), S. 1–71.

Lebesgue, Henri, 1905. *Sur les fonctions représentables analytiquement*; Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (1905), S. 139–216.

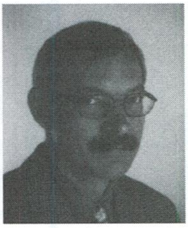
Liouville, Joseph, 1851. *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques*; Journal de mathématiques pures et appliquées 16 (1851), S. 133–142.

Meschkowski, Herbert, 1967. *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*; Vieweg, Braunschweig.

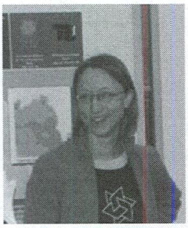
Purkert, Walter / Ilgauds, Hans Joachim, 1987. *Georg Cantor 1845–1918*; Birkhäuser Verlag, Basel.

Tapp, Christian, 2005. *Kardinalität und Kardinäle: Wissenschaftliche Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit*; Steiner, Stuttgart.

P. Deuflhard



U. Nowak



B. Lutz-Westphal

Bessel'scher Irrgarten – Rundungsfehler müssen nicht klein sein

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 65 D 20, 65 G 50, 65 Q 05, 97 A 04
- Keywords and Phrases: Rundungsfehler, Drei-Term-Rekursionen, Bessel-Rekursion

Dieser Artikel berichtet über eine Schüleraktivität, die seit Jahren am Zuse-Institut Berlin (ZIB) bei Besuchen von Schülergruppen erprobt und verfeinert worden ist. Das hier zusammengestellte Material ist gedacht als Basis zur weiteren Ausarbeitung für eine Unterrichtseinheit in Leistungskursen Mathematik an Gymnasien. Inhaltlich wird von einem zwar für Schüler (wie evtl. auch Lehrer) neuen, aber leicht fasslichen Gegenstand ausgegangen: der Drei-Term-Rekursion für Besselfunktionen. Die Struktur wird erklärt und in ein kleines Programm umgesetzt. Dazu teilen sich die Schüler selbstorganisierend in Gruppen ein, die mit unterschiedlichen Taschenrechnern „um die Wette" rechnen. Die Schüler und Schülerinnen erfahren unmittelbar die katastrophale Wirkung von an sich „kleinen" Rundungsfehlern, sie landen – ebenso wie der Supercomputer des ZIB – im „Bessel'schen Irrgarten". Die auftretenden Phänomene werden mathematisch elementar erklärt, wobei lediglich auf das Konzept der linearen Unabhängigkeit zurückgegriffen wird. Das dabei gewonnene vertiefte Verständnis fließt ein in die Konstruktion eines klassischen Algorithmus sowie eines wesentlich verbesserten Horner-artigen Algorithmus.

[1] Zuse-Institut Berlin und Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik, deuflhard@zib.de
[2] Zuse-Institut Berlin, nowak@zib.de
[3] Technische Universität Berlin, Forschungszentrum Matheon, westphal@math.tu-berlin.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

Eingegangen: 08. 06. 2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieser Artikel behandelt das allgemeine Thema „Rundungsfehler müssen nicht klein sein" exemplarisch an einem in Leistungskursen am Gymnasium realisierbaren Beispiel, der Drei-Term-Rekursion für die Bessel-Funktionen. Das hier beschriebene Vorgehen ist seit vielen Jahren bei Besuchen von Schülergruppen am ZIB erprobt und verfeinert worden.

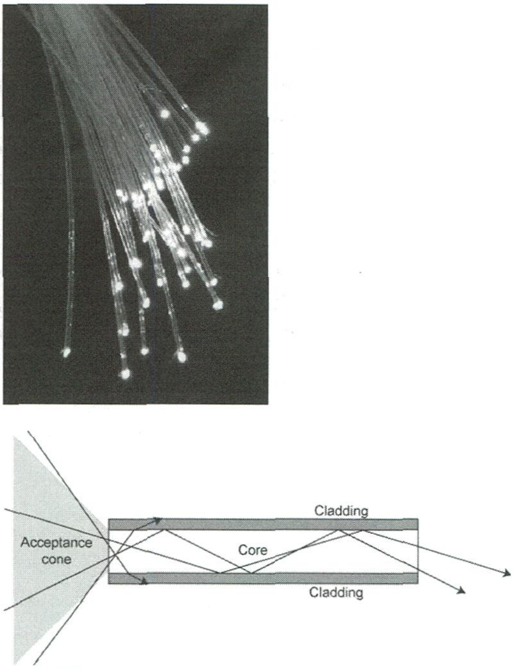
Der Artikel gliedert sich, wie folgt. In Kapitel 1 wird zunächst die Bessel-Rekursion eingeführt. Sodann wird die Vorwärtsrekursion numerisch durch einen Algorithmus umgesetzt. Die „Kontrolle" der Richtigkeit der Ergebnisse wird anhand der Rückwärtsrekursion durchgeführt: Es stellt sich heraus, dass fast alle Zahlen falsch sind, die Schüler landen im „Bessel'schen Irrgarten". In Kapitel 2 wird eine elementare Erklärung des Phänomens angeboten, die lediglich die Begriffe der linearen Unabhängigkeit und der Lösungsmenge benutzt. Auf dieser Basis wird der klassische Algorithmus (J. C. P. Miller, 1957) zur Berechnung von Bessel-Funktionen dargestellt. Er ist einfach programmierbar und kann von Schülern getestet werden. Das letzte Kapitel 3 behandelt einen wesentlich verbesserten Algorithmus (P. Deuflhard, 1977) zur Berechnung von Bessel-Reihen; er ist eine Erweiterung des Horner-Algorithmus zur Auswertung von Polynomen. Auch dieser Algorithmus ist einfach programmierbar, erfordert aber zu seinem Verständnis eine mathematische Vertiefung, die auf Matrizen und Vektoren aufbaut und für Interessierte in Kapitel 3.3 angefügt ist. Darüberhinaus sind Übungsaufgaben in den Text an den jeweils passenden Stellen eingestreut.

Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846)

1 Bessel-Rekursion

Der Astronom und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) hat für astronomische Berechnungen spezielle Funktionen eingeführt, die heute nach ihm benannt sind.

Diese Funktionen spielen bei technischen Problemen mit Zylinder- oder Kugelsymmetrie eine natürliche Rolle, heute insbesondere in der Nano-Optik (z. B. bei Glasfaserkabeln) und beim GPS, dem satellitengestützten Geo-Positionierungs-System. *Bessel-Funktionen* werden üblicherweise geschrieben als Folge $\{J_k(x)\}$ zum Index $k = 0, 1, \ldots$, wobei wir uns auf reelles Argument x einschränken. Die Funktion $J_k(x)$ hat für Zylinderwellen dieselbe Bedeutung wie die Funktion $cos(kx)$ für ebene Wellen. Bei zylindersymmetrischen Problemen repräsentieren die Bessel-Funktionen die „Innenraumlösungen", während die sogenannten Neumann-Funktionen (siehe Abschnitt 1.1) die „Außenraumlösungen" darstellen.



Quelle: Wikipedia

Glasfaserkabel: Illustration und Arbeitsprinzip

Wir wollen und können an dieser Stelle nicht weiter auf diese Anwendungen und die Herleitung der Bessel-Funktion eingehen. Dazu müssten wir ausführlicher auf die Differentialgleichungen der Elektrodynamik, die Maxwell-Gleichungen, eingehen, was den von uns gewählten Rahmen sprengen würde. Zum Verständnis der hier vorgestellten Schüleraktivität ist es ausreichend zu konstatieren, dass die hier betrachteten Funktionen aus dem genannten Anwendungskontext stammen, schließlich untersuchen wir nicht die Bessel-Funktion selber, sondern wollen lediglich das Verhalten von Rekursionen im Computer untersuchen und dabei insbesondere die entstehenden Rundungsfehler beobachten. Die 3-Term-Rekursion für die Bessel-Funktionen eignet sich für dieses

Experiment besonders gut, da sie von Schülern selber amTaschenrechner realisiert werden kann.

1.1 Mathematische Struktur

In diesem Abschnitt wollen wir die wenigen Beziehungen und Begriffe bereitstellen, die wir im Folgenden benötigen werden. Unser zentrales Hilfsmittel ist die Eigenschaft, dass Bessel-Funktionen einer speziellen sogenannten *Drei-Term-Rekursion* genügen:

$$J_{k+1} = \frac{2k}{x} J_k - J_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \,. \tag{1.1}$$

Falls, etwa für das Argument $x = 2.13$ (siehe [1]), die beiden Werte

$$J_0 = 0.149\,606\,770\,448\,844, \quad J_1 = 0.564\,996\,980\,564\,127 \tag{1.2}$$

auf 15 Stellen genau gegeben sind, so lassen sich aus der Beziehung (1.1) rekursiv die Folgewerte

$$J_2 = \frac{2*1}{2.13} * J_1 - J_0 = 0.380\,906\,826\,324\,984$$
$$J_3 = \frac{2*2}{2.13} * J_2 - J_1 = 0.150\,321\,003\,144\,763$$
$$\vdots$$

bis hin zu einem Zielwert J_N (für $k = N - 1$ in (1.1)) berechnen.

Falls Werte J_N, J_{N-1} vorgegeben sind, so lässt sich daraus durch „Umkehrung" der Drei-Term-Rekursion gemäß

$$J_{k-1} = \frac{2k}{x} J_k - J_{k+1}, \quad k = N-1, N-2, \dots, 1\,, \tag{1.3}$$

der Zielwert J_0 berechnen. Die Rekursion (1.1) wird als *Vorwärtsrekursion* bezeichnet, entsprechend (1.3) als *Rückwärtsrekursion*.

Darüberhinaus genügen die Besselfunktionen noch einer *Summenbeziehung* der Form:

$$J_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k} = 1\,. \tag{1.4}$$

Es verdient Erwähnung, dass derartige Summenbeziehungen charakteristisch für sogenannte *Minimallösungen* von Drei-Term-Rekursionen sind.

In den Anwendungsproblemen ist man meist nicht so sehr an Werten einzelner Bessel-Funktionen interessiert, sondern an *Bessel-Reihen*, also an Reihen der Form

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, J_k(x)\,, \tag{1.5}$$

wobei die Koeffizienten $\{A_k\}$ vorgegeben sind. Wie sich herausstellen wird, gibt es für solche Reihen einen Algorithmus (siehe Abschnitt 3.2), der sogar im Allgemeinen noch schneller ist, als wenn man erst die $n+1$ benötigten Bessel-Funktionen J_k ausrechnet und sie dann mit den Gewichten A_k aufsummiert.

Ausdrücklich sei noch darauf hingewiesen, dass auch die *Neumann-Funktionen* $\{Y_k(x)\}$ der Drei-Term-Rekursion (1.1) genügen. Um sie aus der Vorwärtsrekursion zu erhalten, sind natürlich Startwerte Y_0, Y_1 vorzugeben, während die Rückwärtsrekursion Startwerte Y_N, Y_{N-1} benötigt.

Merke: Erst durch *zwei* Werte ist festgelegt, welche dieser speziellen Funktionen man aus der Drei-Term-Rekursion erhält.

Aufgabe 1. *Eine Linearkombination von Bessel- und Neumann-Fumktionen ist durch*

$$Z_k(x) = \alpha J_k(x) + \beta Y_k(x)$$

gegeben. Insbesondere gilt (Argument x weggelassen)

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & Y_0 \\ J_1 & Y_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

a) Zeige, dass Z_k der Drei-Term-Rekursion (1.1) genügt.
b) Zeige, dass die Matrix in (1.6) für $x = 2.13$ regulär ist. Was folgt daraus? ($Y_0(2.13) = 0.519600779415332$, $Y_1(2.13) = -0.0354907117768913$)
c) Leite für die sogenannte Casorati-Determinante

$$D(k, k+1) = J_k Y_{k+1} - J_{k+1} Y_k$$

eine Zwei-Term-Rekursion her. Welche Folgerung ist daraus zu ziehen?

1.2 Numerische Rechnungen

Die im vorigen Abschnitt dargestellte Rekursion eignet sich hervorragend zur Berechnung sämtlicher Bessel-Funktionen, wenn zwei Startwerte bekannt sind. Wir gehen zunächst von den Werten aus (1.2) für J_0, J_1 zu $x = 2.13$ aus und rechnen bis J_{23}. In kleinen Schülergruppen (3-4), die sich selbst zusammenfinden, oftmals Schülerinnen gegen Schüler, wird dann „um die Wette“ gerechnet. Die Schüler schreiben entweder ein kleines Programm oder sie lösen das Problem in der Gruppe durch sukzessives Eintippen und Aufschreiben der Zwischenresultate. Gut ist es, wenn verschiedene Gruppen verschiedene Taschenrechner haben. Die ersten beiden fertigen Gruppen dürfen dann ihre Resultate an die Tafel schreiben. In aller Regel sind diese Resultate verschieden, oftmals sehr verschieden. In Tabelle 1 geben wir die Resultate an, die wir durch Vergleich eines Schulrechners mit dem „Supercomputer“ des ZIB erzielt haben.

Frage: Wer hat Recht?

Natürlich sollen die Schüler nicht lernen, dass der größere Computer immer Recht hat. Stattdesssen soll die Rechnung kontrolliert werden.

Idee: Kontrolle durch Rückwärtsrekursion. Seien die numerisch erhaltenen Resultate mit $\tilde{J}_{23}, \tilde{J}_{22}$ bezeichnet. Sie werden in die Rekursion (1.3) für $N = 23$ eingesetzt, um daraus Werte $\tilde{J}_0, \tilde{J}_1$ zu berechnen. Wenn die Zahlen stimmen, sollte approximativ gelten: $\tilde{J}_0 \approx J_0, \; \tilde{J}_1 \approx J_1$. Dies zeigt sich aber keineswegs! Zur Illustration des Effektes stellen wir in Abbildung 1 die Resultate einer Wiederholung des Paares „Vorwärtsrekursion-Rückwärtsrekursion" graphisch dar (logarithmische Skala). Offenbar gibt es keine Chance, zu den richtigen Werten zurückzukehren: Wir sind im „Bessel'schen Irrgarten" gelandet.

k	TI-30Xa Solar	IBM pSeries 690
0	1.49606770 E–01	1.49606770448844 E–01
1	5.64996981 E–01	5.64996980564127 E–01
2	3.80906827 E–01	3.80906826324984 E–01
3	1.5032100 4 E–01	1.50321003144764 E–01
4	4.2532622* E–02	4.25326191532232 E–02
5	9.425932** E–03	9.42592325231867 E–03
6	1.720581** E–03	1.72054165578469 E–03
7	2.67483*** E–04	2.67269174637329 E–04
8	3.7525**** E–05	3.61571446484618 E–05
9	1.4396**** E–05	4.33378985815840 E–06
10	8.4135**** E–05	4.66431617665503 E–07
11	7.75608*** E–04	4.58497443345861 E–08
12	7.926841** E–03	7.13381677623191 E–09
13	8.8540907* E–02	3.45312897638016 E–08
14	1.072854187E+00	4.14374884565947 E–07
15	1.401470663E+01	5.41265029138480 E–06
16	1.963173800E+02	7.58201362616988 E–05
17	2.935354382E+03	1.13366920903930 E–03
18	4.665910469E+04	1.80203080831450 E–02
19	7.586692319E+05	3.03434918111721 E–01
20	1.396997508E+07	5.39537259719639 E+00
21	2.615882806E+08	1.01018116202947 E+02
22	5.144108798E+09	1.98651114408063 E+03
23	1.060016920E+11	4.09348928413313 E+04

Tabelle 1. Taschenrechner gegen Supercomputer (* wegen Festkomma-Darstellung auf TI)

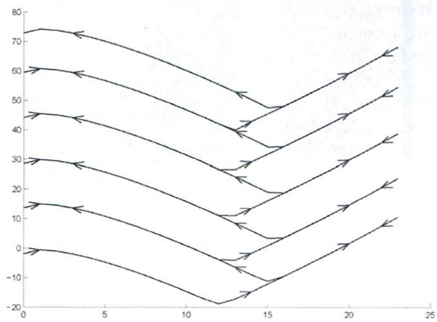


Abbildung 1. $N = 23$: Bessel'scher Irrgarten (logarithmische Skala)

Für Abbildung 2 haben wir $N = 18$ gewählt. Bei dieser Wahl scheint die Rekursion in sich zurückzukehren, also alles richtig zu sein. Aber dies ist eine Täuschung, wie sich aus den dazu eingetragenen richtigen Werte ergibt!

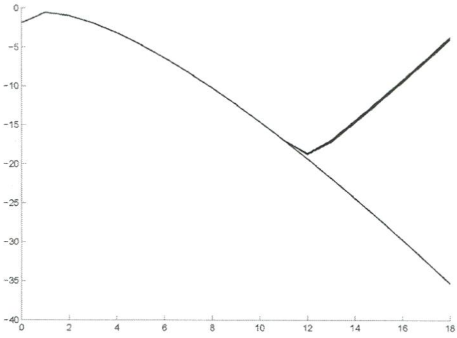


Abbildung 2. N = 18: Heimtückische Falle (logarithmische Skala). Die richtigen Werte sind zum Vergleich aufgetragen (Kurve, die nach rechts unten verläuft).

k	TI-30Xa Solar	IBM pSeries 690	exakt
0	1.49606770 E–01	1.49606770448844 E–01	1.49606770448844 E–01
1	5.64996981 E–01	5.64996980564127 E–01	5.64996980564127 E–01
2	3.80906827 E–01	3.80906826324984 E–01	3.80906826324984 E–01
3	1.50321004 E–01	1.50321003144764 E–01	1.50321003144763 E–01
4	4.2532622* E–02	4.25326191532232 E–02	4.25326191532221 E–02
5	9.425932** E–03	9.42592325231867 E–03	9.42592325231519 E–03
6	1.720581** E–03	1.72054165578469 E–03	1.72054165576939 E–03
7	2.67483*** E–04	2.67269174637329 E–04	2.67269174554612 E–04
8	3.7525**** E–05	3.61571446484618 E–05	3.61571441200797 E–05
9	1.4396**** E–05	4.33378985815840 E–06	4.33378597180825 E–06
10	8.4135**** E–05	4.66431617665503 E–07	4.66399303652013 E–07
11	7.75608*** E–04	4.58497443345861 E–08	4.55502127176888 E–08
12	7.926841** E–03	7.13381677623191 E–09	4.07237700017248 E–09
13	8.8540907* E–02	3.45312897638016 E–08	3.35725312423605 E–10
14	1.072854187 E+00	4.14374884565947 E–07	2.56784566414815 E–11
15	1.401470663 E+01	5.41265029138480 E–06	1.83186408413325 E–12
16	1.963173800 E+02	7.58201362616988 E–05	1.22445951944503 E–13
17	2.935354382 E+03	1.13366920903930 E–03	7.69951315506101 E–15
18	4.665910469 E+04	1.80203080831450 E–02	4.57074943794664 E–16
19	7.586692319 E+05	3.03434918111721 E–01	2.56971625952894 E–17
20	1.396997508 E+07	5.39537259719639 E+00	1.37208842176626 E–18
21	2.615882806 E+08	1.01018116202947 E+02	6.97561233257824 E–20
22	5.144108798 E+09	1.98651114408063 E+03	3.38443254494399 E–21
23	1.060016920 E+11	4.09348928413313 E+04	1.57037227051201 E–22

Tabelle 2. *Vorwärtsrekursion:* Vergleich der berechneten Zahlen mit den „exakten" Zahlen, d. h. hier auf 15 Stellen genau.

In Tabelle 2 vergleichen wir abschließend die richtigen Zahlen mit den Zahlen von Tabelle 1, die wir mit den beiden unterschiedlichen Computern in Vorwärtsrekursion berechnet hatten. Das Resultat ist klar: Beide Rechner lagen falsch, auch der Supercomputer war nicht super!

Frage: Woher haben wir die richtigen Zahlen?

Nachfolgend, in Kap. 2 und 3, werden zwei alternative Algorithmen angegeben, die diese Frage beantworten.

Aufgabe 2. *Verifiziere, dass für die „exakten" Werte in Tabelle 2 die Beziehung*

$$\frac{2k}{x} J_k(x) \approx J_{k-1}(x)\ , \quad x = 2.13$$

gilt und die Differenz mit wachsendem k betragsmäßig kleiner wird. Leite daraus eine einfache asymptotische Formel für $J_k(x)$ her, die für festes x und großes k gilt.

2 Klassischer Algorithmus

Im Jahre 1952 veröffentlichte der englische Mathematiker J. C. P. Miller (1906–1981) einen Algorithmus zur Berechnung von Bessel-Funktionen [4], der nun dargestellt werden soll. Er ist einfach programmierbar und eignet sich gut für den Unterricht an Gymnasien.

J.C.P. Miller (1906–1981)

2.1 Gestörte Bessel-Rekursion

Miller machte die Beobachtung, dass Bessel-Funktionen sehr wohl in Rückwärtsrichtung korrekt berechenbar sind. Wir zeigen dies in Tabelle 3, wobei wir die Werte J_{23}, J_{22} auf 15 Stellen genau vorgegeben haben.

Eine Erklärung dieses Phänomens ist, dass die Bessel-Rekursion, wie in obigem Abschnitt 1.1 dargestellt, einen zweidimensionalen Lösungsraum hat, mit Basis etwa die Bessel-Funktionen $\{J_k\}$ und die Neumann-Funktionen $\{Y_k\}$. Asymptotisch gilt:

$$\lim_{k\to\infty} J_k = 0\ , \quad \lim_{k\to\infty} Y_k = \infty\ . \tag{2.7}$$

Das obige Resultat für die Bessel-Funktionen ergibt sich im Wesentlichen aus der Summenbeziehung (1.4). Es zeigt sehr schön die Bedeutung der Bezeichnung *Minimallösung*, die wir oben bereits erwähnt hatten.

k	berechnet	exakt
23	1.570372270512014 E-22	1.570372270512014 E-22
22	3.384432544943993 E-21	3.384432544943993 E-21
21	6.975612332578245 E-20	6.975612332578247 E-20
20	1.372088421766259 E-18	1.372088421766260 E-18
19	2.569716259528942 E-17	2.569716259528942 E-17
18	4.570749437946647 E-16	4.570749437946648 E-16
17	7.699513155061015 E-15	7.699513155061018 E-15
16	1.224459519445032 E-13	1.224459519445033 E-13
15	1.831864084133251 E-12	1.831864084133251 E-12
14	2.567845664148156 E-11	2.567845664148157 E-11
13	3.357253124236056 E-10	3.357253124236057 E-10
12	4.072377000172484 E-09	4.072377000172484 E-09
11	4.555021271768889 E-08	4.555021271768890 E-08
10	4.663993036520133 E-07	4.663993036520134 E-07
9	4.333785971808257 E-06	4.333785971808258 E-06
8	3.615714412007974 E-05	3.615714412007974 E-05
7	2.672691745546123 E-04	2.672691745546123 E-04
6	1.720541655769391 E-03	1.720541655769391 E-03
5	9.425923252315197 E-03	9.425923252315197 E-03
4	4.253261915322215 E-02	4.253261915322214 E-02
3	1.503210031447633 E-01	1.503210031447633 E-01
2	3.809068263249844 E-01	3.809068263249842 E-01
1	5.649969805641275 E-01	5.649969805641273 E-01
0	1.496067704488443 E-01	1.496067704488443 E-01

Tabelle 3. *Rückwärtsrekursion:* Vergleich der berechneten Zahlen mit den „exakten“ Zahlen, d. h. hier auf 15 Stellen genau.

Bei Darstellung von Startwerten J_0, J_1 mit endlicher Genauigkeit im Rechner erhält man leicht gestörte Werte $\tilde{J}_0, \tilde{J}_1$, die sich wiederum in die Basiselemente entwickeln lassen. So erhält man etwa

$$\tilde{J}_0 = (1+\delta)J_0 + \varepsilon \cdot Y_0 \;, \quad \tilde{J}_1 = (1+\delta)J_1 + \varepsilon \cdot Y_1 \;, \tag{2.8}$$

wobei für die Störgrößen δ und ε gilt:

$$\delta \approx \mathtt{eps} \;, \quad \varepsilon \approx \mathtt{eps} \;,$$

wobei eps die relative Rechnergenauigkeit bezeichnet, die definiert ist als die größte Maschinenzahl die bei der Addition zu eins als Resultat wieder eine Eins ergibt: float $(1 + \mathtt{eps}) = 1$.

In einer Zeile ist zu zeigen, dass deshalb (unter Weglassung aller Rundungsfehler in Zwischenschritten) die tatsächlich berechnete Lösung die Gestalt

$$\tilde{J}_k = (1+\delta)J_k + \varepsilon \cdot Y_k \;, \quad k = 0, 1, \ldots \;,$$

hat. Diese Darstellung, zusammen mit der Eigenschaft (2.7), erklärt elementar die Abbildung 11: Offenbar bricht bei Index 12 oder 13 die parasitäre Lösung $\varepsilon \cdot Y_0$ in Vorwärtsrichtung durch, während dies in Rückwärtsrichtung gerade die Lösung $(1+\delta)J_N$ tut. Der Irrgarten hat also System: In Vorwärtsrichtung dominieren die Neumann-Funktionen den Verlauf, in Rückwärtsrichtung die Bessel-Funktionen.

Aufgabe 3. *Zeige, ausgehend von den asymptotischen Darstellungen für die Bessel- und Neumann-Funktionen [5]*

$$\hat{J}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{ex}{2k}\right)^k \doteq J_k(x) \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

bzw.

$$\hat{Y}_k(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left(\frac{ex}{2k}\right)^{-k} \doteq Y_k(x) \quad \text{für} \quad k \to \infty \,,$$

dass in der Drei-Term-Rekursion (1.1) für $\hat{J}_{k+1}$ Auslöschung in Vorwärtsrichtung und für $\hat{Y}_{k-1}$ Auslöschung in Rückwärtsrichtung auftritt.

a) Durch Aufstellung einer Tabelle für $k, \frac{2k}{x} \hat{J}_k(x), \hat{J}_{k-1}(x)$ bzw. $k, \frac{2k}{x} \hat{Y}_k(x), \hat{Y}_{k+1}(x)$.

b) Durch eine Grenzwertbetrachtung der Quotienten $\frac{2k}{x} \hat{J}_k(x)/\hat{J}_{k-1}(x)$ bzw. $\frac{2k}{x} \hat{Y}_k(x)/\hat{Y}_{k+1}(x)$.

2.2 Details der Realisierung

Auf der Basis der obigen Einsicht entwickelte Miller einen Algorithmus, der heute seinen Namen trägt. Er sei hier kurz informell angegeben:

Algorithmus 2.1 Miller-Algorithmus

1. Wähle einen *Abbrechindex* N und einen „kleinen" Wert $\sigma > 0$. Das Argument x sei vorgegeben.
2. Wähle Startwerte $\overline{J}_N = 0\,, \overline{J}_{N-1} = \sigma\,.$
3. Berechne Werte $\overline{J}_k$ aus der Rückwärtsrekursion (1.3).
4. Berechne den Skalierungsfaktor (vergleiche (1.4))

$$\kappa_N = \overline{J}_0 + 2 \sum_{k=1}^{[N/2]} \overline{J}_{2k} \,.$$

5. Berechne Approximationen der Bessel-Funktionen gemäß

$$J_k^{(N)} = \frac{\overline{J}_k}{\kappa_N}\,, \quad k = 0, \ldots, n < N\,.$$

Als Approximation der Summenbeziehung (1.4) gilt hierbei offenbar

$$J_0^{(N)} + 2 \sum_{k=1}^{N} J_{2k}^{(N)} = 1\,.$$

In Tabelle 4 zeigen wir Approximationen $J_k^{(N)}(x)$ für $x = 10.13$ und verschiedene Abbrechindizes N. Wie zu beobachten, „bleiben die Stellen stehen", wenn N hinreichend groß gewählt wird.

Frage: Wie groß ist N bei beliebig vorgegebenem x zu wählen?

Als Strategie wird man die Rechnungen mit wachsendem N so oft wiederholen, bis die Resultate ausreichend genau sind, also hinreichend viele Stellen stehen bleiben. Dabei ist es störend, dass beim Übergang von N nach $N+1$ immer die gesamte Rückwärtsrekursion mit etwa $4N$ Operationen durchgerechnet werden muss. Im folgenden Kapitel wird ein neuerer Algorithmus dargestellt, der beim Übergang von N nach $N+1$ nur etwa 4 Operationen benötigt.

3 Ein Horner-artiger Algorithmus

Der Horner-Algorithmus zur ökonomischen Auswertung von Polynomen gehört an vielen Schulen zum Standardstoff. Der hier vorgelegte Algorithmus für die Auswertung von Bessel-Reihen baut darauf unmittelbar auf.

k	$J_k(10.13), N = 30$	$J_k(10.13), N = 35$	$J_k(10.13), N = 40$
20	1.44221677720514 E-05	1.44221681315129 E-05	1.44221681315540 E-05
19	5.32531113143127 E-05	5.32531126416038 E-05	5.32531126417554 E-05
18	1.85342711788055 E-04	1.85342716407573 E-04	1.85342716408101 E-04
17	6.05417927616585 E-04	6.05417942706140 E-04	6.05417942707864 E-04
16	1.84666217853415 E-03	1.84666222456071 E-03	1.84666222456597 E-03
15	5.22806575580816 E-03	5.22806588611349 E-03	5.22806588612838 E-03
14	1.36362571377783 E-02	1.36362574776510 E-02	1.36362574776898 E-02
13	3.24634643387418 E-02	3.24634651478676 E-02	3.24634651479600 E-02
12	6.96855664364851 E-02	6.96855681733417 E-02	6.96855681735401 E-02
11	1.32635607179091 E-01	1.32635610484926 E-01	1.32635610485304 E-01
10	2.18368072057097 E-01	2.18368077499746 E-01	2.18368077500368 E-01
9	2.98495828274211 E-01	2.98495835713980 E-01	2.98495835714830 E-01
8	3.12029253602903 E-01	3.12029261379981 E-01	3.12029261380870 E-01
7	1.94344058956435 E-01	1.94344063800304 E-01	1.94344063800858 E-01
6	−4.34392412248093 E-02	−4.34392423074974 E-02	−4.34392423076210 E-02
5	−2.45802192687700 E-01	−2.45802198814121 E-01	−2.45802198814821 E-01
4	−1.99208530431360 E-01	−1.99208535396472 E-01	−1.99208535397040 E-01
3	8.84805497014330 E-02	8.84805519067394 E-02	8.84805519069914 E-02
2	2.51615568754025 E-01	2.51615575025341 E-01	2.51615575026057 E-01
1	1.08740677730093 E-02	1.08740680440368 E-02	1.08740680440678 E-02
0	−2.49468664948890 E-01	−2.49468671166696 E-01	−2.49468671167406 E-01

Tabelle 4. Approximationen aus Miller-Algorithmus für $N = 30, 35, 40$, jeweils nur für $k = 20, \ldots, 0$.

3.1 Horner-Algorithmus als Zwei-Term-Rekursion

Die Auswertung von Polynomen verlangt die Berechnung von Summen der Form

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, x^k\, .$$

Geeignetes Ausklammern führt dabei auf den Horner-Algorithmus, bei dem die Summe „von hinten her“ ausgewertet wird:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= A_0 + A_1\, x + \ldots + A_{n-1}\, x^{n-1} + A_n\, x^n \\ &= A_0 + x\,(A_1 + \ldots + x\,(A_{n-1} + x\, A_n))\,. \end{aligned}$$

Hier wollen wir den Algorithmus etwas anders herleiten. Wir gehen aus von der Tatsache, dass die Polynome $P_k = x^k$ einer *Zwei-Term-Rekursion* genügen:

$$P_{k+1} = x\, P_k\,.$$

Mit dem bequemen Startwert $P_0 = 1$ ist dies eine (homogene) *Vorwärtsrekursion*. Der Effekt des Ausklammerns lässt sich darstellen als eine inhomogene Zwei-Term-Rekursion der Form

$$\begin{aligned} U_n &= A_n \\ U_{n-1} &= A_{n-1} + x\, U_n \\ &\vdots \\ U_0 &= A_0 + x\, U_1 \\ S_n &= U_0\,. \end{aligned}$$

Dies ist offenbar eine Rückwärtsrekursion, die in der Literatur als „adjungierte“ Rückwärtsrekursion bezeichnet wird. Der Horner-Algorithmus lässt sich demnach auch als „adjungierte Summation“ [3] bezeichnen.

3.2 Erweiterung auf Drei-Term-Rekursionen

Die Sichtweise des vorigen Abschnitts liefert den Schlüssel zur Erweiterung des Horner-Algorithmus auf allgemeine Drei-Term-Rekursionen, die 1977 von P. Deuflhard [2] geleistet worden ist. Für die Konstruktion derartiger Algorithmen wichtig (aber hier nicht bewiesen) ist die Tatsache, dass die adjungierte Rückwärtsrekursion numerisch genau dann brauchbar ist, wenn dies für die ursprüngliche Drei-Term-Rekursion in Vorwärtsrichtung gilt – und umgekehrt. Eine ausführliche theoretische Begründung findet sich in der obigen Originalliteratur und, etwas konziser, in dem Lehrbuch [3, Kap. 6]. Für Bessel-Reihen werden wir daher die Rückwärtsrekursion nach Miller als Ausgangspunkt für eine adjungierte Vorwärtsrekursion nehmen. Mit den Bezeichnungen des Abschnitts 2.2 haben wir also Summen der folgenden Gestalt zu berechnen:

$$S_n^{(N)}(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, J_k^{(N)}(x)\,,$$

wobei der Abbrechindex N adaptiv so zu wählen ist, dass $S_n^{(N)}$ korrekt auf vorgegebene Genauigkeit ϵ ist. Gegeben die Rückwärtsrekursion, wie sie in dem Algorithmus 2.1 realisiert ist, gelangen wir zu einer adjungierten Summation in Vorwärtsrichtung (Herleitung siehe im nachfolgenden Abschnitt 3.3), also zu dem folgenden

Algorithmus 3.1 Adjungierte Summation von Bessel-Funktionen

$g := \Delta u := 0; \bar{f} := -1; u := A_0; N := 1$
repeat
  $\bar{m} := 2\mathbf{mod}(N+1,2)\bar{f};$
  $\Delta u := \bar{f} A_N - g\Delta u - \bar{m}u;$
  $g := \bar{m} - 2N/x + g;$
  $\Delta u := \Delta u/g;$
  $u := u + \Delta u;$
  if$(N > n$ **and** $|\Delta u| \leq |u| \cdot \epsilon)$ **then exit**; (Lösung $S_n \approx u$)
  $g := -1/g;$
  $\bar{f} := \bar{f} g;$
  $N := N + 1;$
until $(N > N_{\max})$

Mit diesem Algorithmus lassen sich sodann beliebige Summen zu vorgegebenen Koeffizienten $\{A_k\}$ auswerten, ohne dazu den Abbrechindex N vorab festzulegen. In Tabelle 5 sind einige Beispiele angegeben. Wie schön zu sehen ist, hängt das „Stehenbleiben gültiger Ziffern“ sowohl vom Argument x also auch von den Koeffizienten in der Summe ab.

Aufgabe 4. *Spezialisiere den Algorithmus 3.1 für den Fall, dass nur eine einzige Bessel-Funktion $J_n(x)$ zu berechnen ist.*

N	$S = J_0^{(N)}(1024.13) + \sum_{k=1}^{1024} k^2 J_k^{(N)}(1024.13)$	N	$J_{10}^{(N)}(10.13)$
1000	9.873630161365381 E+05	10	1.722923265030349 E-01
1010	1.009291691691664 E+06	12	2.273511331914537 E-01
1020	1.028158041678334 E+06	14	2.203454815320414 E-01
1030	9.073090336047271 E+05	16	2.185693492939857 E-01
1040	7.435725532242977 E+05	18	2.183830486762933 E-01
1050	7.150012371538359 E+05	20	2.183689776345255 E-01
1060	7.123942230060821 E+05	22	2.183681224273101 E-01
1070	7.122257868444083 E+05	24	2.183680793897036 E-01
1080	7.122176541637876 E+05	26	2.183680775681829 E-01
1090	7.122173576457674 E+05	28	2.183680775024694 E-01
1100	7.122173493609600 E+05	30	2.183680775004246 E-01
1110	7.122173491807199 E+05	32	2.183680775003691 E-01
1120	7.122173491776222 E+05	34	2.183680775003678E-01
1130	7.122173491775796 E+05	36	2.183680775003678E-01
1140	7.122173491775794 E+05		

Tabelle 5. Adjungierte Summation.
Links: spezielle Bessel-Reihe zu $A_0 = 1, A_k = k^2, x = 1024.13$ und $n = 1024$.
Rechts: Bessel-Funktion J_{10} zu $x = 10.13$.

3.3 Mathematische Herleitung

Gesucht sind Approximationen der Form

$$S_n^{(N)} = \sum_{k=0}^{n} A_k J_k^{(N)}(x) , \tag{3.9}$$

für verschiedene „Abbrechindizes“ $N > n$. Bei Berechnung mittels des Miller-Algorithmus wäre der Gesamtaufwand recht groß, da für jedes neue N sämtliche N Werte $J_k^{(N)}$ neu berechnet werden müssen. Dies lässt sich durch Verwendung einer sog. adjungierten Summation vermeiden.

Der Schlüssel zur Herleitung dieses Algorithmus ist, dass wir, zunächst für festes $N > n$, einen Schritt des Miller-Algorithmus durch ein lineares Gleichungssystem darstellen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & c_1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & c_{N-1} & -1 \\ & & & -1 & c_N \\ m_0 & \cdots & \cdots & \cdots & m_N \end{bmatrix}}_{=:\, M \,\in\, \mathrm{Mat}_{N+1}(\mathbf{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} J_0^{(N)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ J_N^{(N)} \end{pmatrix}}_{=:\, J} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\, r} .$$

Genauer müssten wir eigentlich $M_N, J^{(N)}, r^{(N)}$ für die Ausdrücke M, J, r schreiben, um ihre N-Abhängigkeit zu berücksichtigen, was wir jedoch aus Gründen einer einfacheren Schreibweise nicht tun. Elementweise gilt: die $c_k = 2k/x$ sind die Koeffizienten der Bessel-Rekursion (1.1), die m_k die Gewichte in der Normierungsbedingung (1.4), d.h. $m_0 = 1, m_{2k-1} = 0, m_{2k} = 2,\ k = 0, \ldots$.

Führen wir noch den Vektor $A := (A_0, \ldots, A_n, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbf{R}^{N+1}$ für die Koeffzienten ein, so lässt sich die Summe $S_n^{(N)}$ als Skalarprodukt

$$S_n^{(N)} = \sum_{k=0}^{n} A_k J_k^{(N)} = \langle A, J \rangle \quad \text{mit} \quad MJ = r$$

schreiben. Setzen wir voraus, dass M invertierbar ist, so folgt

$$S_n^{(N)} = \langle A, M^{-1} r \rangle = \langle M^{-T} A, r \rangle . \tag{3.10}$$

Hierbei ist $M^T = (m_{j,i})$ die zu $M = (m_{i,j})$ *transponierte* Matrix. Definieren wir einen Vektor $u := M^{-T} A$, so gilt

$$S_n^{(N)} = \langle u, r \rangle = u_N .$$

Wenn wir also für u das *adjungierte* Gleichungssystem

$$M^T u = A$$

lösen, so benötigen wir am Schluss lediglich die letzte Komponente u_N. In expliziter Schreibweise lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & m_0 \\ c_1 & \ddots & & & \vdots \\ -1 & \ddots & -1 & & \vdots \\ & \ddots & c_{N-1} & -1 & \vdots \\ & & -1 & c_N & m_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} .$$

Ausführen einer Gauß–Elimination auf der Matrix M^T und der rechten Seite A liefert, aufgrund der speziellen Struktur von M^T, das obere Dreieckssystem

$$Ru = e ,$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix R der Gestalt

$$R := \begin{bmatrix} 1 & & & f_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & f_{N-1} \\ & & & f_N \end{bmatrix} .$$

Genaueres Durchrechnen zeigt: Die Komponenten von $e = (e_0, \dots, e_N)$ und $f = (f_0, \dots, f_N)$ sind jeweils durch die folgenden 3-Term-Rekursionen gegeben:

a) $e_{-1} := 0$, $e_0 := -A_0$ und

$$e_k := -(A_k + e_{k-2} - c_k e_{k-1}) \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, N , \tag{3.11}$$

b) $f_{-1} := 0, f_0 := -m_0$ und

$$f_k := -(m_k + f_{k-2} - c_k f_{k-1}) \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, N . \tag{3.12}$$

Dabei ist $A_k := 0$ für $k > n$. Die zu approximierende Summe (3.9) ergibt sich schließlich zu

$$S_n^{(N)} = u_N = \frac{e_N}{f_N} .$$

Mit den Rekursionen (3.11) und (3.12) benötigen wir $O(1)$ Operationen, um aus $S_n^{(N)}$ die nächste Approximation $S_n^{(N+1)}$ zu berechnen – im Gegensatz zu $O(N)$ Operationen bei dem direkt aus dem Miller-Algorithmus abgeleiteten Verfahren. Außerdem ist der Speicherbedarf geringer und nicht von N, sondern nur von n abhängig (falls die Koeffizienten $\{A_k\}$ als Feld gegeben sind). Wegen (3.10) nennen wir das eben hergeleitete Verfahren die *adjungierte Summation von Minimallösungen*.

Herleitung des robusten Algorithmus 3.1. Wir wollen einmal anhand dieses Verfahrens verdeutlichen, wie man, ausgehend von den Rekursionen (3.11) und (3.12), zu einem brauchbaren Algorithmus gelangen kann. Zunächst ersetzen wir die Drei-Term-Rekursion (3.11) für e_k durch ein System von Zwei-Term-Rekursionen für

$$u_k := u_k^{(k)} = \frac{e_k}{f_k} \quad \text{und} \quad \Delta u_k := u_k - u_{k-1} \,,$$

da wir genau an diesen beiden Werten (u_k als Lösung, Δu_k zur Überprüfung der Genauigkeit) interessiert sind. Ferner ist zu beachten, dass die f_k und e_k sehr groß werden und aus dem Bereich der im Rechner darstellbaren Zahlen fallen können. Statt der f_k verwenden wir daher die neuen Größen

$$g_k := \frac{f_{k-1}}{f_k} \quad \text{und} \quad \bar{f}_k := \frac{1}{f_k} \,.$$

Bei der Transformation der Rekursionen (3.11) und (3.12) auf die neuen Größen $u_k, \Delta u_k, g_k$ und $\bar{f}_k$ erweist es sich als günstig, zusätzlich noch

$$\bar{g}_k := \frac{-1}{g_k} = -\frac{f_k}{f_{k-1}} \quad \text{und} \quad \bar{m}_k := m_k \bar{f}_{k-1} = \frac{m_k}{f_{k-1}}$$

einzuführen. Aus (3.12) folgt damit (Division durch $-f_{k-1}$), dass

$$\bar{g}_k = \bar{m}_k - c_k + g_{k-1} \quad \text{für} \quad k \geq 1 \,, \tag{3.13}$$

und aus (3.11) (Division durch $-f_{k-1}$ und Einsetzen von (3.13)), dass

$$\bar{g}_k \Delta u_k = \bar{f}_{k-1} A_k - g_{k-1} \Delta u_{k-1} - \bar{m}_k u_{k-1} \,.$$

Ordnen wir die Operationen nun so an, dass wir möglichst wenig Speicherplatz benötigen und lassen wir die dann nicht mehr nötigen Indizes weg, so erhalten wir den obigen Algorithmus 3.1, der sich in dieser Form für eine Implementierung eignet.

Literatur

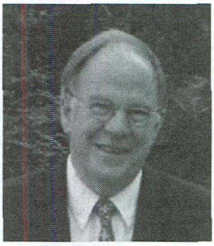
[1] R. Bulirsch, J. Stoer. *Darstellung von Funktionen in Rechenautomaten.* In: R. Sauer, I. Szabô (Hrsg.), Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968

[2] P. Deuflhard. *A Summation Technique for Minimal Solutions of Linear Homogeneous Difference Equations.* Computing, 18:1–13, 1977

[3] P. Deuflhard, A. Hohmann. *Numerische Mathematik I: Eine algorithmisch orientierte Einführung.* 3. überarb. u. erw. Aufl., de Gruyter, Berlin, New York, 2002

[4] J. C. P. Miller. *Bessel Functions, Part II (Math. Tables X).* Cambridge University Press, 1952

[5] F. W. J. Olver. *Bessel Functions of Integer Order.* In: M. Abramowitz, I. A. Stegun (Hg.), Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York, 1972



Alan Huckleberry

Karl Stein (1913 – 2000)

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 32 D 20, 32 E 10, 32 H 02, 32 H 04, 32 Q 28
- Keywords and Phrases: History of mathematicians, biography, Stein spaces, holomorphic/meromorphic mappings, continuation of analytic objects

Eingegangen: 10. 08. 2008

Alan Huckleberry, Fakultät und Institut für Mathematik,
Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, ahuck@cplx.rub.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

Karl Stein was born on the first of January 1913 in Hamm in Westfalen, grew up there, received his Abitur in 1932 and immediately thereafter began his studies in Münster. Just four years later, under the guidance of Heinrich Behnke, he passed his examinations for teaching in high schools (Staatsexamen), received his doctor's degree and became Behnke's assistant.

Throughout his life, complex analysis, primarily in higher dimensions ("mehrere Veränderliche"), was the leitmotif of Stein's mathematics. As a fresh Ph.D. in Münster in 1936, under the leadership of the master Behnke, he had already been exposed to the fascinating developments in this area. The brilliant young Peter Thullen was proving fundamental theorems, Henri Cartan had visited Münster, and Behnke and Thullen had just written *the book* on the subject. It must have been clear to Stein that this was the way to go.

Indeed it was! The amazing phenomenon of analytic continuation in higher dimensions had already been exemplified more than 20 years before in the works of F. Hartogs and E. E. Levi. Thullen's recent work had gone much further. In the opposite direction, Cartan and Thullen had proved their characterization of domains in $\mathbb{C}^n$ which admit a holomorphic function which can not be continued any further. Behnke himself was also an active participant in mathematics research, always bringing new ideas to Münster. This was indeed an exciting time for the young researcher, Karl Stein.

Even though the pest of the Third Reich was already invading academia, Behnke kept things going for as long as possible. But this phase of the Münster school of complex analysis could not go on forever. Although Stein was taken into the army, during a brief stay at home he was able to prepare and submit the paper which contained the results from his Habilitationsarbeit which was accepted in 1940. At a certain point he was sent to the eastern front. Luckily, however, the authorities were informed of his mathematical abilities, and he was called back to Berlin to work until the end of the war in some form of cryptology. Stein told me he was not very good at this.

Almost immediately after the war, in a setting of total destruction, Behnke began to rebuild his group, and very soon Stein became the mathematics guru in Münster. At the time there were only two professor positions in pure mathematics, those of Behnke and F. K. Schmidt. Although it must have been very difficult, Behnke somehow found a position for Stein which he held from 1946 until 1955.

In 1955 Stein took a chair of mathematics at the Ludwigs-Maximilian-Universität in München where he stayed for the remainder of his academic career. There he continued his mathematics and built his own group in complex analysis. A number of his doctoral students later became professors at universities here in Germany. One of the most exciting periods in München was certainly that in the late 1960s with the young Otto Forster, who received his doctorate in 1961, leading a group of up-and-coming researchers.

Not only being an outstanding researcher and teacher, Karl Stein worked tirelessly on all sides of academia. Among other activities he was managing editor of Manuscripta Mathematica from 1969 until 1983, and in 1966 he was president of the DMV. He was awarded numerous honors, including membership in the Bavarian and the Austrian Academies of Sciences, and corresponding membership of the Göttingen Academy of Sciences. In 1973 he received an honorary doctor's degree from the faculty of mathemetics in Münster, and in 1990, on the occasion of the 100th anniversary of the founding of the DMV, he was awarded the inaugural Cantor-Medaille.

Up until a few years before his death in October of 2000 Stein was still actively thinking about and even doing mathematics. I remember his talk in Bochum in the fall of 1992, just before his 80th birthday. He still radiated his intense interest in discovery and the joy of being involved with something so beautiful. Even the youngest of students who heard that talk were mesmerized, knowing they had experienced the real thing!

As the reader has certainly noticed we have barely touched upon the mathematics that so fascinated Stein and his contributions as a researcher and teacher. Let us devote the remainder of this article to a chronological sketch of some of the high points.

Although Stein's thesis does not reflect his later work, it does reflect one of the main directions of that time, namely "analytic continuation", and it also shows that even at this beginning stage he was ahead of his time. It was already known that a function which is holomorphic in a neighborhood of the standard Euclidean sphere in $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, extends holomorphically to the full Euclidean ball. In his thesis (see [S1]), under assumptions, e.g., on dimension, which we now know to be inessential, Stein shows that such results are in fact local in nature. For example, a function which is holomorphic in a neighborhood of a piece of the sphere extends to an open set which only depends on that piece. He even realized that such results are possible for functions holomorphic in neighborhoods of higher-codimensional real manifolds. These results, which represent a change in viewpoint, are precursors to the highly developed modern theory of Cauchy-Riemann manifolds.

One group of leading problems of that period revolved around the question of whether or not holomorphic or meromorphic functions could be constructed with certain prescribed properties. The model situations were the theorem of Mittag-Leffler and the Weierstrass-theory of infinite product expansions on the complex plane. In the former case, at each point of a divergent sequence $\{z_n\}$ a finite negative part P_n of a Laurent series is given and one asks if there is a meromorphic function f on the complex plane which is holomorphic everywhere except at points of the sequence with $f - P_n$ being holomorphic near each z_n. Formulated without the details, one asks if one can arbitrarily prescribe the principal parts of a meromorphic function.

In the original Weierstrass-theory one prescribes a positive integer m_n at each of the points z_n and asks for the existence of a holomorphic function f whose zeros only occur at points of the sequence and the orders of the zeros f at these points should be the given integers. More generally one allows m_n to be an arbitrary integer and asks for a meromorphic function with prescribed zeros and poles. In this case the "principal part" P_n is replaced by $D_n = (z - z_n)^{m_n}$ and the requirement is that $\frac{f}{D_n}$ is holomorphic near z_n. Briefly stated, one asks if the "divisor" of a meromorphic function can be arbitrarily prescribed.

Due to the early work of P. Cousin ([C]) one referred to the higher-dimensional versions of these as the additive and multiplicative Cousin problems or simply Cousin I and II.

As Stein was starting out, it was well-known that the appropriate domains for solving the interesting problems of the time, such as the Cousin problems, were the "Regularitätsbereiche". Precisely speaking, they can be defined as domains D in $\mathbb{C}^n$ so that given any divergent sequence $\{x_n\}$ in D there exists a function f holomorphic on D with $lim|f(x_n)| = \infty$. In fact such a domain possesses a holomorphic function which cannot be continued across any boundary point. In other words D is the "region of regularity" for that function or its "domain of holomorphy". In the mid 1930s Cartan ([Ca]) and Oka ([O]) had already proved definitive results for Cousin I for domains in $\mathbb{C}^n$: If D is a domain of holomorphy, then every Cousin I problem on D is solvable!

Immediately after his thesis Stein turned to the Cousin problems. Later he discovered the correct abstract setting for solving these and many other problems, e.g., on complex manifolds or even complex spaces, but at this point his attention was focused on Cousin II for domains in $\mathbb{C}^n$.

The situation at the time of Stein's entry into the subject is beautifully described in ([S2]). There were already a number of fascinating examples which showed that solving this multiplicative problem on D required more than D just being a domain of holomorphy. There was a natural way to logarithmically change this to the additive problem, i.e., to Cousin I, but in the process problems of well-definedness arise. This was not unknown in complex analysis. Monodromy, something in the fundamental group or first homology, was well-known, but the obstruction to Cousin II was clearly higher order. Nowadays we know that this is the Chern class of the line bundle associated to the divisor and, at least when the ambient manifold is compact, we can regard it as the Poincaré dual of the divisor itself. But in those days these concepts were not available. Furthermore, even had they been on hand, in the noncompact setting which is appropriate for Cousin II, relating a deRham- or Cech-class to something geometric is not a simple matter.

In the late 1930s, without modern topological methods, but armed with strong geometric insight, this is exactly what Stein had in mind: understanding this geometric obstruction. Being able to spend the year 1938 with Seifert in Heidelberg was in this regard certainly his good fortune or maybe even fate. In any case he returned to Münster being one of the few (perhaps the only) complex analyst who was in the position of applying "modern" topological methods to problems such as Cousin II.

In the work ([S10]), which should be regarded as one of the most important in this early phase of several complex variables, Stein completely solved Cousin II and the related Poincaré problem using methods which opened doors to important new directions. The Oka principle, that a well-formulated problem in the complex analytic setting has a holomorphic solution on a domain of holomorphy if and only if it has a topological solution, could be seen in precise form in the hands of Stein. In brief, modulo details which are now well-understood, here is what Stein did.

In its simplest form Cousin II amounts to the following: On a domain of holomorphy D we are given a 1-codimensional subvariety M, i.e., a closed subset which is *locally* defined as the 0-set of a holomorphic function. We ask for a function which is *globally* defined and holomorphic on D, which vanishes exactly on M and vanishes there exactly of order one. Carefully worrying about triangulations, orientations and all other matters that were known to be delicate in the infant state of the topology of the days, he developed a theory which led to well-defined intersection numbers $M.K$, where M is as above, or more generally a divisor in D, and K runs through the 2-dimensional homology cycles. Under minor technical conditions, even for domains finitely spread over domains of holomorphy, he showed that a given divisor is the divisor of a meromorphic function if and only if all of these (topologically defined!) intersection numbers vanish. Not only did Stein prove this, he could *see* the topological obstruction! – I was fortunate to talk with him about this on a number of occasions. As was mentioned above, nowadays we often only mouth something about the Chern class, either deRahm or Cech, of the associated bundle, and maybe we are not nearly seeing as much as Stein did in the late 1930s!

Stein's, and also Behnke's, interests in Cousin type problems were not only restricted to the higher-dimensional setting. Although the questions they were discussing for domains in $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, had long before been completely handled for domains in the complex plane, not much was known for general noncompact Riemann surfaces. On the one hand, that situation was simpler, because there were no higher order topological obstructions. On the other hand, the complex analysis looked quite difficult: Why should a noncompact Riemann surface possess even one nonconstant holomorphic function? In fact, the likes of Koebe and Caratheodory had attempted without success to construct such functions!

From their experience with higher-dimensional domains, and knowledge of proofs of theorems of Mittag-Leffler type for plane domains, Behnke and Stein at least knew what to try to do: Extend the Runge approximation theorem to noncompact Riemann surfaces and show that a noncompact Riemann surface possesses a Runge exhaustion! The Runge condition can be described as follows: Let $\{U_n\}$ be an increasing sequence of open, relatively compact subsets which exhaust the Riemann surface X. Denote by K_n the topological closure of U_n. The exhaustion is said to be Runge if for every n every function holomorphic in a neighborhood of K_n can be abitrarily well approximated in the sup-norm of K_n by functions which are holomorphic on U_{n+1}. At the time it was well-known that, e.g., for plane domains the condition that U_n is Runge in U_{n+1} is equivalent to the topological condition that the U_n is relatively simply-connected in U_{n+1}. In ([S11]) Behnke and Stein succeeded in proving this in the more general setting, thus proving that a noncompact Riemann surface possesses a Runge exhaustion and as a consequence it follows that both Cousin I and II ([S14]) have positive answers in that context. Due to the war-time conditions this work was published long after its completion.

Up until the early 1950s Stein was still focused on the Cousin problems, particularly Cousin II. His last work in this direction ([S15]) may have turned out to be his most famous. From this work one sees that Stein has studied the deep and perhaps mysterious work of Oka, whom he credits with the theorem that on a domain of holomorphy a Cousin II problem is holomorphically solvable if and only if it is topologically solvable.

As mentioned above, under a certain assumption which would seem only to be technical, Stein had made this precise in terms of his intersection numbers. This assumption is that the first homology group of the domain should have a basis. Here Stein observes that (believe it or not!) this is really an assumption, and in order to do away with it he must refine his topological condition. Underway he even proves several new results for countable Abelian groups!

Of course ([S15]) is a basic work, but the reason that it may be one of Stein's most famous is that, without pursuing matters much further, he noted that most results of the type he had been considering are true for, in Stein's words and notation, domains $\mathfrak{G}$ in complex manifolds $\mathfrak{M}^{2n}$ which satisfy the following three axioms:

1. **(Holomorphic convexity)** For every compact subset $\mathfrak{G}_0$ of $\mathfrak{G}$ there is a compact subset $\mathfrak{G}_1$ which contains it so that for every point P in $\mathfrak{G}$ which is not in $\mathfrak{G}_1$ there is a holomorphic function f_P on $\mathfrak{G}$ with

   $|f_P(P)| > \mathrm{Max}|f_P(K_0)|$.
2. **(Point separation)** For any two different points P_1 and P_2 in $\mathfrak{G}$ there is a function f_{P_1,P_2} which is holomorphic on $\mathfrak{G}$ and which takes on different values at P_1 and P_2.
3. **(Coordinates)** For every Q in $\mathfrak{G}$ there is a system of n holomorphic functions on $\mathfrak{G}$ whose functional determinant at Q is nonzero.

The Cartan-Serre theory, in particular the vanishing theorems for cohomology defined by coherent sheaves on spaces which satisfy these axioms, was announced by Cartan at the famous *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* in Brussels in 1953. There he baptized these spaces *Varieté de Stein*, a notation that is still used today. During my very first seminar talk where Stein was present, *his* manifolds arose and, noticing my nervousness, without prompting, he said "I like to call them holomorphically complete".

Returning to Münster after participating in the Brussels Colloquium where he announced his own fundamental work on analytic decompositions, Stein lamented "Die Franzosen haben Panzer, wir nur Pfeile und Bogen"[1]. To a certain extent this analogy might fit, but in appearance only. Looking back one sees that these "Bows and Arrows" were really quite sophisticated and that the accomplishments of the Münsteraner were truly extraordinary!

The most well-known names associated with the early days of the postwar Münster school of Heinrich Behnke are Hirzebruch, Grauert, Remmert and Stein. Hirzebruch, who was one of the first doctoral students after the war, went on to prove numerous important results in complex geometry, primarily for compact manifolds. Certain of his fundamental works utilize topological methods which go well beyond those employed by Stein, but which are of a similar basic spirit in that invariants such as characteristic classes or intersection numbers are fundamental topological obstructions to solving problems of analytic or algebraic geometric interest. In the early days he and Stein often commuted together from Hamm (Hirzebruch also grew up there), sometimes having to ride on the outside running board of the train, but nevertheless discussing mathematics. I can imagine that Stein's animated expositions about his intersection numbers, or

[1] Oral communication from R. Remmert. See ([R]) for other recollections of the spirit of those times.

H. Grauert, K. Stein and R. Remmert

whether or not the first Betti group has a basis, made a lasting impression on the young Hirzebruch!

Certain of Grauert's early works, e.g., his Oka principle, can be regarded as taking Stein's prewar mathematics to another universe (see, e.g., our article, *Hans Grauert: Mathematician Pur, Mitteilung of the DMV, 2008*, for a brief summary of Grauert's work). Later on (Stein had been retired for a number of years) they had close common interests in understanding the conditions under which the quotient of a complex space by an analytic or meromorphic equivalence relation is again a complex space. I recall several *very* animated discussions in Oberwolfach!

In any account of Stein's mathematics after his period of intense interest in the Cousin problems, in particular in the topological obstructions, his work with Reinhold Remmert must have center stage. This turned the page to a completely new direction!

Very early in Remmert's studies, Behnke sent him to Stein, who at the time had an idea that analytic continuation was something that applied not only to functions. Maybe Thullen's result in the 1-codimensional case could be proved for general analytic sets! Stein had in mind that the appropriate *elimination theory* could be found in Osgood's book and Remmert should check this. What a daunting task for someone just starting out! As it turned out, nothing of this sort could be found in Osgood, and work could be started toward what would be the Remmert-Stein extension theorem ([S18]).

Here is a statement of the simplest version of that result: Let E be an analytic set in a domain D in $\mathbb{C}^n$, i.e., a closed subset which is locally defined as the common 0-set of finitely many holomorphic functions, and suppose that A is an analytic set in the complement $D \setminus E$ which is everywhere of larger dimension than E. Then the topological closure $\bar{A}$ of A in D is an analytic subset of D and what one adds to A to obtain this closure is just the lower-dimensional analytic subset $\bar{A} \cap E$.

To the ear of the nonspecialist the above may sound overly complicated. However, considering the following example, which was a starting point for the Remmert-Stein discussions, should allay any doubts about its importance. Let D be $\mathbb{C}^n$ itself and E just be the origin. Assuming that A is everywhere at least 1-dimensional, in this case the theorem just says that $\bar{A} = A \cup \{0\}$ is an analytic subset of $\mathbb{C}^n$ and, using results that were already known at the time, $\bar{A}$ is the common 0-set of finitely many holomorphic functions which are *globally* defined on $\mathbb{C}^n$, i.e., convergent power series.

Preimages $A = \pi^{-1}(V)$ via the standard projection $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ of analytic sets V in projective space are examples of analytic sets where the Remmert-Stein theorem can be applied. In this case A is invariant by the $\mathbb{C}^*$-action defined by scalar multiplication. Thus, writing the defining power series A as sums of homogeneous terms, one shows that A is also the common 0-set of finitely many of these *homogeneous polynomials*. Consequently the original variety V is the common 0-set of the same polynomials and is therefore an algebraic variety.

The above proof of Chow's theorem was given *ahead of time* by Cartan in his lecture at the International Congress of Mathematicians in Boston in 1950! This result is a first example of a general principle which states that in many algebraic geometric settings there is no difference between algebraic and analytic phenomena. The Remmert-Stein theorem is certainly one of the guiding forces behind this principle!

The theme of holomorphic and meromorphic maps was one of Stein's favorites and throughout this area the Remmert-Stein theorem plays a key role. The idea, e.g., for analyzing a holomorphic map $F : X \to Y$, is to throw out the analytic subsets (images and preimages) where F degenerates, prove a good result for the restricted map, and then obtain the desired result by Remmert-Stein continuation. In several complex variables, meromorphic maps have indeterminacies and thus it is necessary to define such via their graphs. In any theory for these *set valued maps* the Remmert-Stein result is used at many steps along the way. Remmert developed this theory for (generically single-valued) meromorphic maps, and Stein later generalized this to *correspondences* which are not necessarily generically single-valued (see, e.g. [S34, S35]).

Remmert's mapping theorem, *Images of analytic sets under proper holomorphic maps are analytic sets*, is very much in the spirit of the times. Of course this result is extremely useful. However, it is perhaps just as important that it calls our attention to the concept "proper", i.e., inverse images of compact sets are compact. Its role had already been emphasized by Henri Cartan in 1935 in the context of actions automorphism groups on bounded domains and some basic results were proved in Bourbaki, but the proper mapping theorem and Stein's fundamental paper on analytic decompositions ([S23]) cemented the position of properness in complex analysis.

Stein's paper contains a wealth of interesting and useful results, some even at the general topological level (see for example Satz 9), but due to lack of space we will only extract the most well-known one. For this it should be recalled that, in Münster, complex spaces were defined as topological spaces which could be locally realized as finite ramified covers (with obvious topological assumptions) over domains in $\mathbb{C}^n$. Stein had in fact shown that unramified (even infinite) covers of holomorphically complete spaces are holomorphically complete ([S24]), but he had really focused his interests on situations where some sort of properness is available.

Let us state an example of a result which is an important special case of those in ([S23]). Suppose $F : X \to Y$ is a proper holomorphic mapping of complex spaces. The domain space X is assumed to be normal – for our purposes here it is enough to consider the smooth case. In order to analyze F, first apply Remmert's theorem so that it may be assumed that it is surjective. Then define an equivalence relation $\sim$ on X with two points being equivalent whenever they are in the same connected component of an F-fiber. The decomposition of X into equivalence classes is a special case of what Stein called an "analytic decomposition". In this case at hand, he shows that $X/\sim =: X^*$ carries a unique structure of a normal complex space such that the quotient map $\Phi : X \to X^*$ is holomorphic and every other holomorphic map which is constant on the equivalence classes of $\sim$ factors through it. In particular, this induces a holomorphic map $f : X^* \to Y$ which is a finite ramified cover! The factorization $F = f \circ \Phi$ is what is now called the *Stein factorization* of F.

A number of Stein's last published works are devoted to understanding more general situations where it is possible to construct a universal quotient of the above type. The works ([S29, S30]) are typical of this. One exception is ([S27]). In this jewel, given two (concrete) domains in $\mathbb{C}^n$, Remmert and Stein study the possibilities for proper holomophic maps between them. For two polyhedral domains A and A^* with sufficient structure coming from the affine structure of $\mathbb{C}^n$, they show that proper holomorphic maps which respect this structure are in fact affine. In particular, for domains in $\mathbb{C}^2$ this leads to strong nonexistence (rigidiy) results, e.g., that certain very simple explicitly given domains have only the identity as proper holomorphic self-maps. Their methods even shed new light on situations which were classically "understood". For example, Poincaré showed that the Euclidean ball $B_2 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ and the polydisk $\Delta_2 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < 1 \text{ and } |w| < 1\}$ are not equivalent by a biholomorphic map, because their automorphism groups don't have the same dimensions. Remmert and Stein show that, just as the beginner would like to believe, the reason for the inequivalence of these domains is that the boundary of B_2 is round and most of the boundary of Δ is flat!

We have now come to the end of our tour of what we find to be the highest points of Karl Stein's mathematical works and would like to close this note by expressing our greatest respect and admiration, not only for the science of the man, but equally for the man behind the science!

Bibliography

[Ca] Cartan, H.: Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, C. R. Acad. Sci. **199** (1934) 1284 – 1287.

[C] Cousin, P.: Sur les fonctions de n variables complexes, Acta math. **19** (1895).

[O] Oka, K.: Domaines d'holomorphie, Journal of Science of Hiroshima University, Ser. A., **7** (2) (1937).

[R] Remmert, R.: Mathematik in Oberwolfach, Erinnerungen an die ersten Jahre, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (2008).

Publications of Karl Stein

[S1] Stein, K.: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 114 (1937) 543–569.

[S2] Behnke, H. and Stein, K.: Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 47 (1937) 177–192.

[S3] Behnke, H. and Stein, K.: Suites convergentes de domaines d'holomorphie, C.R. Acad. Sci. Paris 206 (1938) 1704 – 1706.

[S4] Behnke, H. and Stein, K.: Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität, Math. Ann. 116 (1938) 204–216.

[S5] Behnke, H. and Stein, K.: Approximation analytischer Funktionen in vorgebenen Bereichen des Raumes von *n* komplexen Veränderlichen, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, Neue Folge, Bd. 1 (1938) 197–202.

[S6] Stein, K.: Verallgemeinerungen des Picard'schen Satzes in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, Semester-Berichte Univ. Münster 14 (1939) 83–96.

[S7] Stein, K.: Über das zweite Cousin'sche Problem und die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen, Sitz.-Ber. Math.-Nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss. Jg. 1939, pp. 139–149.

[S8] Behnke, H. and Stein, K.: Die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler auf Riemann'schen Flächen, Vierteljahrschr. der Naturf. Ges. Zürich 85, Festschrift Fueter (1940) 178–190.

[S9] Behnke, H. and Stein, K.: Die Konvexität in der Funktionentheorie mehererer komplexer Veränderlichen, Mitt. der Math. Ges. Hamburg 8 Festschrift II (1940) 34–81.

[S10] Stein, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen, Math. Ann. 117 (1941) 727–757.

[S11] Behnke, H. and Stein, K.: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemann'schen Flächen, Math. Ann. 120 (1948) 430–461.

[S12] Behnke, H. and Stein, K.: Konvergente Folgen nichtschlichter Regularitätsbereiche, Annali di Mat. pura ed appl. 28 (1949) 317–326.

[S13] Stein, K.: Primfunktionen und multiplikative automorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen Riemann'schen Flächen und Zylindergebieten, Acta Math. 83 (1950) 165–196.

[S14] Behnke, H. and Stein, K.: Elementarfunktionen auf Riemann'schen Flächen als Hilfsmittel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, Canadian J. Math. 2 (1950) 152–165.

[S15] Stein, K.: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousin'sche Problem, Math. Ann. 123 (1951) 201–222.

[S16] Behnke, H. and Stein, K.: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemann'scher Gebiete, Math. Ann. 124 (1951) 1–16.

[S17] Behnke, H. and Stein, K.: Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen, Nieuw Arch. v. Wisk. Amsterdam 1952, 97–107.

[S18] Remmert, R. and Stein, K.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Ann. 126 (1953). 263–306.

[S19] Stein, K.: Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953, pp. 97–107. Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris, 1953.

[S20] Stein, K.: Un théorème sur le prolongement des ensembles analytiques, Sém. Ecole Norm. Sup. Paris 1953/54, Exposés XIII et XIV.

[S21] Behnke, H. and Stein, K.: Der Severi'sche Satz über die Fortsetzung von Funktionen mehrerer Veränderlichen und der Kontinuitätssatz, Annali di Mat. pura ed appl. Ser. IV, 36 (1954) 297–313.

[S22] Stein, K.: Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume, Colloque de topologie de Strasbourg 1954, 9 pp. Institut de Mathématique, Université de Strasbourg.

[S23] Stein, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume, Math. Ann. 132 (1956) 63–93.

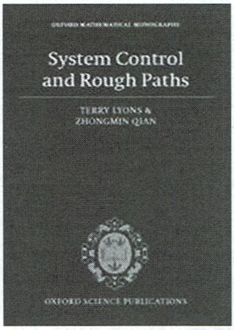
[S24] Stein, K.: Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume, Arch. Math. 7 (1956) 354–361.

[S25] Stein, K.: Leçons sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, In: Teoria delle funzioni di più variabili complesse e delle funzioni automorfe. Centro Internazionale Matematico Estivo, Varenna 1956.
[S26] Stein, K.: Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen, Math. Ann. 136 (1958) 1–8.
[S27] Remmert, R. and Stein, K.: Eigentliche holomorphe Abbildungen, Math. Zeitschr. 73 (1960) 159–189.
[S28] Ramspott, K. J. and Stein, K.: Über Runge'sche Paare komplexer Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 145 (1962) 444–463.
[S29] Stein, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen, I, Amer. J. Math. 85 (1963) 298–315.
[S30] Stein, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen, II, Amer. J. Math. 86 (1964) 823–868.
[S31] Stein, K.: On factorization of holomorphic mappings, Proc of the Conf. on Complex Analysis, Minneapolis 1964, pp. 1–7.
[S32] Stein, K.: Über die Äquivalenz meromorpher und rationaler Funktionen, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. Jg. 1966. pp. 87–99.
[S33] Stein, K.: Meromorphic mappings, L'enseignement mathématique 14 (1968) 29–46.
[S34] Stein, K.: Fortsetzung holomorpher Korrespondenzen, Invent. Math. 6 (1968) 78–90.
[S35] Stein, K.: Topics on holomorphic correspondences, Rocky Mountain J. Math. 2 (1972) 443–463.
[S36] Stein, K.: Dependence of meromorphic mappings, Proc. Sixth Conference on Analytic Functions, Krakow 1974. Ann. Polon. Math. 33 (1976/77) 107–115.
[S37] Stein, K.: Topological properties of holomorphic and meromorphic mappings, Colloque Variétés Analytiques Compactes, Nice 1977. Springer Lecture Notes in Math. 683 (1978) 203–216.
[S38] Stein, K.: Rank-complete function fields, Several complex variables (Hangzhou 1981), Birkhäuser 1984, pp. 245–246.
[S40] Koecher, M. and Stein, K.: Carl Ludwig Siegel, Jahrbuch Bayer. Akad. Wiss. Jg. 1983, pp. 1–5.
[S41] Forster, O. and Stein, K.: Entwicklungen in der komplexen Analysis mehrerer Veränderlichen, Perspectives in mathematics, Birkhäuser 1984, pp. 191–214.
[S42] Stein, K.: Zur Abbildungstheorie in der komplexen Analysis, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 95 (1993) 121–133.

Dissertations guided by Karl Stein

[D1] Kerner,Hans: Funktionentheoretische Eigenschaften komplexer Räume, December 17, 1958.
[D2] Königsberger, Konrad: Thetafunktionen und multiplikative automorphe Funktionen zu vorgegebenen Divisoren in komplexen Mannigfaltigkeiten, July 27, 1960.
[D3] Pfister, Albrecht: Über das Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen von zwei Veränderlichen, February 22, 1961.
[D4] Forster, Otto: Banachalgebren stetiger Funktionen auf kompakten Räumen, July 26, 1961.
[D5] Osório Vasco Tomé, Estevao: Randeigenschaften eigentlicher holomorpher Abbildungen, January 31, 1962.
[D6] Wolffhardt, Klaus: Existenzbedingungen für maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen, July 24, 1963.
[D7] Wiegmann, Klaus-Werner: Einbettungen komplexer Räume im Sinne von Grauert in Zahlenräume, July 28, 1965.

[D8] Schmidt, Gunther: Fortsetzung holomorpher Abbildungen unter Erweiterung des Bildraumes, February 23, 1966.
[D9] Knorr, Knut: Über die Kohärenz von Bildgarben bei eigentlichen Abbildungen in der analytischen Geometrie, February 21, 1968.
[D10] Schuster, Hans Werner: Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume, February 21, 1968.
[D11] Schneider, Michael: Vollständige Durchschnitte in komplexen Mannigfaltigkeiten, January 22, 1969.
[D12] Höß, Dietmar: Fortsetzung holomorpher Korrespondenzen in den pseudokonkaven Rand, July 8, 1970.
[D13] Hayes, Sandra: Oka'sche Paare von Garben homogener Räume, February 3, 1971.
[D14] Kraus, Günther: Korrespondenzen und meromorphe Abbildungen, February 3, 1971.
[D15] Correll, Claus: Runge'sche Approximation durch äquivalente Funktionen auf holomorphen Familien Riemann'scher Flächen, February 3, 1972.
[D16] Stiegler, Helmut: Fortsetzung holomorpher kanteneigentlicher Korrespondenzen, February 3, 1972.
[D17] Schottenloher, Martin: Analytische Fortsetzung in Banachräumen, February 16, 1972.
[D18] Duma, Andrei: Der Teichmüller-Raum der Riemann'schen Flächen vom Geschlecht ≥ 2, May 5, 1972.
[D19] Sinzinger, Hans: Zur Faktorisierung holomorpher Korrespondenzen über Abbildungen, January 23, 1976.
[D20] Maurer, Joseph: Zur Auflösung der Entartungen gewisser holomorpher Abbildungen, June 16, 1977.
[D21] Aurich, Volker: Kontinuitätssätze in Banachräumen, July 29, 1977.
[D22] Baumann, Johann: Eine gewebetheoretische Methode in der Theorie der holomorphen Abbildungen: Starrheit und Nichtäquivalenz von analytischen Polyedergebieten, February 9, 1982.
[D23] Kirch, Ursula: Existenz und topologische Eigenschaften holomorpher Überlagerungskorrespondenzen zwischen Riemann'schen Flächen, March 1, 1982.



T. Lyons, Z. Qian

System Control and Rough Paths

Oxford University Press, 2002, 228 S., £ 62,–

Die grundlegende Fragestellung des Buches ist, einen mathematischen Rahmen für die Entwicklung von mehrdimensionalen Systemen zu entwickeln, die ein nichtlineares Entwicklungsgesetz haben und zusätzlich von einem recht irregulären Kontrollprozess gesteuert werden. Der Kontrollprozess hat oft den Charakter einer Störung.

Sei zum Beispiel Y_t ein hochdimensionales System, das sich gemäß $dY_t = f(Y_t)$ entwickeln würde, wobei f eine nichtlineare Funktion ist. Dann würde man für eine glatte Störung X_t (niedrigdimensional) das System

$$\dot{Y}_t = f(Y_t) + \sum_{i=1}^{d} g^i(Y_t)\dot{X}_t^i$$

betrachten. Die Lösung des Anfangswertproblems liefert dann die Ito-Abbildung, die dem Kontrollpfad X den Lösungspfad Y zuordnet.

Ein praktisches Kernproblem ist dann natürlich stetige Ito-Abbildungen zu bekommen, um damit eine gewisse Stabilität des Systems nachweisen zu können. Nun hat man aber zu berücksichtigen, dass die Pfade von X typischerweise nicht glatt sind. Zum Beispiel könnte man $dY_t = f(Y_t) + dB_t$ betrachten, wobei B_t eine Brown'sche Bewegung ist oder ein anderer Pfad mit unendlicher Variation und nicht differenzierbaren Pfaden. In dieser Situation muss zunächst einmal der Ausgangsgleichung Sinn gegeben werden. Das bedeutet, man schreibt die Gleichung in integraler Form und entwickelt eine angemessene Integrationstheorie. Dann gilt außerdem für Dimensionen größer als eins im Allgemeinen keine Stetigkeit in der Supremumsnorm für die Pfade. Die nächste Frage ist also, wie man eine andere geeignete Norm finden kann. Nachdem man die Rauhigkeit der Pfade von unendlicher Variation aber sinnvollerweise in einer geeigneten p-Variation beschreibt, verwendet man hier die entsprechende Norm. In der Tat erhält man eine Stetigkeitseigenschaft der Ito-Abbildung in der p-Variationsnorm.

Ausgehend von dieser Beobachtung entwickelt das Buch die Mathematik von Systemen der Form

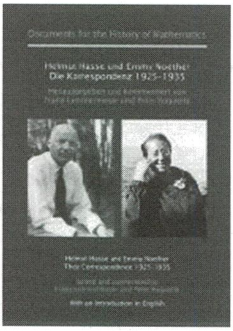
$$dY_t = f(t, Y_t)dX_t$$

für rauhe Pfade X. Damit entsteht insbesondere auch ein neuer Rahmen für eine analytische Theorie der Ito-Prozesse jenseits der üblichen Ito oder Stratanowitch Integrationstheorie. Der Ausgangspunkt sind hier iterierte Integralrepresentationen der Pfade.

Das Buch verfolgt diesen Ansatz in sieben Kapiteln. In Kapitel 1 werden das Problem und die mathematische Struktur vorgestellt. Das Kapitel 2 betrachtet dann die Ito-Abbildung und Integrationstheorie zunächst für relativ glatte Pfade, genauer Lipschitzpfade und schreitet dann in Kapitel 3 fort mit rauhen Pfaden. Das Kapitel 4 ist dem wichtigen Spezialfall gewidment, dass die Pfade durch multidimensionale Brown'sche Bewegungen gegeben sind. Im nächsten Kapitel 5 wird dann die Pfadintergration entlang rauher Pfade entwickelt. Das Kapitel 6 ist das Zentrum des Buches und behandelt die Theorie von Differentialgleichungen, die von rauhen Pfaden getrieben werden und formuliert und beweist die zentrale Stetigkeitseigenschaften der Ito-Abbildung. Das Schlusskapitel 7 behandelt dann Glattheitseingeschaften der Ito-Abbildung. Das ist im Geiste der Ideen des Malliavin Kalküls.

Das Buch ist inhaltsreich, klar strukturiert und konzise geschrieben und kann sehr gut als Basistext für ein Seminar mit fortgeschrittenen und guten Studenten der Stochastik oder Analysis dienen. Es muss zu diesem Zweck allerdings ergänzt werden durch Arbeiten zu Anwendungen, die im Buch nur gestreift werden und im Wesentlichen nur der Motivation der Mathematik dienen, die hier entwickelt wird.

Erlangen A. Greven



F. Lemmermeyer,
P. Roquette
Helmut Hasse und Emmy Noether: Die Korrespondenz 1925–1935

Universitätsverlag Göttingen, 2006, 301 S., € 32,-

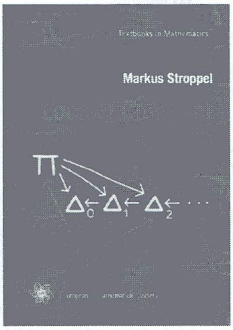
Der vorliegende Briefwechsel zwischen H. Hasse und E. Noether enthält die 79 Briefe von Noether an Hasse, die in der Handschriftenabteilung der Göttinger Universitätsbibliothek aufbewahrt werden. Die zugehörigen Briefe von Hasse an Noether sind verschollen. Der Nachlass von E. Noether wurde nach ihrem plötzlichen Tod im Jahre 1935 wohl an ihren Bruder Fritz Noether nach Tomsk, Sibirien, geschickt. Dieser hat ihn aber nicht erhalten. Der vorliegende Briefwechsel enthält jedoch drei Briefe von Hasse an Noether, von denen sich die Entwürfe erhalten haben. Emmy Noether (1882–1935) verlor 1933 als Jüdin ihre Lehrberechtigung an der Göttinger Universität, konnte aber eine Foschungsprofessur am Frauen-College in Bryn Mawr, Pennsylvania, antreten. Diese Professur wurde gemeinsam von der Rockefeller-Stiftung und dem Komitee „In Aid of Displaced German Scholars" bezahlt (Brief 71). Eine Woche nach Abfassung ihres letzten Briefes an Hasse (Brief 82) starb sie an den Folgen einer Operation. Fritz Noether emigrierte 1934 von Breslau aus in die UdSSR nach Tomsk. Dort wurde er 1937 als angeblicher deutscher Spion verhaftet und 1941 zum Tode verurteilt und hingerichtet. Die vorliegende Publikation besteht aus folgenden Abschnitten: Teil I – Vorspann, I.1 Introduction, in englischer Sprache, alle anderen Abschnitte in deutscher Sprache. I.2 Nachruf von B.L. van der Waerden auf E. Noether, I.3 Nachruf von H.W. Leopoldt auf H. Hasse. Teil II – Die 82 Briefe zwischen Noether und Hasse und 14 Briefe zwischen Hasse und anderen Mathematikern nach dem Tode von E. Noether, dazu die Kommentare der Herausgeber. II.1 Briefe 1925–1927, II.2 Briefe 1927–1931, II.3 Briefe 1932–1935, II.4 Briefe danach. Jedem dieser vier Abschnitte ist ein Verzeichnis der jeweiligen Briefe vorangestellt mit stichwortartigen Inhaltsangaben der Herausgeber. Teil III – Anhang, III.1 Namensverzeichnis, III.2 Stichwortverzeichnis, III.3 Literaturverzeichnis, III.4 Kurzbiographien.

Der mathematische Inhalt der Briefe betrifft hauptsächlich Fragen der Algebra und algebraischen Zahlentheorie, die sich aus laufenden Publikationen von Hasse, Noether und anderer Mathematiker ergeben. Hierzu gehören die Idealtheorie von Integritätsbereichen, Galoistheorie, Algebrentheorie über Zahlkörpern und Begründung der Klassenkörpertheorie. Eine besondere Rolle spielt der berühmte Brauer-Hasse-Noether-Satz, der besagt, dass jede einfache Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist. Einen direkten Bezug zur Entstehung dieses Satzes haben die Briefe 33–37.

Die Bedeutung der vorliegenden Publikation für das Studium der Geschichte der Mathematik ergibt sich aus der zentralen Stellung von E. Noether in der Algebra der 20er und 30er Jahre des 20. Jahrhunderts. Zusammen mit ihrem Kreis, zu dem u.a. E. Artin, H. Hasse und B.L. van der Waerden gehörten, ist sie die Schöpferin der „Modernen Algebra", so der Titel der berühmten zweibändigen Monographie von van der Waerden aus den Jahren 1930 und 1931. In der Nachfolge entstand in Frankreich nach dem zweiten Weltkrieg die Sammlung „Bourbaki" von grundlegenden Darstellungen aller Gebiete der reinen Mathematik, die weltweit prägend für deren weitere Entwicklung wurde. – H. Hasse ist zusammen mit E. Artin der führende Vertreter der algebraischen Zahlentheorie in der Zeit des vorliegenden Briefwechsels, einer Disziplin, die wesentlich zur Herausbildung der modernen Algebra beigetragen hat.

Alle Briefe sind von den Verfassern kommentiert und damit für den Leser erschlossen. Oft sind diese Kommentare wesentlich umfangreicher als die entsprechenden Briefe, die teilweise auf Postkarten geschrieben wurden. Die Entzifferung der Briefe durch die Verfasser ist schon eine große Leistung. Die Kommentare gehen auch ein auf den Inhalt der fehlenden Briefe von Hasse an Noether, der soweit wie möglich aus der Mathematik der Zeit erschlossen wird. Die 14 Briefe, die sich an den Briefwechsel Hasse-Noether anschließen, stehen in Zusammenhang mit Emmy Noethers Tod und deren Nachlass. Zusammenfassend kann man sagen, dass die vorliegende Publikation für jeden, der einen tieferen Einblick in die Mathematik, und insbesondere die Algebra der 20er und 30er Jahre des 20. Jahrhunderts erhalten möchte, eine Pflichtlektüre sein sollte.

Berlin H. Koch



M. Stroppel
Locally Compact Groups
EMS Textbooks in Mathematics

Zürich, European Mathematical Society, 2006, 304 S., € 52,–

Lokalkompakte Gruppen treten in den verschiedensten Bereichen der Mathematik in sehr natürlicher Weise auf. Zunächst sind natürlich alle (endlichdimensionalen) reellen oder komplexen Lie-Gruppen lokalkompakt. Darüber hinaus gibt es die in Zahlentheorie und Geometrie auftretenden lokalkompakten Körper, wie z.B. die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und auch alle abgeschlossenen Matrizengruppen über diesen sind lokalkompakt. In der harmonischen Analysis bilden die lokalkompakten Gruppen die natürliche Klasse von zugänglichen topologischen Gruppen, da sie invariante Maße besitzen, so dass man ihnen (Banach-)Gruppen-Algebren zuordnen kann und dadurch die entsprechende Resultate zum Studium der unitären Darstellungen dieser Gruppen vefügbar werden. Insbesondere die Abel'schen lokalkompakten Gruppen und ihre Dualität treten in den verschiedensten Kontexten, wie z.B. der Fourier-Analysis, auf.

Es besteht also ein Bedarf an gut lesbaren Lehrbüchern zu diesem Thema, die Studierenden schnell an die verschiedensten Aspekte der Theorie heranführen. Das vorliegende Buch ist ein einführendes Lehrbuch in die Theorie der lokalkompakten Gruppen, das diesem Anspruch voll und ganz gerecht wird. Der Weg, den es einschlägt, führt über die topologischen Gruppen und topologische Transformationsgruppen zu den spezifischen Aspekten der lokalkompakten Gruppen und ihrer Struktur.

Es ergänzt in natürlicher Weise das schon fast enzyklopädische Lehrbuch von K. H. Hofmann und S. Morris „The Structure of Compact Groups“ (Studies in Math., de Gruyter, Berlin, 1998), das sich auf kompakte Gruppen konzentriert. Lie-theoretische Aspekte spielen in dem vorliegenden Buch keine Rolle. Da jede lokalkompakte Gruppe eine offene Untergruppe enthält, die ein projektiver Limes von Lie-Gruppen ist, also durch Lie-Gruppen „approximierbar“, kann man sich auf den Standpunkt stellen, dass die lokalkompakten Gruppen eine natürliche Erweiterung der Klasse der reellen Lie-Gruppen bilden, und man sie entsprechend behandeln kann. Diesen Zugang, der in der Tat weit über die lokalkompakten Gruppen hinaus führt und interessante Berührungen mit der aktuellen unendlichdimensionalen Lie-Theorie aufweist, verfolgen K. H. Hofmann und S. Morris in ihrer Monographie „The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups – A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups and Connected Locally Compact Groups“, die in Kürze beim EMS Publishing House, Zürich, erscheinen wird.

Das vorliegende Buch wird seinem Lehrbuchcharakter in vieler Hinsicht sehr gerecht. Das „geodätische Lernen“ gewisser Aspekte wird erleichtert durch einen übersichtlichen Abhängigkeitsgraphen der Abschnitte. Darüber hinaus lassen sich mit seiner Hilfe natürlich auch Vorlesungen zu den verschiedensten Bereiche der Theorie, wie z.B. lokalkompakte Abel'sche Gruppen, kompakte Gruppen, oder etwa topologische Algebra, zusammenstellen. Jeder Abschnitt ist mit reichlich Übungsaufgaben versehen, die für einführende Vorlesungen bestens geeignet sind.

Das Buch ist grob in 8 Kapitel (A – H) gegliedert, die sich insgesamt in 40 Abschnitte unterteilen. In Kapitel A werden zunächst Grundlagen aus der Topologie behandelt und Kapitel B enthält eine Einführung in die topologischen Gruppen. Kapitel C stellt die wichtigsten Grundlagen über topologische Transformationsgruppen und Topologien auf Abbildungsräumen bereit. Das Haar'sche Integral wird in Kapitel D behandelt. Eine wichtige Anwendung hiervon ist, dass für kompakte Gruppen die endlichdimensionalen Darstellungen die Punkte trennen, wozu einige Fakten aus der Funktionalanalysis zusammengetragen werden.

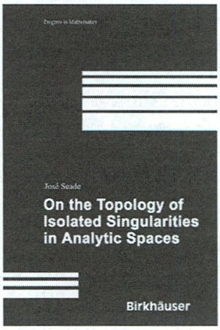
Kapitel E thematisiert Kategorien topologischer Gruppen, indem zuerst Kategorien und allgemeine Limiten diskutiert werden. Dem Studierenden, dem kategorielles Denken neu ist, bietet dieses Kapitel eine hervorragende Gelegenheit, sich anhand konkreter Beispiele in diese Begriffswelt einzudenken. Zentrales Ergebnis dieses Kapitels ist die Beschreibung kompakter Gruppen als projektiver Limes kompakter Matrizengruppen.

Kapitel F über lokalkompakte Abel'sche Gruppen ist das längste Kapitel des Buches. Hier wird zunächst die volle Struktur- und Dualitätstheorie entwickelt, wobei die wichtigsten Beispielklassen ausführlich diskutiert werden. Darüber hinaus liegt ein gewisser Schwerpunkt auf Automorphismengruppen und Topologisierung von Endomorphismenringen dieser Gruppen.

Die letzten beiden Kapitel stellen Ergänzungen dar. Kapitel G behandelt lokalkompakte Halbgruppen, ihre Einbettbarkeit in Gruppen und automatische Stetigkeit der Inversion in Gruppen mit stetiger Multiplikation. Das letzte Kapitel H gibt einen Überblick über verschiedene Aspekte des fünften Hilbert'schen Problems, d.h., über die Approximation lokalkompakter Gruppen durch Lie-Gruppen und lokalkompakte Gruppen endlicher Dimension.

Abschließend lässt sich sagen, dass das Buch einen sehr breit gefächerten Einblick in die Theorie lokalkompakter Gruppen gibt. Die Notation ist zum Teil etwas eigenwillig, aber hier hilft der ausführliche Symbolindex am Ende des Buches. Es ist ein sehr gelungenes Lehrbuch. Experten können es für gewisse Subtilitäten der Theorie als Nachschlagewerk oder als Begleitlektüre für Vorlesungen sehr gut verwenden und Studierenden bietet es sowohl einen schnellen Zugriff zu speziellen Themen und eröffnet ihnen Ausblicke auf weiterführende Aspekte und Anwendungen.

Darmstadt K.-H. Neeb



J. Seade
On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces
Progr. in Math. 241

Basel, Birkhäuser, 2005, 238 S., € 51,36

Eine der aufregendsten mathematischen Entdeckungen des vergangenen Jahrhunderts war die Entdeckung von J. Milnor im Jahr 1965, dass es auf der 7-dimensionalen Sphäre exotische differenzierbare Strukturen gibt. Nach Vorarbeiten von Milnor und F. Hirzebruch konnte E. Brieskorn im Jahre 1966 zeigen, dass man die 28 verschiedenen differenzierbaren Strukturen auf der 7-Sphäre auf die folgenden Weise erhalten kann. Im $(n+1)$-dimensionalen komplexen Raum $\mathbb{C}^{n+1}$ mit den Koordinaten $z_0, \ldots, z_n$ betrachtet man die Hyperfläche V, die durch eine Gleichung der Form

$$z_0^{a_0} + \cdots + z_n^{a_n} = 0$$

gegeben wird. Unter der Voraussetzung $a_i \geq 2$ für $i = 0, \ldots, n$ hat V in 0 eine isolierte Singularität. Eine solche Singularität nennt man heutzutage eine Brieskorn-Pham-Singularität. Schneidet man V mit einer hinreichend kleinen Sphäre um den Nullpunkt, so erhält man eine $(2n-1)$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die der Umgebungsrand der Singularität genannt wird. Brieskorn konnte nun zeigen, dass alle differenzierbaren Strukturen auf der 7-Sphäre auf den Umgebungsrändern geeigneter Brieskorn-Pham-Singularitäten mit $n = 4$ realisiert werden. Damit war die Topologie von Singularitäten in den Blickpunkt von Mathematikern gerückt.

Die Topologie von isolierten Singularitäten ist auch der Gegenstand des vorliegenden Buches. Mittlerweile hat sich die Singularitätentheorie zu einem eigenständigen, sehr ausgedehnten Forschungsgebiet entwickelt. Selbst die Darstellung aller Ergebnisse zur Topologie von Singularitäten müsste den Rahmen eines Buches notgedrungen sprengen. Deswegen hat sich der Autor auf einige wenige ausgewählte Themen beschränkt. In acht Kapiteln werden acht verschiedene Themenbereiche behandelt. Dabei geht es in den ersten fünf Kapiteln um komplexe Singularitäten, in den restlichen drei um reelle Singularitäten. Die Auswahl erfolgt naturgemäß nach den Vorlieben des Autors. Zu fast allen Themenkreisen hat der Autor selbst Arbeiten beigesteuert. In den letzten vier Kapiteln werden im Wesentlichen Arbeiten des Verfassers, die teilweise mit Koautoren entstanden sind, dargestellt.

Das erste Kapitel enthält einen Abriss der klassischen Theorie. Dazu gehört vor allem der Faserungssatz von Milnor, das Hauptresultat des klassischen Buchs von Milnor „Singular points of complex hypersurfaces" (Ann. of Math. Studies, Princeton 1968). Dieser Faserungssatz, in seiner komplexen und reellen Form, zieht sich wie ein roter Faden durch das ganze Buch. Im ersten Kapitel werden auch die eingangs erwähnten klassischen Resultate von Brieskorn, Hirzebruch und Milnor dargestellt.

Im zweiten Kapitel geht es um die 3-dimensionalen Brieskornmannigfaltigkeiten. Dies sind die Umgebungsränder der zweidimensionalen Brieskorn-Pham-Singularitäten. In gewissen Spezialfällen hatte schon

Felix Klein im Jahre 1884 gesehen, dass die entsprechenden Gleichungen mit den endlichen Untergruppen von $\mathrm{SU}(2)$ in Verbindung stehen. Speziell für $(a_0, a_1, a_2) = (2, 3, 5)$ erhält man die Ikosaedergleichung, und die zugehörige Brieskornmannigfaltigkeit ist die Poincarésphäre. In diesem Kapitel wird ein weiteres Resultat von Milnor dargestellt. Milnor konnte zeigen, dass alle 3-dimensionalen Brieskornmannigfaltigkeiten mit Isometriegruppen von ebenen Geometrien in Zusammenhang stehen.

Das dritte Kapitel hat eine weitreichende Verallgemeinerung dieses Resultats zum Gegenstand, die auf I. Dolgachev, Hirzebruch und W. Neumann zurückgeht. Es wird eine vollständige Antwort auf die Frage gegeben, welche isolierten komplexen Flächensingularitäten einen Umgebungsrand besitzen, der von der Form G/Γ ist, wobei G eine 3-dimensionale Liegruppe und Γ eine diskrete Untergruppe von G ist.

Im vierten Kapitel sind Anwendungen des Satzes von Hirzebruch-Riemann-Roch und des Hirzebruch'schen Signatursatzes auf die Topologie von isolierten komplexen Flächensingularitäten dargestellt. Hier geht es um die Frage, inwieweit Invarianten der Milnorfaser einer Glättung durch die minimale Auflösung der Singularität bestimmt sind und wie sie sich aus der Auflösung berechnen lassen. Dies ist auch ein schönes Beispiel für das Zusammenspiel von Topologie und algebraischer Geometrie.

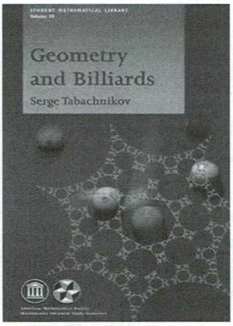
Das fünfte Kapitel behandelt die Geometrie und Topologie von Quadriken im n-dimensionalen komplexen projektiven Raum. Hier wird das Thema des zweiten Kapitels noch einmal aufgegriffen und ein zu dem Satz von Klein analoges Resultat in höherer Dimension für den Spezialfall einer Quadrik bewiesen. In diesem Kapitel werden auch zum ersten Mal reell-analytische Methoden verwendet.

In den letzten drei Kapiteln des Buches werden reell-analytische Singularitäten betrachtet. Im sechsten Kapitel geht es um das Wechselspiel von reell-analytischer und komplexer Geometrie. Es dient auch als Vorbereitung für die letzten beiden Kapitel, in denen reell-analytische Singularitäten betrachtet werden, die eine Milnorfaserung besitzen. Im siebten Kapitel werden solche Singularitäten konstruiert und ihre Topologie untersucht. Das letzte Kapitel behandelt schließlich reell zweidimensionale Beispiele.

Das Buch wendet sich vornehmlich an fortgeschrittene Studierende, Doktoranden und Mathematiker, die sich für Geometrie und Topologie interessieren. In der erste Hälfte des Buches werden besonders schöne Ergebnisse der Mathematik dargestellt, die auch für ein breites Publikum von Interesse sind. Es handelt sich um Resultate, die in der Literatur in zahlreichen Arbeiten verstreut sind und hier in einheitlicher und auch für den Nichtexperten verständlicher Form dargestellt werden. Die zweite Hälfte des Buches ist spezielleren Themen gewidmet. Das Buch hat eine ausführliche Einleitung und jedes Kapitel beginnt noch einmal mit einer Übersicht über die behandelten Themen. Es geht dem Verfasser darum, die Ideen hervorzuheben. Manchmal wird deshalb auf die technischen Einzelheiten verzichtet und kompliziertere Beweise sind schon einmal nur angedeutet. Aber immer findet sich dann ein Hinweis auf die entsprechende Literatur.

Insgesamt handelt es sich um ein Buch, dass man mit Genuss liest. Es hat den „Ferran Sunyer i Balaguer"-Preis 2005 erhalten und ist in der von Birkhäuser herausgebenen Reihe der mit diesem Preis gekrönten Bücher erschienen. Das Buch ist sehr empfehlenswert.

Hannover W. Ebeling



S. Tabachnikov
Geometry and Billiards

Providence, Am. Math. Soc., 2005, 176 S., \$ 28

Mathematische Billards sind dynamische Systeme, bei denen sich (im einfachsten Fall) ein Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^n$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bewegt und beim Auftreffen auf $x \in \partial\Omega$ das Vorzeichen der Normalkomponente x von $v \in T_x(\partial\Omega)$ geändert wird („Ausfallswinkel gleich Einfallswinkel"). Bis auf eine Ausnahmemenge sollte daher $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit sein.

Dynamische Fragen stehen in enger Beziehung zu geometrischen Eigenschaften der Bande $\partial\Omega$. Eine Vielzahl solcher Beziehungen werden im Buch von Serge Tabachnikov untersucht. Es ist als Begleitmaterial eines Kurses für fortgeschrittene Undergraduates an der Penn State University entstanden[1].

In der Theorie geodätischer Flüsse auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten sind Dynamik und Differentialgeometrie ähnlich eng miteinander verwoben. Vom didaktischen Standpunkt her haben Billards aber den Vorteil, dass elementare Vorkenntnisse ausreichen.

In der Einleitung wird das Ziel klar formuliert:

> "One takes a rapid route to the frontier of current research, deferring a more systematic and 'linear' study of foundations until later."

Um es kurz zu sagen: Das Buch löst dieses Versprechen vollständig ein. Es ist so elementar gehalten, dass es sich getrost am Strand lesen lässt (ich habe das ausprobiert). Gleichzeitig ist das Wechselspiel dynamischer und geometrischer Fragen sehr unterhaltsam. Etwa 100 Illustrationen, zahlreiche Beispiele und Übungen unterstützen das Verständnis.

Zum Inhalt: Im einleitenden Kapitel werden mathematische Billards physikalisch durch die Bewegung von Billardkugeln sowie durch an $\partial\Omega$ reflektierten Lichtstrahlen motiviert. Die geometrische Optik gibt Anlass zu einem Exkurs, indem die Finslergeometrie vorgestellt wird; das Reflektionsgesetz gibt Anlass zur Diskussion einfacher Variationsprobleme.

Kapitel 2 stellt mit *Quadrat* und *Kreisscheibe* die einfachsten Billardtische vor – und damit einhergehend die Ergodentheorie von Torustranslationen.

Die Parkettierung der Ebene durch das Quadrat ermöglicht eine einfache symbolische Dynamik in zwei Symbolen, und die Komplexitätsfunktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eines Orbits ist als die Anzahl $p(n)$ der Wörter der Länge n in seiner Codierung definiert. Es wird nun gezeigt, dass die für Billards mit irrationaler Richtung v, also nicht periodischer Codierung Letztere eine Sturmfolge ist ($p(n) = n + 1$), und dass diese Komplexität die minimal mögliche für nicht periodische Folgen ist.

Im Fall endlichen Horizonts kann die Dynamik durch Restriktion auf den Phasenraum über $\partial\Omega$ diskretisiert werden. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ erhält man eine flächenerhaltende Abbildung des Zylinders $\partial\Omega \times [-1, 1]$ (Kapitel 3). Die Länge der Bande $\partial\Omega$ ist dann nach der Crofton-Formel der *Integralgeometrie* gleich einem Integral über die Zahl der Schnittpunkte von Geraden mit dieser Kurve.

Diese Darstellung wird anschließend zu einem Beweis der isoperimetrischen Unglei-

[1] Eine Übersicht über die sehr erfolgreichen REU- und MASS-Programme ist unter `www.math.psu.edu/mass` zu finden.

chung verwendet. Tabachnikov schließt einen von ihm gefundenen Beweis eines Spezialfalles der so genannten DNA-Ungleichung an. Diese besagt für im konvexen Gebiet Ω enthaltene nicht notwendig doppelpunktfreie Kurven, dass deren mittlere absolute Krümmung nicht kleiner als die von $\partial\Omega$ ist.

In Kapitel 4 wird gezeigt, dass auch Billards in *Quadriken* integrable Hamilton'sche Systeme sind. Hilfsmittel des Beweises ist die polare Dualität sternförmiger Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ und der Menge ihrer Tangentialebenen, aufgefasst als Hyperfläche im Dualraum.

In diesem Fall, aber auch allgemein für strikt konvexe, glatt berandete Gebiete Ω, treten *Kaustiken* auf, also Hyperflächen, zu denen eine tangentiale Trajektorie nach jeder Reflektion an $\partial\Omega$ wieder tangential ist. Die Untersuchung solcher Kaustiken führt in Kapitel 5 zur Entwicklung der Differentialgeometrie von Involute und Evolute.

Exkurse zur Theorie der Regenbögen, zum Vier-Scheitelsatz für Kurven und zur reellen projektiven Ebene schließen sich zwanglos an.

Der Beweis des Starrheitssatzes von Mischa Bialy („nur für die Kreisscheiben befinden sich fast alle Punkte auf invarianten Kreislinien der Billardabbildung") könnte aus dem *Buch der Beweise* stammen. Er verkettet die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel, Cauchy-Schwarz und isoperimetrische Ungleichung.

Als nächstes Thema nimmt sich Tabachnikov *periodische Orbits* vor, deren Existenz mit globalen Methoden bewiesen wird. Der Satz von Birkhoff bestätigt mit einem Sattelpunktargument für strikt konvexe, glatt berandete Billards in der Ebene die Existenz zweier n-periodischer Trajektorien mit zu n teilerfremder Rotationszahl $\rho \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Ein zweiter Beweis erfolgt unter Verwendung des letzten geometrischen Theorems von Poincaré. Zur Motivation analoger Resultate in höheren Dimensionen werden Grundideen der Morse-Theorie skizziert.

Polygonale Billards sind das Thema von Kapitel 7. Dass selbst für Dreiecke die Existenz periodischer Orbits nicht bekannt ist, zeigt beispielhaft, wie klein die Inseln unseren mathematischen Wissens sind.

Durch Spiegelung erhält man aus polygonalen Billards (spezielle) Polyederflächen. Für Letztere wird im generischen Fall die Nichtexistenz doppelpunktfreier geschlossener Geodäten gezeigt (im Gegensatz zum Fall glatter Flächen). Dazu wird eine diskrete Variante des Satzes von Gauss-Bonnet bewiesen.

Kapitel 8 über *chaotische Billards* beschreibt die Technik strikt invarianter Kegelfelder und die auf Wojtkowski zurückgehenden Prinzipien für die Konstruktion hyperbolischer Billards. Die erheblichen analytischen Probleme, die beim Nachweis der Ergodizität entstehen, werden nur kurz erwähnt[2].

Den Abschluss bilden *duale Billards*, bei denen die diskrete Bewegung im Außengebiet $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ durch Spiegelung am Tangentialpunkt einer Gerade durch x mit $\partial\Omega$ definiert ist. Seit Jürgen Moser diese dynamischen Systeme in seinem Buch[3] popularisierte, sind viele Resultate erzielt worden, von denen einige kurz vorgestellt werden.

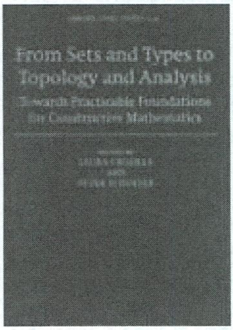
Insgesamt also: ein sehr inhaltsreiches, aber gleichzeitig elementares Buch in nicht bourbakistischem Stil. Ich meine, dass es hilfreich sein kann, um Studierende beispielhaft an Fragestellungen und Techniken mathematischer Forschung heranzuführen.

[2] Zu diesem Thema sind aber z.B. unter `www.math.uab.edu/chernov` Aufsätze von Nikolai Chernov erhältlich.

[3] Stable and random motions in dynamical systems. Annals of Mathematic Studies. No. 77. Princeton 1973

Auf der Homepage des Autors (`www.math.psu.edu/tabachni`) kann man sich ein eigenes Bild von den Qualitäten des Buches machen und ebenso eine mathematisch vollständigere Darstellung der Billardtheorie finden.

Erlangen A. Knauf



L. Crosilla, P. Schuster
From Sets and Types to Topology and Analysis Towards Practicable Foundations for Constructive Mathematics
Oxford Logic Guides 48

Oxford, Clarendon Press, 2005, 350 St., £ 70,–

Der Band ist entstanden aus einer Konferenz mit demselben Titel, die 2003 in Venedig stattfand. Die besondere Absicht war in beiden Fällen, eine Brücke zu schlagen zwischen der Praxis der konstruktiven Mathematik und den verschiedenen formalen Systemen, die zu ihrer Begründung vorgeschlagen wurden. Die Spannweite der behandelten Gebiete wird am besten durch die Liste der enthaltenen Arbeiten beschrieben:

L.Crosilla and P. Schuster, Introduction

Part I Foundations

M. Rathjen, Generalized Inductive Definition in Constructive Set Theory

A. Simpson, Constructive Set Theories and their Category-Theoretic Models

N. Gambino, Presheaf Models for Constructive Set Theory

T. Streicher, Universes in Toposes

M.E. Maietti and G. Sambin, Towards a Minimalist Foundation for Constructive Mathematics

P. Hancock and A. Setzer, Interactive Programs and Weakly Final Coalgebras in Dependent Type Theory

U. Berger and M. Seisenberger, Applications of Inductive Definitions and Choice Principles to Program Synthesis

S. Negri and J. v. Plato, The Duality of Classical and Constructive Notions and Proofs

Part II Practice

E. Palmgren, Continuity on the Real Line and in Formal Spaces

P. Aczel and C. Fox, Separation Principles in Constructive Topology

A. Bucalo and G. Rosolini, Spaces as Comonoids

M.E. Maietti, Predicative Exponentiation of Locally Compact Formal Topologies over Inductively Generated Topologies

S. Vickers, Some Constructive Roads to Tychonoff

T. Coquand, H. Lombardi and M.-F. Roy, An Elementary Characterization of Krull Dimension

H. Ishihara, Constructive Reverse Mathematics: Compactness Properties

B. Spitters, Approximating Integrable Sets by Compacts Constructively

H. Takamura, An Introduction to the Theory of C^*-Algebras in Constructive Mathematics

D. Bridges and R. Havea, Approximation to the Numerical Range of an Element of a Banach Algebra

D. Bridges and L. Vita, The Constructive Uniqueness of the Locally Convex Topology on $\mathbb{R}^n$

V. Brattka, Computability on Non-Separable Banach Spaces and Landau's Theorem

Der Band beginnt mit einer sehr lesenswerten Einführung der Herausgeber, in der versucht wird, die große Vielfalt der Beiträge unter gemeinsamen Gesichtspunkten zu diskutieren.

In der konstruktiven Mathematik besteht eine besondere Notwendigkeit, Grundlagenfragen und konkrete Entwicklungen gleichzeitig im Blick zu haben. Dies erklärt sich durch ihre Sensitivität für verschiedene (klassisch äquivalente) Formulierungen von zentralen Begriffen, etwa dem der Kompaktheit. Es kommt auf genaue Formulierungen an, und dafür ist es wichtig, das zugrundeliegende formale System zu kennen.

Unter dem Einfluss des 1967 erschienenen Buchs „Constructive Analysis" von E. Bishop wurden in der 70er Jahren verschiedene formale Systeme vorgeschlagen, die zur Behandlung der konstruktiven Mathematik in Bishops Sinn geeignet sind. Am meisten verbreitet sind Fefermans explizite Mathematik, Martin-Löfs Typentheorie und intuitionistische (IZF) und konstruktive (CZF) Systeme der Mengenlehre, die auf Friedman, Myhill und Aczel zurückgehen. Von der Martin-Löf'schen Typentheorie gibt es zahlreiche Versionen: extensional oder intensional, mit oder ohne Universen und induktiv definierten Typen. Eine Variante ist der „calculus of inductive constructions", in dem auch imprädikative Definitionen zugelassen sind.

Generell ist anzumerken, dass die verwendeten formalen Hilfsmittel möglichst allgemein und primitiv sein sollten. Bishop empfiehlt in einer Arbeit von 1970, mit minimalen Systemen zu beginnen und sie erst dann zu erweitern, wenn sich eine echte mathematische Notwendigkeit dafür ergibt. Wichtig in diesem Zusammenhang ist, dass für die meisten mathematischen Begriffe keine wesentlich imprädikativen Konstruktionen benötigt werden: dies ergibt sich aus Untersuchungen von Feferman und auch von Friedman und Simpson im Kontext der (klassischen) „reverse mathematics".

Auf einige besonders interessante Arbeiten sei noch extra hingewiesen; die Auswahl ist sicherlich durch den Geschmack des Referenten bestimmt.

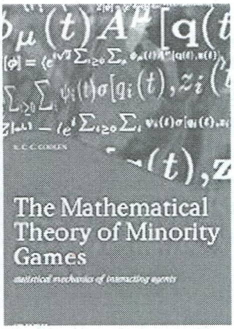
Hancock und Setzer betrachten eine Erweiterung der Martin-Löf'schen Typentheorie durch koinduktive Datentypen, und verwenden sie für die Entwicklung von interaktiven Programmen. Koinduktive Datentypen sind durch dieselben Konstruktoren wie induktive definiert, ihre Elemente sind jedoch als unendliche Bäume anzusehen, bei denen jeder Knoten durch einen Konstruktor und Zeiger auf die Vorgängerknoten beschriftet ist. Die Autoren führen den Begriff einer schwachen finalen Koalgebra für polynomiale Funktoren ein, und diskutieren die Beziehungen zur „bewachten" Induktion.

Berger und Seisenberger untersuchen in ihrer Arbeit den wichtigen Begriff der Realisierbarkeit, mit dem das für die konstruktive Mathematik zentrale Konzept des rechnerischen Gehalts eines Beweises präzisiert wird. Durch eine verfeinerte Form der Gödel'schen Funktionalinterpretation lässt sich das Konzept der Realisierbarkeit auch für Beweise von schwachen (oder „klassischen") Existenzsätzen anwenden. Dies wird am Beispiel von Higmans Lemma demonstriert, wobei im Kontext der Funktionalinterpretation das Axiom der abhängigen Auswahl einer besonderen Behandlung bedarf.

Der Beitrag von Coquand, Lombardi und Roy repräsentiert eine von den Autoren intensiv verfolgte neue Richtung in der konstruktiven Algebra, die enge Beziehungen zur formalen Topologie hat. Ein wichtiger Aspekt ihres Ansatzes ist die Absicht, Sätze konstruktiv auf demselben (niedrigen) Typenniveau zu beweisen auf dem sie formuliert sind. Aus diesem Grund müssen sie die Komplexität einiger Begriffe reduzieren, etwa den der Krull Dimension eines kommutativen Ringes. Die Quantifikation über beliebige Primideale wird ersetzt durch eine induktive Charakterisierung der Krull Dimension.

Der vorliegende Band gibt eine hervorragende Übersicht über den aktuellen Stand der Forschung in Theorie und Praxis der konstruktiven Mathematik. Er sollte in keiner mathematischen Bibliothek fehlen.

München H. Schwichtenberg



A. C. C. Coolen
The Mathematical Theory of Minority Games
Statistical Mechanics of Interacting Agents

Oxford University Press, 2005, 324 S., £ 62,–

Der Grundgedanke der statistischen Mechanik, aus einer Anzahl von Regeln für das Verhalten eines Systems auf der mikroskopischen, d.h. molekularen Ebene seine makroskopischen Gesetzmäßigkeiten abzuleiten, hat sich nicht nur in der Physik bewährt, wo es beispielsweise gelang grundlegende thermodynamische oder magnetische Eigenschaften von Systemen an einfachen Modellen nachzuvollziehen. Oftmals lassen sich dieselben oder sehr ähnliche Modelle auch verwenden, um Fragestellungen, beispielsweise aus den Wirtschaftswissenschaften oder der Soziologie zu untersuchen. So gab beispielsweise Föllmer schon 1973 in einer grundlegenden Arbeit eine ökonomische Interpretation des Ising-Modells aus der Theorie des Ferromagnetismus.

Das vorliegende Buch betrachtet ein etwas komplexeres Szenario, die sogenannten Minority Games, Minoritätenspiele, die ursprünglich entwickelt wurden, um kollektive Phänomene und Fluktuationen in finanziellen Märkten zu studieren. Tatsächlich lassen sich aber durch das Minoritätenspiel eine ganze Reihe von Situationen beschreiben, in denen Agenten in eigennütziger Weise handeln und versuchen, durch Vorhersagen der Entscheidungen der anderen Agenten Nutzen zu erzielen. Hierbei sind die Spielregeln so, dass diejenigen einen Gewinn erzielen, die sich mit ihrer (binären) Entscheidung in der Minderheit befinden, also beispielsweise diejenigen, die eine Aktie verkaufen möchten, wenn eine Mehrheit der anderen Marktteilnehmer sie kaufen will.

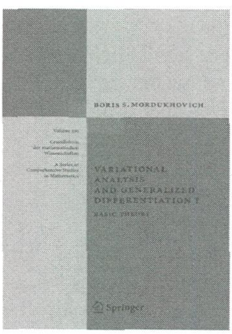
Um ein Lernverhalten der Agenten modellieren zu können umfasst die mathematische Formulierung daher neben den Aktionen der einzelnen Agenten auch eine (öffentlich zugängliche) Information über die historische Marktentwicklung und Strategien der einzelnen Agenten. Das entsprechende Modell eines Minoritätenspiels bietet in der Tat eine Reihe überraschender Eigenschaften. So zeigen beispielsweise Simulationen, dass das Verhalten der Agenten von der Länge ihres „Gedächtnisses“ abhängt, dass sie sich zum einen signifikant schlechter verhalten, als bei rein zufälliger Entscheidung, wenn die Historie über das Marktverhalten, auf die sie zugreifen können, zu kurz ist. Die gleichen Simulationen zeigen aber auch, dass die Qualität der Entscheidung über die einer rein zufälligen Entscheidung steigt, wenn man ein längeres Gedächtnis der Marktteilnehmer annimmt und dass schließlich mit extrem langem Gedächtnis wieder die Qualität einer rein zufälligen Entscheidung erreicht wird. Interessant ist auch, dass sich das Modell kaum anders verhält, wenn man das echte Gedächtnis durch ein künstliches Gedächtnis (fake memory) ersetzt.

Der vorliegende Leitfaden gibt eine Übersicht über verschiedene Spielarten des Minoritätenspiels und ihre mathematische Behandlung. Hierbei ist allerdings „mathematisch“ im Sinne der theoretischen Physik zu verstehen:

Nicht nur die Modelle erinnern an die Mathematik und Physik ungeordneter Systeme, auch die Methoden, allen voran der notorische, nicht-rigorose Replikaansatz, bei dem die Zustandssumme eines Systems zunächst für n Duplikate des Systems errechnet wird und dann der Limes $n \to 0$ genommen werden muss, entstammen diesem Bereich.

Dennoch halte ich A. C. C. Coolens Buch für eine wertvolle Lektüre, die Forschern ebenso wie ambitionierten Studierenden der theoretischen Physik, angewandten Mathematik oder Ökonomie, die Möglichkeit bietet, einen Überblick über das stets noch expandierende Feld der Minoritätenspiele zu gewinnen, ohne sie dabei in den Dschungel von Forschungsarbeiten oder eines enzyklopädischen Werkes zu schicken. Das Werk bietet dabei alle Vorteile eines Leitfadens: eine konsistente Notation ebenso wie einen didaktischen Aufbau, der die Modelle eher in der Reihenfolge ihres Schwierigkeitsgrades als in chronologischer Ordnung einführt und bewusst auf eine vollständige Behandlung aller möglichen Varianten verzichtet. Es sei daher jedem ans Herz gelegt, der sich für ein Gebiet interessiert, das Methoden der Physik mit Fragestellungen der Ökonomie verknüpft und auf der mathematischen Seite noch reichlich Forschungspotenzial bietet.

Münster M. Löwe



B. S. Mordukhovich
Variational Analysis and Generalized Differentiation
I Basic Theory
II Applications
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

Berlin u.a., Springer, 2006, 450 u. 400 S., je € 79,95

Viele Probleme aus der Optimierung, der optimalen Steuerung oder der Ökonomie führen auf nichtdifferenzierbare Aufgabenstellungen. Dazu gehören nicht selten auch solche Probleme, denen man die Nichtglattheit zunächst nicht ansieht, da sie mit Hilfe von differenzierbaren Daten definiert werden. Eine adäquate Behandlung derartiger Probleme gelingt dann nur mit den Methoden der nichtglatten Analysis. Hierfür gibt es eine ganze Reihe von verschiedenen Ansätzen. Die bekanntesten Vertreter sind vermutlich:

- das konvexe Subdifferential und der konvexe Normalenkegel aus der konvexen Analysis, vergleiche [4];
- das Clarke-Subdifferential und der Clarke'sche Normalenkegel bei lokal Lipschitz-stetigen Daten, siehe [2].

Die Begriffe von Clarke können dabei als Verallgemeinerungen der zugehörigen konvexen Gegenstücke angesehen werden, da sie im konvexen Fall mit diesen übereinstimmen. Tatsächlich waren und sind die Begriffe und Hilfsmittel von Clarke von ungeheurem Nutzen und im gewissen Sinne nicht weiter verbesserbar, wenn man auf die Gültigkeit einiger Eigenschaften und die Konvexität des zugehörigen Normalenkegels sowie des entsprechenden Subdifferentials nicht verzichten will.

In verschiedenen Anwendungen stellte sich allerdings immer wieder heraus, dass der Normalenkegel und das Subdifferential von Clarke zu groß sind und nicht selten wesentlich stärkere Aussagen erzielt werden können, wenn man statt des Clarke'schen Kalküls den in der Literatur oft als Mordukhovich-Normalenkegel bezeichneten Kegel bzw. das zugehörige Mordukhovich-Subdifferential verwendet. Hierbei handelt es sich um im Allgemeinen nichtkonvexe Objekte, für die dennoch zahlreiche Rechenregeln gelten und die im Mittelpunkt des vorliegenden Werkes stehen.

Das Buch ist dabei in zwei Bände gegliedert. Sowohl der erste als auch der zweite Band enthalten vier Kapitel, wobei sich der erste Band mehr mit den theoretischen Grundlagen und der zweite Band mit den Anwendungen dieser Theorie auf verschiedene Problemklassen beschäftigt.

Das Kapitel 1 führt zunächst die zentralen Begriffe ein, und zwar den zuvor schon genannten Mordukhovich-Normalenkegel (hier schlicht als Normalenkegel bezeichnet), das (Mordukhovich-)Subdifferential und die (Mordukhovich-)Coderivative für mengenwertige Abbildungen. Dies sind die wesentlichen Begriffe, auf die alle nachfolgenden Kapitel aufbauen. Sämtliche Definitionen und Eigenschaften werden dabei gleich in allgemeinen Banach-Räumen angegeben.

Das Kapitel 2 beschäftigt sich mit verschiedenen Extremalprinzipien und ihren Zusammenhang mit bekannten Variationsprinzipien (etwa dem Variationsprinzip von Ekeland). Die Resultate werden zunächst in beliebigen Banach-Räumen formuliert, teilweise auf endlich-dimensionale Räume spezialisiert und führen insbesondere zu Charakterisierungen von Asplund-Räumen, die auch im nachfolgenden Kapitel 3 benötigt werden.

Dieses Kapitel 3 enthält diverse Rechenregeln für den praktischen Umgang mit Normalenkegeln, Subdifferentialen und Coderivatives. Sie sind in Asplund-Räumen formuliert und gehen weit über die schon im Kapitel 1 vorgestellten elementaren Regeln in Banach-Räumen hinaus.

Mit den Kapiteln 1–3 stehen die wesentlichen theoretischen Grundlagen bereit. Die restlichen Kapitel enthalten Anwendungen dieser Theorie auf verschiedene Problemklassen. Das formal noch zum Theorie-Band 1 gehörende Kapitel 4 etwa benutzt die bisher erzielten Resultate, um Sensitivitätsanalysen für gestörte Probleme durchzuführen, wie sie insbesondere in der Optimierung von großem Nutzen sind.

Der zweite Band behandelt im Kapitel 5 zunächst diverse Optimalitätskriterien für restringierte Optimierungsaufgaben und verschiedene Gleichgewichtsprobleme. Dabei werden auch speziell strukturierte Optimierungsprobleme behandelt, so etwa die MPECs (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints) sowie die EPECs (Equilibrium Programs with Equilibrium Constraints). Gerade die EPECs sind eine Aufgabenstellung, in der sich die internationale Forschung momentan bestenfalls im Anfangsstadium befindet.

Die beiden Kapitel 6 und 7 sind dann der optimalen Steuerung gewidmet, einem Thema, das historisch für die Entwicklung der nichtglatten Analysis wohl die herausragende Rolle gespielt hat und immer noch spielt. Im Kapitel 6 stehen hier insbesondere Optimalitätsbedingungen (wie etwa das Maximumprinzip) bei Problemen mit ODE-Restriktionen im Vordergrund, während im Kapitel 7 auch PDEs auftreten.

Im abschließenden Kapitel 8 stehen verschiedene Anwendungen der entwickelten Theorie auf einige ökonomische Modelle im Mittelpunkt.

Jedes Kapitel wird außerdem durch einen Abschnitt mit Kommentaren ergänzt. Diese umfassen im Allgemeinen etwa 15–20 Seiten, im Falle des ersten Kapitels sind es gar fast 40 (!) Seiten. Diese sind für den Leser außerordentlich nützlich, enthalten sie neben vielen historischen Kommentaren insbesondere auch umfangreiche Verweise auf die entsprechende Originalliteratur (das Buch enthält knapp 1400 Referenzen) sowie eine Einordnung der jeweiligen Resultate in den Forschungszusammenhang. Dabei wird auch auf die historisch verschiedenen Entwicklungen in Ost und West eingegangen, da diese beiden Teile der Welt bis zur Wende 1989/1990 auch wissenschaftlich getrennt waren.

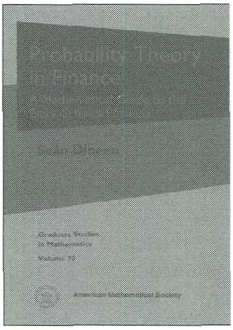
Insgesamt enthält das Buch eine Fülle von Material, der allergrößte Teil hiervon mit dem vorliegenden Werk erstmals in Form einer Monographie. Nicht selten werden auch neueste Forschungsergebnisse mit eingebunden, zum Teil sind die Resultate wohl noch nirgends publiziert. Das Buch ist auf dem Markt daher praktisch konkurrenzlos. Lediglich Loewen [3], Rockafellar und Wets [5] sowie Borwein und Zhu [1] behandeln zum Teil ein ähnliches Themengebiet. Sie beschränken sich hierbei aber auf den endlichdimensionalen Fall (insbesondere [5]) bzw. haben eine eher andere Ausrichtung und sind weitaus weniger umfangreich (im Falle von [3,1]), in [1] wird nicht selten sogar auf die Beweise verzichtet, während Mordukhovich alle Beweise ausführt.

Das Buch ist sicherlich nicht für den „Anfänger“ geschrieben. Solide (funktional-) analytische Grundkenntnisse werden vorausgesetzt. Für den zweiten Band sind außerdem eine gewisse Vertrautheit mit den Grundlagen der Optimierung und optimalen Steuerung recht nützlich. Wer diese Voraussetzungen mitbringt, wird das vorliegende Buch mit großem Gewinn lesen und auf diese Weise in ein sehr aktuelles und forschungsintensives Gebiet der Mathematik eingeführt und auf den neuesten Stand gebracht. Das Buch erscheint nicht umsonst in der renommierten Springer-Reihe „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“ und dürfte für viele Jahre, vielleicht sogar Jahrzehnte, zu einem Standard- und Referenzwerk im Bereich der nichtglatten Analysis und ihren Anwendungen werden.

Literatur

[1] J.M. Borwein und Q.J. Zhu: *Techniques of Variational Analysis.* Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer Science+Business Media, New York, NY, 2005.
[2] F. H. Clarke: *Optimization and Nonsmooth Analysis.* John Wiley & Sons, New York, NY, 1983.
[3] Ph. D. Loewen: *Optimal Control via Nonsmooth Analysis.* CRM Proceedings & Lecture Notes 2, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
[4] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
[5] R. T. Rockafellar und R.J.-B. Wets: *Variational Analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 317, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

Würzburg Ch. Kanzow



S. Dineen
Probability Theory in Finance
A Mathematical Guide to the Black-Scholes Formula

Providence, Am. Math. Soc., 2006, 294 S., $ 55,–

Die Anzahl an mittlerweile veröffentlichten Büchern, die in die moderne Finanzmathematik oder aber in die ihr zugrundeliegenden stochastischen Methoden einführen (sollen), ist in den vergangenen Jahren stark angewachsen. Das vorliegende Buch von Seán Dineen, obwohl in der AMS-Serie *Graduate Studies in Mathematics* erschienen, ist ein Versuch, rigorose mathematische Grundlagen mit Intuition zu verknüpfen, sie teilweise auch durch diese zu ersetzen, um so auch gerade Studenten aus dem Bereich der Ökonomie eine für sie erreichbare mathematische Basis zum Verständnis der modernen Finanzmathematik zu geben. Hierzu setzt der Autor lediglich einen Grundlagenkurs in Analysis voraus. Folglich ist eine große Arbeit zu leisten, da keinerlei Grundlagen der Stochastik als bekannt angenommen werden dürfen.

Das Buch besteht aus einem Vorwort gefolgt von den Kapiteln

Chapter 1: Money and Markets
Chapter 2: Fair Games
Chapter 3: Set Theory
Chapter 4: Measurable Functions
Chapter 5: Probability Spaces
Chapter 6: Expected Values
Chapter 7: Continuity and Integrability
Chapter 8: Conditional Expectation
Chapter 9: Martingales

Chapter 10: The Black-Scholes Formula
Chapter 11: Stochastic Integration

sowie einer großen Sammlung von Lösungen zu in den Kapiteln gestellten Übungsaufgaben, einer Bibliographie und einem Index.

Im ersten Kapitel werden eine sehr knappe Einführung in die Zinsrechnung gegeben, die Exponentialfunktion und der Hauptsatz der Integralrechnung (!) eingeführt sowie einige Bemerkungen zum Handel an Finanzmärkten gemacht. Im zweiten Kapitel werden motivierende Anmerkungen zu fairen Spielen gemacht, die über Erwartungswerte erklärt werden, ohne dass der Begriff der Erwartung überhaupt vorher definiert wurde. Das dritte Kapitel beinhaltet mengentheoretische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mengen, σ-Algebra, Partition, Filtration) sowie einige eher philosophische Anmerkungen zum Umgang mit abstrakter Mathematik und mit dem Unendlichen. Die Borel-σ-Algebra, messbare Funktionen und (punktweise) Konvergenz sind die Themen des vierten Kapitels, während sich das fünfte mit dem Einführen der Begriffe der Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit und Zufallsvariablen beschäftigt. Hier wird auch bereits das Einperioden-Binomial-Modell als einfachstes Beispiel eines Finanzmarkts, in dem ein Optionsbewertungsproblem gelöst werden kann, behandelt. Die übliche Definition des Erwartungswerts über den Weg von den einfachen über die positiven zu integrierbaren Zufallsvariablen samt der zugehörigen Standardresultate wie die Sätze über majorisierte und über monotone Konvergenz stellen den Inhalt des sechsten Kapitels dar. Unabhängige Zufallsvariablen, bedingte Erwartungen sowie erste Bemerkungen zum Hedgen von Call-Optionen werden in den nächsten beiden Kapiteln behandelt. Grundlagen aus der Theorie der Martingale bilden das neunte Kapitel. Hierbei werden erstaunlicherweise die Begriffe Sub- und Supermartingal nicht erwähnt und der Begriff *Continuous martingale* fälschlicherweise für Martingale in stetiger Zeit verwendet. In Kapitel 10 schließlich wird die Black-Scholes-Formel als zentrales, motivierendes Beispiel für finanzmathematische Anwendungen behandelt. Neben einer Berechnung des den Optionspreis bestimmenden Erwartungswerts beinhaltet es auch den Versuch einer Motivation der Brown'schen Bewegung als Basis der Zufallsmodellierung im Black-Scholes-Modell über Grenzbetrachtungen. Im abschließenden elften Kapitel wird eine Einführung in die stochastische Integration gegeben sowie ihre nochmalige Anwendung auf das Hedgen einer Option im Black-Scholes-Modell vorgestellt.

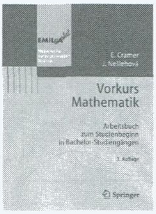
Der Autor verfolgt mit dem Anspruch einer rigorosen mathematischen Einführung bei gleichzeitiger Annahme minimaler Vorkenntnisse seiner Hörer ein hohes Ziel. Allerdings leidet das Buch hierunter auch deutlich. Es fehlt ihm eine gewisse Ausgewogenheit hinsichtlich der Schwierigkeit der einzelnen Abschnitte, die auch zusätzlich nicht alle eine Länge gemäß ihrer Bedeutung besitzen. So wird der Leser in einigen Abschnitten sehr detailliert in technischen Grundlagen eingeführt (die eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnt erst auf Seite 74!), während ihm in manch anderen Teilen ein recht forsches Vorgehen zugemutet wird. So wird der Themenkomplex *Central limit theorem* auf knapp einer Seite abgehandelt. Nahezu unglaublich erscheint es allerdings, dass das starke Gesetz der großen Zahlen, welches gerade die für die Anwendung in der Optionsbewertung so wichtige Monte-Carlo-Methode motiviert, in einem Buch zum Thema *Probability Theory* überhaupt nicht erwähnt wird (was übrigens auch für die Monte-Carlo-Methode gilt)!

Generell besitzt das Buch neben der Präsentation einiger interessanter historischer Zusammenhänge und einiger schöner Übungsaufgaben und Beispiele auch Schwächen, die erkennen lassen, dass weder die Wahrscheinlichkeitstheorie noch ihre Anwendung in der modernen Finanzmathematik die eigentlichen Forschungsgebiete des Autors sind. So wird der moderne Duplikationsansatz der Optionsbewertung nicht erwähnt, sondern die Black-Scholes-Formel über einen Grenzprozess aus zeitdiskreten Modellen hergeleitet, bei denen nicht unbedingt ersichtlich ist, dass der entstehende Preis wirklich keine Arbitragemöglichkeit zulässt. Auch ein Satz wie *It is generally accepted that most share prices at any fixed future time are lognormally distributed* (S. 158) ignoriert einen Großteil der empirischen Erkenntnisse und der finanzmathematischen Forschung der letzten 15 Jahre. Des weiteren tragen unglückliche Bezeichnungen wie z.B. die Verwendung von *Continuous martingales* zu Inkonsistenzen mit der Standardliteratur bei, die vom Autor auch weitgehend ignoriert wurde.

Im wesentlichen kann das Buch nur als Ergänzung zu einführenden Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie empfohlen werden. Der Einsteiger in die Gebiete der Finanzmathematik und der Wahrscheinlichkeitstheorie sollte aufgrund der Unvollständigkeiten und auch des fehlenden Bezugs zur Anwendung für Einführung auf die Standardliteratur zurück greifen.

Kaiserslautern R. Korn

Springer springer.de



Vorkurs Mathematik

Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen

E. Cramer, RWTH Aachen; **J. Nešlehová**, ETH Zürich

► Übersichtliche und leicht verständliche Darstellung des in Bachelor-Studiengängen benötigten mathematischen Schulwissens

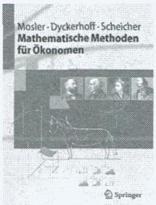
3., verb. Aufl. 2008. XII, 443 S. (EMIL@A-stat) Brosch.
ISBN 978-3-540-78180-6 ► **€ (D) 27,95 | € (A) 28,73 | *sFr 43,50**

Programmieren mit R

U. Ligges, Universität Dortmund

► Anpassung an die Neuerungen und Änderungen der R Version 2.7.1 (von Version R-1.9.x bzw. 2.3.x in den Vorauflagen)
► Änderungen / Neuerungen in Grafik, Paketentwicklung, Debugging

3., überarb. u. erweiterte Aufl. 2008. XII, 251 S. 19 Abb. (Statistik und ihre Anwendungen) Brosch.
ISBN 978-3-540-79997-9 ► **€ (D) 29,95 | € (A) 30,80 | *sFr 46,50**



Mathematische Methoden für Ökonomen

K. Mosler, R. Dyckerhoff, C. Scheicher, Universität zu Köln

► Geeignet für Bachelor- und Masterstudiengänge
► Übersichtliche Darstellung durch farbliche Hervorhebungen

2009. XII, 437 S. (Springer-Lehrbuch) Brosch.
ISBN 978-3-540-85165-3 ► **€ (D) 24,95 | € (A) 25,65 | *sFr 39,00**

Deskriptive Statistik

Eine Einführung in Methoden und Anwendungen mit R und SPSS

H. Toutenburg, C. Heumann, LMU München

► Neu: Einsatz von R ► Effektive Lernhilfe für Einsteiger in die statistische Datenanalyse

6., aktualisierte u. erw. Aufl. 2008. XII, 392 S. (Springer-Lehrbuch) Brosch.
ISBN 978-3-540-77787-8 ► **€ (D) 27,95 | € (A) 28,73 | *sFr 43,50**

Bei Fragen oder Bestellung wenden Sie sich bitte an ► Springer Customer Service Center GmbH, Haberstr. 7, 69126 Heidelberg
► **Telefon:** +49 (0) 6221-345-4301 ► **Fax:** +49 (0) 6221-345-4229 ► **Email:** orders-hd-individuals@springer.com
► € (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt; € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt. Die mit * gekennzeichneten Preise für Bücher sind unverbindliche Preisempfehlungen und enthalten die landesübliche MwSt. ► Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten.

014021x

Springer springer.de

Aktuelles der Mathematik

Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur

B. Bergmann, **M. Epple**, Universität Frankfurt (Hrsg.)

Der Band dokumentiert eine Wanderausstellung, die im Rahmen des Jahres der Mathematik 2008 in sieben deutschen Städten gezeigt wird. Die Ausstellung führt die Tätigkeit jüdischer Mathematiker in Deutschland von der rechtlichen und politischen Gleichstellung jüdischer Bürger im 19. Jahrhundert bis zur Verfolgung und Vertreibung im Nationalsozialismus vor Augen. Sie stellt dar, wie im deutschen Kaiserreich und in der Weimarer Republik jüdische Mathematiker in allen Bereichen der mathematischen Kultur zunehmend eine tragende Rolle spielten, und sie erinnert an Emigration, Flucht und Ermordung nach 1933.
Die Ausstellung beruht auf bisher unveröffentlichtem Material und neuer historischer Forschung.

2008. Etwa 245 S.Geb.
ISBN 978-3-540-69250-8
► **€ (D) 39,95 | € (A) 41,07 | *sFr 62,00**

Kombinatorische Optimierung

Theorie und Algorithmen

B. Korte, **J. Vygen**, Universität Bonn, Deutschland

Dieses umfassende Lehrbuch ist aus verschiedenen Vorlesungen über kombinatorische Optimierung und Spezialvorlesungen für Fortgeschrittene hervorgegangen. Das Buch enthält vornehmlich theoretische Resultate und detaillierte Algorithmen mit beweisbar guten Laufzeiten und Ergebnissen, aber keine Heuristiken. Es werden vollständige Beweise, auch für viele tiefe und neue Resultate gegeben, von denen einige bisher in der Lehrbuchliteratur noch nicht erschienen sind.

2008. XX, 675 S. 77 Abb. Brosch.
ISBN 978-3-540-76918-7
► **€ (D) 39,95 | € (A) 41,07 | *sFr 62,00**

Produktionsfaktor Mathematik

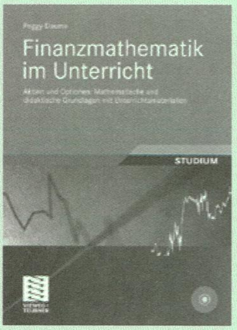
M. Grötschel, ZIB Berlin; **K. Lucas**, **V. Mehrmann**, TU Berlin (Hrsg.)

Mathematik als Produktionsfaktor und Innovationsverstärker? Wer wissen und verstehen will, warum die Mathematik immer stärker zur Produktentwicklung und Produktionssicherheit, zur Wertschöpfung und Ressourcenschonung beiträgt, dem wird dieses Buch eine wahre Fundgrube sein.

2009. Etwa 490 S. Brosch.
ISBN 978-3-540-89434-6
► **€ (D) 29,95 | € (A) 30,80 | *sFr 46,50**

WWW.VIEWEGTEUBNER.DE

Finanzmathematik - eine neue Option für den Mathematikunterricht



Peggy Daume

Finanzmathematik im Unterricht

Aktien und Optionen: Mathematische und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien

2009. mit CD (Arbeitsmaterialien mit Lösungen). XIV, 268 S. mit 66 Abb., davon 3 in Farbe u. 36 Tab. Br.
EUR 24,90
ISBN 978-3-8348-0628-4

Der Ruf nach einer stärkeren Verankerung von Anwendungsbezügen aus der Finanzwelt im Mathematikunterricht ist zu Recht immer lauter geworden. Dieser Forderung kann man nur dann nachhaltig und erfolgreich gerecht werden, wenn man fachwissenschaftliche, fachdidaktische, aber auch unterrichtspraktische Erkenntnisse und Erfahrungen in die Unterrichtsplanung einfließen lässt. Die Berücksichtigung dieses Dreiklangs zeichnet das vorliegende Buch aus. Nach einer ausführlichen und verständlichen Beschreibung der finanzmathematischen und didaktischen Grundlagen in den ersten beiden Teilen des Buches werden im dritten Teil daraus resultierende, mehrfach erprobte und optimierte Unterrichtseinheiten für verschiedene Klassenstufen zur Analyse von Aktienkursen und zur Berechnung von Optionspreisen vorgestellt. Die CD zum Buch enthält umfangreiches Arbeitsmaterial (mit Lösungen) für die unmittelbare Verwendung im Unterricht.

Der Inhalt

- Stochastische Finanzmathematik als Teil einer Fachwissenschaft: Aktien und Optionen
- Stochastische Finanzmathematik als Teil des Mathematikunterrichts
- Vorstellung der Unterrichtseinheiten zu den Themen Aktien und Optionen

Die Autorin

Dr. Peggy Daume studierte die Fächer Mathematik und Chemie für das Amt des Lehrers an Haupt- und Realschulen. Nach ihrem Studium promovierte sie an der Humboldt-Universität zu Berlin. Seitdem ist es ihr ein Anliegen, Schüler und Lehrer an Forschungsgebiete der angewandten Mathematik heranzuführen.

Ja, ich bestelle

Fax +49(0)611. 7878 - 420

____ Exemplare
Finanzmathematik im Unterricht
ISBN 978-3-8348-0628-4
EUR 24,90

Firma | Name, Vorname | 324 08 004

Abteilung

Straße (bitte kein Postfach) | PLZ | Ort

Datum | Unterschrift

TECHNIK BEWEGT.

VIEWEG+TEUBNER

ISSN 0012-0456