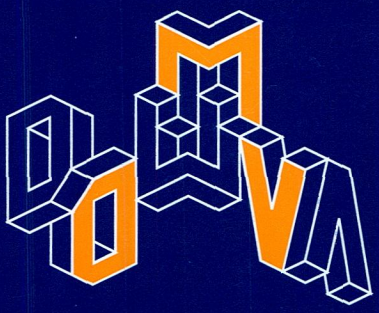
109. Band Heft 4, Dezember 2007



Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

4 – 2007

Herausgegeben von K. Hulek
unter Mitwirkung von
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an *Prof. Dr. K. Hulek* zu richten. Für Buchbesprechungen ist *Prof. Dr. H. Lange* zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert.
Die Autoren werden gebeten, für Manuskripte und Buchbesprechungen die **Standard-LATEX-Klasse article mit 10pt (default), \textwidth139mm, \textheight205mm** zu benutzen. Sollen Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Ein Foto des Autors sollte als Bilddatei in einem der gängigen Grafikformate (am unproblematischsten: TIF-Format; Graustufenbild mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi) oder als normaler Papier-Fotoabzug zum Einscannen mitgeschickt werden. Als Datenträger sind ZIP-Disketten, CD-ROM bzw. Syquest (88 oder 200 MB) möglich.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Weitere Informationen zum „Jahresbericht" finden Sie unter
http://www.dmv.mathematik.de/publikationen/jahresbericht

Verlag:

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Ralf Birkelbach (Vors.), Albrecht F. Schirmacher
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Ingo Eichel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:

Eva Brechtel-Wahl
Telefon: (06 11) 78 78-3 79, Fax: (06 11) 78 78-4 39, E-Mail: eva.brechtel-wahl@gwv-fachverlage.de

Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65, Fax: (0 52 41) 80-96 20, E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Anzeigenleitung

Christian Kannenberg
Telefon: (06 11) 78 78-3 69, Fax: (06 11) 78 78-4 30, E-Mail: christian.kannenberg@gwv-media.de
www.gwv-anzeigen.de

Es gilt die Preisliste vom 01.01.2008.

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 124,– inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Wilhelm & Adam, Heusenstamm

ISSN 0012-0456

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 109. Bd. 2007, Nr. 4

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

G. Faltings: Thetafunktionen auf Modulräumen von Vektorbündeln
M. Plum: Existence and Multiplicity Proofs for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems by Computer Assistance

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Algebraische Geometrie,
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover,
Welfengarten 1, 30167 Hannover
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth
E-Mail: Joerg.Rambau@uni-bayreuth.de

Prof. Dr. A. Schied, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
E-Mail: schied@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig, Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 109. Bd. 2007, Nr. 4

Vorwort

Im Mittelpunkt dieses Hefts stehen zwei Übersichtsartikel. Der Aufsatz von E. Eberlein et al. behandelt mathematische Modelle zur Bewertung von Risiken am Finanzmarkt, wobei Kreditrisiken im Vordergrund stehen.

Dabei werden verschiedene Modelle der Risikobewertung diskutiert, um dann einen axiomatischen Zugang zu dieser Problematik vorzustellen.

Schließlich werden dynamische Modelle und die Preisgestaltung von Derivaten behandelt. Im Hinblick auf die Turbulenzen an den Finanzmärkten, die durch falsche Kreditbewertungen ausgelöst wurden, handelt es sich hier um einen Artikel von geradezu tagespolitischer Aktualität!

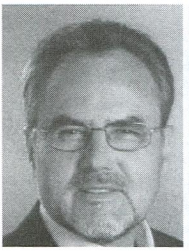
An der Schnittstelle von reiner und angewandter Mathematik steht auch der zweite Übersichtsartikel dieses Hefts von J. Escher.

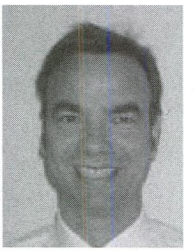
Er stellt dar, wie neuere Entwicklungen in der Funktionalanalysis die Grundlage für das Studium nichtlinearer Evolutionsgleichungen bilden.

Dies wird an Hand zweier Beispiele näher erläutert. Dabei wird zuerst die Modellierung von Tumorwachstum behandelt, das zweite Beispiel beschreibt den Fluss einer zähen Flüssigkeit unter dem Einfluss von Oberflächenspannung. Auch dieser Artikel zeigt eindrucksvoll, wie theoretische Grundlagen und Anwendungsfragen einander beeinflussen und befruchten.

Wie immer enthält auch dieses Heft eine Reihe von aktuellen Buchbesprechungen.

K. Hulek



E. Eberlein[1] R. Frey[2] M. Kalkbrener[3] L. Overbeck[4]

Mathematics in Financial Risk Management

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 62P05, 60G51
- Keywords and Phrases: Quantitative risk management, financial mathematics, credit risk, risk measures, Libor-rate models, Lévy processes

The paper gives an overview of mathematical models and methods used in financial risk management; the main area of application is credit risk. A brief introduction explains the mathematical issues arising in the risk management of a portfolio of loans. The paper continues with a formal overview of credit risk management models and discusses axiomatic approaches to risk measurement. We close with a section on dynamic credit risk models used in the pricing of credit derivatives. Mathematical techniques used stem from probability theory, statistics, convex analysis and stochastic process theory.

The views expressed in this article are the authors' personal opinions and should not be construed as being endorsed by Deutsche Bank. We are grateful to the associated editor and two anonymous referees for careful reading and useful suggestions which helped to improve the final version of the paper.

[1]Institut für Mathematische Stochastik, Univ. Freiburg, eberlein@stochastik.uni-freiburg.de
[2]Mathematisches Institut., Universität Leipzig, ruediger.frey@math.uni-leipzig.de
[3]Risk Analytics & Instruments, Deutsche Bank AG, Frankfurt, michael.kalkbrenner@db.com
[4]Mathematisches Institut, Universität Gießen, ludger.overbeck@math.uni-giessen.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

Eingegangen: 24. 10. 2006

1 Introduction

1.1 Financial Risk Management

Broadly speaking, risk management can be defined as a discipline for "Living with the possibility that future events may cause adverse effects" (Kloman 1999). In the context of risk management in financial institutions such as banks or insurance companies these adverse effects usually correspond to large losses on a portfolio of assets. Specific examples include: losses on a portfolio of market-traded securities such as stocks and bonds due to falling market prices (a so-called market risk event); losses on a pool of bonds or loans, caused by the default of some issuers or borrowers (credit risk); losses on a portfolio of insurance contracts due to the occurrence of large claims (insurance- or underwriting risk). An additional risk category is operational risk, which includes losses resulting from inadequate or failed internal processes, fraud or litigation.

In financial markets, there is in general no so-called "free lunch" or, in other words, no profit without risk. This is the reason why financial institutions actively take on risks. The role of financial risk management is to measure and manage these risks. Hence risk management can be seen as a core competence of an insurance company or a bank: by using its expertise and its capital, a financial institution can take on risks and manage them by various techniques such as diversification, hedging, or repackaging risks and transferring them back to markets, etc. While risk management has thus always been an integral part of the banking and insurance business, recent years have witnessed a large increase in the use of quantitative and mathematical techniques. Even more, regulators and supervisory authorities nowadays even require banks to use quantitative models as part of their risk management process.

Given the random nature of future events on financial markets, the field of stochastics (probability theory, statistics and the theory of stochastic processes) obviously plays an important role in quantitative risk management. In addition, techniques from convex analysis and optimization and numerical methods are frequently being used. In fact, part of the challenge in quantitative risk management stems from the fact that techniques from several existing quantitative disciplines are drawn together. The ideal skill-set of a quantitative risk manager includes concepts and techniques from such fields as mathematical finance and stochastic process theory, statistics, actuarial mathematics, econometrics and financial economics, combined of course with non-mathematical skills such as a sound understanding of financial markets and the ability to interact with colleagues with diverse training and background.

In this paper we give an introduction to some of the mathematical aspects of financial risk management. We have chosen the problem of measuring and managing the risks associated with a portfolio of bonds or loans as vehicle for our discussion. This choice is motivated by our common research interests; moreover, quantitative credit risk models are currently a hot topic in academia and industry.

1.2 Risk Management for a Loan Portfolio

The loss distribution. Consider a portfolio of loans to m different counterparties, indexed by $i \in \{1, \ldots, m\}$. The standard way for measuring the risk in this portfolio is to look at the change in the portfolio-value over a fixed time horizon T such as one year (current time is $t = 0$). We start with a single loan with given exposure (size) e_i and maturity date (repayment date) bigger than T. The main risk is default risk, i.e. the risk that the borrower cannot repay the loan in full. Denote by $\tau_i > 0$ the random default time of borrower i and introduce the Bernoulli random variable

$$Y_i = 1_{\{\tau_i \leq T\}} := \begin{cases} 1, & \text{if } \tau_i \leq T, \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{1}$$

Assume that in case of default the borrower pays the lender the amount $(1 - \delta_i)e_i$, $\delta_i \in (0, 1]$ being the proportion of the exposure which is lost in default (the so-called *relative loss given default*). Abstracting from interest-rate payments the potential loss generated by loan i over the period $(0, T]$ is then given by $L_i = \delta_i e_i Y_i$. Denote by

$$\bar{p}_i := \mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(\tau_i \leq T) \tag{2}$$

the *default probability* of counterparty i; $\bar{p}_i$ is by definition the probability that loan i causes a loss and plays therefore an important role in measuring the default risk of the loan.

The loss of the whole portfolio of m firms is then given by $L = \sum_{i=1}^{m} e_i \delta_i Y_i$. In realistic applications m can be quite large: loan portfolios of major commercial banks contain several million loans. The *portfolio loss distribution* is then determined by $F_L(l) = \mathbb{P}(L \leq l)$. Note that F_L depends on the multivariate distribution of the random vector $(Y_1, \ldots, Y_m)$ and not just on the individual default probabilities $\bar{p}_i, 1 \leq i \leq m$. In order to determine F_L we hence need a proper mathematical model for the joint distribution of $(Y_1, \ldots, Y_m)$; this issue is taken up in Section 2.2.

Dependence between defaults can have a large impact on the form of F_L and in particular on its right tail (the probability of large losses). This is illustrated in Figure 1, where we compare the loss distribution for a portfolio of 1000 firms that default independently (portfolio 1) with a more realistic portfolio of the same size where defaults are dependent (portfolio 2). In portfolio 2 defaults are weakly dependent in the sense that the correlation between default events ($\text{corr}(Y_i, Y_j)$, $i \neq j$) is approximately 0.5 %. In both cases the default probability is $\bar{p}_i \equiv 1\,\%$ so that on average we expect 10 defaults. We clearly see from Figure 1 that the loss distribution of portfolio 2 is skewed and that its right tail is substantially heavier than the right tail of the loss distribution of portfolio 1, illustrating the drastic impact of dependent defaults on credit loss distributions. There are in fact sound economic reasons for expecting dependence between defaults. To begin with, the financial health of a firm varies with randomly fluctuating macroeconomic factors such as changes in economic growth. Since different firms are affected by common macroeconomic factors, there is dependence between their defaults. Moreover, dependence between defaults is caused by direct economic links be-

tween firms such as a strong borrower-lender relationship or a small supplier for a larger production firm.

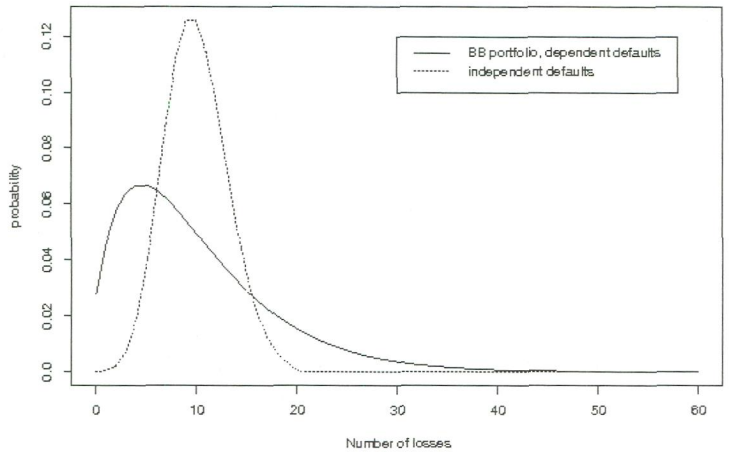


Figure 1. Comparison of the loss distribution of a homogeneous portfolio of 1000 loans with a default probability of 1% assuming (i) independent defaults and (ii) a default correlation of 0.5%. We clearly see that the dependence between default generates a loss distribution with a heavier right tail.

Risk Measurement. In practice, risk measures expressing the risk of a portfolio on a quantitative scale are needed for a variety of purposes. To begin with, financial institutions hold *risk capital* as buffer against unexpected losses in their portfolios. Regulators concerned with the solvency of financial institutions also have specific requirements on risk capital: under the current regulatory framework the amount of risk capital needed is related to the riskiness of the portfolio as measured via the risk measure Value-at-Risk (see (3) below for a definition). Moreover, risk measures are used by the management of a financial institution as a tool for limiting the amount of risk a subunit within the institution – such as a trading group – may take, and the profitability of a subunit is measured relative to the riskiness (appropriately measured) of its position.

Fix some risk management horizon T and denote by the random variable L the loss of a given portfolio over that horizon. Most modern risk measures are statistics of the distribution of L; such risk measures are frequently called *law-invariant risk measures* (Kusuoka 2001). The most popular law-invariant risk measure is *Value-at-Risk (VaR)*. Given some confidence level $\alpha \in (0,1)$, say, $\alpha = 0.99$, the VaR of the portfolio at the confidence level α is defined by

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) := \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L \leq l) \geq \alpha\}, \tag{3}$$

i.e. in statistical terms $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ is simply the α-*quantile* of L. If L is integrable, an alternative law-invariant risk measure is *Expected Shortfall* or *Average Value at Risk* given by

$$\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(L)du\,. \tag{4}$$

Instead of fixing a particular confidence level α, in (4) one averages VaR over all levels $u \geq \alpha$ and thus "looks further into the tail" of the loss distribution; in particular $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$.

Of course, from a theoretical point of view it is not very satisfactory to introduce risk measures such as VaR or expected shortfall in a more or less ad hoc way. In Section 3 we therefore discuss axiomatic approaches to risk measurement and the related issue of risk-based performance measurement.

Securitization, credit derivatives, and dynamic credit risk models. Recent years have witnessed a rapid growth on the market for credit derivatives. These securities are primarily used for the management and the trading of credit risk. Credit derivatives have become popular, because they help financial firms to manage the credit risk on their books by selling parts of it to the wider financial sector. The payoff of most credit derivatives depends on the exact timing of defaults, so that dynamic (continuous-time) credit risk model are needed to study pricing and hedging of these products. The mathematical tools for analyzing credit derivatives hence stem from the field of stochastic process theory, in particular martingale theory and stochastic calculus. We discuss some of the current developments in Section 4.

Further reading. A short survey paper cannot do justice to all aspects of the vast and growing field of quantitative risk management. For further reading we refer to the books McNeil, Frey & Embrechts (2005) (for quantitative risk management in general), Bluhm, Overbeck & Wagner (2002) (for an introduction with strong focus on credit risk) or Crouhy, Galai & Mark (2001) (for institutional aspects of risk management); further references are provided in the text.

2 Credit Risk Management Models

In this section we discuss models for credit risk management. These models are typically static, meaning that the focus is the loss distribution over a fixed time period $[0, T]$ rather than the evolution of risk in time. This makes the mathematics underlying the models relatively simple (the key tools are random variables instead of stochastic processes) and permits us to discuss some key ideas in credit risk modelling in a non-technical setting. Note however, that the implementation of even these simple models poses substantial practical challenges: current approaches for parameter estimation and model validation are far from satisfactory. To a large extent this is due to the difficult data situation: credit loss data are collected on an annual or semi-annual basis so that a loss history for a loan portfolio ranging over 20 years contains at most 40 serially independent observations.

We begin with the issue of determining default probabilities for individual firms; portfolio models and related statistical questions are discussed in Sections 2.2 and 2.3.

2.1 Default probabilities

State variables. In order to determine the default probability $\bar{p}_i$ of a given firm i one typically introduces a *state variable* X_i measuring its credit quality. The link between state variable and default probability is then modelled by some function $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$ so that $\bar{p}_i = p(X_i)$. This modelling suggests the following simple *moment estimator* for $p(\cdot)$: assume that there are N years of default data for a given portfolio available; denote by $m_t(x)$ the number of firms in year t with X_i (roughly) equal to x and by $M_t(x)$ the number of those firms which have defaulted in year t. Then a simple estimator for $p(\cdot)$ is given by

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{M_t(x)}{m_t(x)}. \tag{5}$$

More sophisticated estimators can be developed in the context of a formal model for the joint distribution of default events in the portfolio; see Section 2.3 below.

Credit ratings. A popular state variable used in the so-called credit-migration models is the *credit rating* of a firm. Credit ratings for major companies or sovereigns are provided by rating agencies such as Moody's, Standard & Poor's (S&P) or Fitch. In the S&P rating system there are seven rating categories (AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC) with AAA being the highest and CCC the lowest rating of companies which have not defaulted; moreover, there is a default state. Moody's uses seven pre-default rating categories labelled Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, C, a finer alpha-numeric system is also in use. The rating system used by Fitch is similar to the S&P system. Rating agencies also provide so-called rating transition matrices; an example from Standard & Poor's is presented in Table 1. These matrices are determined from historical rating information; they give an estimate of the probability that a firm migrates from a given rating category to another category within a given year.

Initial rating	Rating at year-end (transition probabilities in %)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Table 1. Probabilities of migrating from one rating quality to another within 1 year expressed in %. Source: Standard & Poor's CreditWeek (15th April 1996).

In the simplest form of credit migration models it is assumed that the current credit rating of a firm completely determines the distribution of its future rating, or, in mathematical terms, that rating transitions follow a *Markov chain.* Under this assumption de-

fault probabilities can be read off from an estimated transition matrix. For instance, using the transition matrix presented in Table 1, the one-year default probability of a company whose current S&P credit rating is A is estimated to be 0.06 %, whereas the default probability of a CCC-rated company is estimated to be almost 20 %. While the Markovianity of rating transitions is convenient for financial modelling (see for instance (Jarrow, Lando & Turnbull 1997)), there is some doubt if the assumption can be maintained empirically; a good empirical study based on techniques from survival analysis is Lando & Skodeberg (2002). This tradeoff between tractability and realism is typical for the application of mathematical models in finance in general.

Firm-value models. Alternative state variables can be based on the *firm-value interpretation* of default. In this approach the asset-value of firm i is modelled as a nonnegative stochastic process $(V_{t,i})_{t\geq 0}$; liabilities are represented by some (deterministic) threshold D_i. In the simplest case the asset-value process is modelled as *geometric Brownian motion* so that $\ln V_{T,i}$ is normally distributed. In line with economic intuition, it is assumed that default occurs if the asset value of the firm is too low to cover its liabilities. The precise modelling varies: in the simple Merton (1974) model the default indicator of firm i is defined by $Y_i := 1_{\{V_{T,i}\leq D_i\}}$, i.e. one checks the solvency of the firm only at the risk management horizon T. Somewhat closer to reality are perhaps the so-called *first-passage time* models (Black & Cox (1976), Longstaff & Schwartz (1995)), where

$$\tau_i := \inf\{t \geq 0 : V_{t,i} \leq D_i\}\,. \tag{6}$$

The name stems from the fact that in probability theory τ_i is known as first-passage time of the process $(V_{t,i})$ at the threshold D_i. There are by now many extensions of the simple model (6) such as unknown default thresholds or general jump-diffusion models for the asset value process; a good overview is given in Lando (2004).

A natural state-variable in this context is the so-called *distance to default* which is used in the popular KMV approach to modelling default probabilities; see for instance Crosbie & Bohn (2002). In this approach one puts

$$X_i := \frac{V_{0,i} - D_i}{\sigma_i V_{0,i}}, \tag{7}$$

where the *volatility* σ_i is defined to be the standard deviation of the logarithmic return $\ln V_{1,i} - \ln V_{0,i}$. The definition (7) can be motivated in the context of the Merton (1974)-model. In that model $(V_{1,i} - V_{0,i})/V_{0,i}$ is approximately $N(0, \sigma^2)$ distributed, so that (in practitioner language) "X_i gives the number of standard deviations the asset value is away from the default threshold". For more details on the KMV model we refer to McNeil et al. (2005), Section 8.2, or Bluhm et al. (2002), Sections 2 and 3.

2.2 Credit Portfolio Models

Now we return to the problem of modelling the joint distribution of the default indicator vector $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$. There are two types of portfolio credit risk models, *threshold models* and *mixture models.*

Threshold models. These models can be viewed as multivariate extensions of the firm value models discussed in the previous subsection. Their defining attribute is the idea that default occurs for a company i when some *critical variable* X_i (such as the logarithmic asset value $\ln V_{T,i}$) lies below some deterministic threshold d_i (such as logarithmic liabilities $\ln D_i$) at the end of the time period $[0, T]$, i.e. we have $Y_i = 1_{\{X_i \le d_i\}}$, $1 \le i \le m$. In this model class default dependence is caused by dependence of the components of the random vector $\boldsymbol{X} := (X_1, \ldots, X_m)$. In abstract terms the latter can be represented by the *copula* of $\boldsymbol{X}$. This mathematical concept is of relevance for the analysis and the modelling of dependent risk factors in general (Embrechts, McNeil & Straumann 2001) and therefore merits a brief discussion.

Assume for simplicity that the marginal distributions $F_i(x) = \mathbb{P}(X_i \le x)$ are continuous and strictly increasing. In that case the copula C of $\boldsymbol{X}$ can be defined as the distribution function of the random vector $\mathbf{U} := (F_1(X_1), \ldots, F_m(X_m))$. Note that $\mathbf{U}$ has uniform marginal distributions:

$$\mathbb{P}(U_i \le u) = \mathbb{P}\big(X_i \le F_i^{-1}(u)\big) = F_i(F_i^{-1}(u)) = u, \; u \in [0, 1].$$

C is by definition independent under strictly increasing transformations of the individual components of $\boldsymbol{X}$ and thus represents the dependence structure of this random vector. Moreover we have the following relation between the distribution function F of $\boldsymbol{X}$ and its copula C, known as *identity of Sklar:*

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_m) &:= \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_m \le x_m) = \mathbb{P}(U_1 \le F_1(x_1), \ldots, U_m \le F_m(x_m)) \\ &= C(F_1(x_1), \ldots, F_m(x_m)), \end{aligned} \tag{8}$$

see McNeil et al. (2005), Section 5.1 for details and extensions. Relation (8) illustrates nicely how multivariate distributions are formed by coupling together marginal distributions and copulas. An example which is frequently being used is the so-called *Gauss copula* C_P^{Ga} defined as copula of a multivariate normally distributed random vector with correlation matrix P.

In threshold models for portfolio credit risk the copula of the critical-variable vector $\boldsymbol{X}$ governs the distribution of the default indicator vector $\boldsymbol{Y}$ in the following sense: given two models with critical variables $\boldsymbol{X}$ and $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ and threshold vectors $\boldsymbol{d}$ and $\widetilde{\boldsymbol{d}}$. Then the corresponding default indicators $\boldsymbol{Y}$ and $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ have the same distribution if $\mathbb{P}(X_i \le d_i) = \mathbb{P}(\tilde{X}_i \le \tilde{d}_i)$ for all i (identical default probabilities) and if moreover $\boldsymbol{X}$ and $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ have the same copula; see Section 8.3 of McNeil et al. (2005).

Credit portfolio models used in industry such as the popular KMV model (Kealhofer & Bohn 2001) typically use multivariate normal distributions with factor structure for the vector $\mathbf{X}$ (so-called Gauss-copula models). Formally, one puts

$$X_i = \sqrt{R_i} \sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} \Psi_j + \sqrt{1 - R_i}\, \epsilon_i, \ 1 \leq i \leq m; \tag{9}$$

Here $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_l)$ is an l-dimensional Gaussian random vector with $E(\Psi_i) = 0$ and $\mathrm{var}(\Psi_i) = 1$ representing country- and industry factors (so-called *systematic* factors); $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)$ is a vector with independent standard-normally distributed components representing firm-specific (*idiosyncratic*) risk; $\boldsymbol{\Psi}$ and $\boldsymbol{\epsilon}$ are independent; $0 \leq R_i \leq 1$ measures the part of the variance of X_i which is due to fluctuations of the systematic factors; the relative weights of the different factors are given by $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,l})$ with $\sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} = 1$ for all i. From a practical point of view the factor structure is mainly introduced in order to reduce the dimensionality of the problem, so that in applications l is usually much smaller than m.

Bernoulli mixture models. In a mixture model the default risk of an obligor is assumed to depend on a set of common economic factors, such as macroeconomic variables, which are also modelled stochastically; given a realization of the factors, defaults of individual firms are assumed to be independent. Dependence between defaults thus stems from the dependence of individual default probabilities on the set of common factors. We start our analysis with a general definition.

Definition 2.1 (Bernoulli mixture model). Given some random vector $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_l)'$, the random vector $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)'$ follows a Bernoulli mixture model with factor vector $\boldsymbol{\Psi}$, if there are functions $p_i : \mathbb{R}^l \to [0, 1]$, $1 \leq i \leq m$, such that conditional on $\boldsymbol{\Psi}$ the default indicator $\boldsymbol{Y}$ is a vector of independent Bernoulli random variables with $\mathbb{P}(Y_i = 1 | \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = p_i(\boldsymbol{\psi})$.

For $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)'$ in $\{0, 1\}^m$ we thus have that

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) = \prod_{i=1}^{m} p_i(\boldsymbol{\psi})^{y_i} (1 - p_i(\boldsymbol{\psi}))^{1 - y_i}, \tag{10}$$

and the unconditional distribution of the default indicator vector $\boldsymbol{Y}$ is obtained by integrating over the distribution of the factor vector $\boldsymbol{\Psi}$. In particular, the default probability of company i is given by $\bar{p}_i = \mathbb{P}(Y_i = 1) = E(p_i(\boldsymbol{\Psi}))$.

One-factor models. In many practical situations it is useful to consider a one-dimensional mixing variable Ψ and hence a one-factor model: one-factor models may be fitted statistically to default data without great difficulty (see Section 2.3 below); moreover, their behaviour for large portfolios is also particularly easy to understand, see for instance Section 8.4.3 of McNeil et al. (2005). A simple one-factor model for a portfolio consisting of different homogeneous groups indexed by $r \in \{1, \ldots, k\}$ (representing for instance rating classes) would be to assume that

$$p_i(\Psi) = h(\mu_{r(i)} + \sigma \Psi)\,. \tag{11}$$

Here $h : \mathbb{R} \to (0, 1)$ is a strictly increasing *link function*, such as $h(x) = \Phi(x)$, Φ the standard normal distribution function, or $h(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}$ (the logistic distribution function); $r(i)$ gives the group membership of firm i; μ_r is a group-specific intercept

term; $\sigma > 0$ is a scaling parameter and Ψ is standard normally distributed. Such a specification is commonly used in the class of *generalized linear mixed models* in statistics.

Inserting this specification in (10) we can find the conditional distribution of the default indicator vector. Suppose that there are m_r obligors in rating category r and write M_r for the number of defaults. The conditional distribution of the vector $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_k)'$ is then given by

$$\mathbb{P}(\mathbf{M} = \boldsymbol{l} \mid \Psi = \psi) = \prod_{r=1}^{k} \binom{m_r}{l_r} (h(\mu_r + \sigma\psi))^{l_r} (1 - h(\mu_r + \sigma\psi))^{m_r - l_r}, \tag{12}$$

where $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_k)'$.

Mapping of models. The threshold model (9) can be reformulated as a mixture model, cf. Bluhm et al. (2002), Section 2. This is a useful insight for a number of reasons. To begin with, Bernoulli mixture models are easy to simulate in Monte Carlo risk studies. Moreover, the mixture model format and the threshold model format give rise to different model-calibration strategies based on different types of data, so that a link between the model types is useful in view of the data problems arising in the statistical analysis of credit risk models.

Consider now a vector $\boldsymbol{X}$ of critical variables as in (9), default thresholds $d_1, \ldots, d_m$ and let $Y_i = 1_{\{X_i \le d_i\}}$. We have, using the independence of $\boldsymbol{\Psi}$ and ϵ and the fact that $\epsilon_i \sim N(0,1)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i \le d_i \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}) &= \mathbb{P}\Big(\epsilon_i \le \frac{d_i - \sqrt{R_i} \sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} \Psi_j}{\sqrt{1 - R_i}} \mid \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}\Big) \\ &= \Phi\Big(\frac{d_i - \sqrt{R_i} \sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} \psi_j}{\sqrt{1 - R_i}}\Big) =: p_i(\boldsymbol{\psi}); \end{aligned} \tag{13}$$

moreover, the independence of ϵ_i and ϵ_j, $i \neq j$, immediately implies that Y_i and Y_j are conditionally independent given the realisation of $\boldsymbol{\Psi}$. Note that since $X_i \sim N(0,1)$, the model can be calibrated to a set of unconditional default probabilities $\bar{p}_i$, $1 \le i \le m$, if we let $d_i = \Phi^{-1}(\bar{p}_i)$.

The above argument can be generalized to various other critical variable models with factor structure; see for instance Section 8.4.4 of McNeil et al. (2005).

2.3 Parameter estimation in credit portfolio models

Parameter estimation is an important issue in credit risk management. In threshold models one needs to determine the parameters of the factor representation (9). For this stock returns are typically used as proxy for the asset returns of a company; the factor model is then estimated by a mix of formal factor analysis and an ad-hoc assignment of factor weights based on economic arguments; see Kealhofer & Bohn (2001) for an example of this line of reasoning. In this section we describe alternative approaches which are based on the Bernoulli mixture format and historical default data. More specifically, we discuss the estimation of model parameters in the one-factor Bernoulli mixture mod-

el (11). Admittedly, model (11) is quite simplistic. However, given the present data situation, parameter estimation in Bernoulli mixture models based solely on historical default information is only feasible for models with a low-dimensional factor structure.

We consider repeated cross-sectional data, i.e. observations of the default or non-default of groups of monitored companies in a number of time periods. This kind of data is readily available from rating agencies. Suppose as before that we have observations over N years and denote by $m_{t,r}$ the number of firms in year t and group r in our sample; $\hat{M}_{t,r}$ denotes the number of these firms which have actually defaulted and $\hat{\mathbf{M}}_t := (\hat{M}_{t,1}, \ldots, \hat{M}_{t,k})'$. In this simple model one neglects dependence of defaults over time (*serial* dependence) and assumes that the factor variables $(\Psi_t)_{t=1}^N$ for the different years are independent and standard normally distributed; moreover, in line with the mixture model formulation, we assume that defaults of individual firms are conditionally independent given $(\Psi_t)_{t=1}^N$. Using (12) and the independence of $(\Psi_t)_{t=1}^N$, we obtain the following form of the likelihood of the model parameters $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_k)'$ and σ given the observed data $\hat{\mathbf{M}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{M}}_N$:

$$L(\mu, \sigma \mid \hat{\mathbf{M}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{M}}_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{t=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(\mathbf{M} = \hat{\mathbf{M}}_t \mid \Psi = \psi, \mu, \sigma\right) e^{-\psi^2/2} d\psi . \qquad (14)$$

The integrals in (14) are easily evaluated numerically, so that the model can be fitted using maximum likelihood estimation (MLE); see Frey & McNeil (2003) for details. Similar estimations based on moment matching techniques can be found in Bluhm et al. (2002), Section 2.7.

Since the factor Ψ_t is often interpreted as some measure of the state of the economy in year t, and since moreover business cycles tend to last over several years, it makes sense to assume some serial dependence of the time series $(\Psi_t)_{t=1}^N$ of factor variables. The simplest model would be a Markovian structure where the distribution of Ψ_t depends on the realization of Ψ_{t-1}. With this extension the model becomes a so-called *hidden Markov model* (Elliott & Moore 1995). For instance, McNeil & Wendin (2007) consider a model where $(\Psi_t)_{t=1}^N$ follows a so-called AR-1 process with dynamics

$$\Psi_t = \alpha \Psi_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

for $-1 < \alpha < 1$ and an iid sequence $(\varepsilon_t)_{t=1}^N$ of noise variables. Under this model assumption, the random variables $(\Psi_t)_{t=1}^N$ are not independent and the likelihood has a more complicated form, so that MLE is no longer feasible. McNeil & Wendin (2007) propose to use *Bayesian* approaches instead; as shown in their paper, Markov-Chain Monte Carlo (MCMC) methods (see for instance Robert & Casella (1999)) can be used to sample from the posterior distribution of the unknown model parameters.

3 Risk measures and capital allocation

3.1 Standard techniques for calculating and allocating risk capital

The development of the theoretical relationship between risk and expected return is built on two economic theories: portfolio theory and capital market theory (Markowitz (1952), Sharpe (1964), Lintner (1965)). Portfolio theory deals with the selection of portfolios that maximize expected returns consistent with individually acceptable levels of risk whereas capital market theory focuses on the relationship between security returns and risk. These theories also provide a natural framework for measuring profitability. The profitability analysis is commonly carried out by expressing the risk-return relationship as simple rational functions of risk- and return-components. The two basic variants of these so-called risk adjusted ratios are known as RORAC or RAROC, respectively; see Matten (2000) for details.

Techniques for measuring risk are a prerequisite for profitability analysis. In a bank, risk is usually quantified in terms of risk capital (or Economic Capital). The reason for the close connection between risk and capital is the fact that the main purpose of the bank's capital is to protect the bank against extreme losses, i.e. capital which is invested in save and liquid assets should ensure solvency of the bank even in adverse economic scenarios. Hence, the actual capital requirements of a bank are determined by its risk profile.

From a bank's perspective, the investment of capital in riskless assets is not very attractive, since the return the bank can earn by investing in these assets is usually much lower than the return required by the shareholders of the bank. Therefore, in line with portfolio theory, risk is one of the components in the profitability analysis of the bank's business areas, portfolios and transactions. This task requires an allocation algorithm that splits the risk capital k of a portfolio X with subportfolios $X_1, \ldots, X_m$ into the *subportfolio contributions* $k_1, \ldots, k_m$ with $k = k_1 + \ldots + k_m$. The objective of this section is to review the main concepts for measuring and allocating risk capital.

In the classical portfolio theory, e.g. in the Capital Asset Pricing Model, the risk of a portfolio is measured by the variance (or volatility) of the portfolio distribution and risk capital is distributed proportional to covariances.[1] Techniques based on second moments are the natural choice for normally distributed portfolios. Loss distributions of credit portfolios, however, are asymmetric and heavy tailed. For these distributions second moments do not provide useful tail information and are therefore not suitable for measuring or allocating risk.

The current standard in credit portfolio modelling is to define the risk capital in terms of a quantile of the portfolio loss distribution, in financial lingo the Value-at-Risk (VaR) $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ of the loss X of the portfolio at a specified confidence level α (see (3)). VaR has an intuitive economic interpretation, i.e. it specifies the capital needed to absorb losses with probability α, and has even achieved the high status of being written into industry regulations. However, VaR also has an obvious limitation as a risk measure: in general it is not subadditive. Subadditivity means that for two losses X and Y

$$\mathrm{VaR}(X + Y) \leq \mathrm{VaR}(X) + \mathrm{VaR}(Y). \tag{15}$$

VaR is known to be subadditive for *elliptically distributed* random vectors (X, Y) (McNeil et al. 2005), and thus for this special case encourages diversification. For typical credit portfolios the assumption of an elliptical distribution cannot be maintained. Consequently diversification, which is commonly considered as a way to reduce risk, may increase Value-at-Risk. A specific example can be found in Section 6.1 of McNeil et al. (2005).

3.2 Coherent and convex risk measures

In recent years, the development of more appropriate risk measures has been one of the main topics in quantitative risk management. The starting point is the seminal paper Artzner et al. (1999). In this paper, an axiomatic approach to the quantification of risk is presented and a set of four axioms is proposed.

Definition 3.1 (Coherent risk measures). Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space, L^∞ the space of all (almost surely) bounded random variables on Ω and V a subspace of the vector space L^∞. We will identify each portfolio X with its loss function, i.e. X is an element of V and $X(\omega)$ specifies the loss of X at a future date in state $\omega \in \Omega$. A risk measure ρ is a function from V to $\mathbb{R}$. It is called coherent if it is

monotonic:	$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$	$\forall X, Y \in V,$
translation invariant:	$\rho(X + a) = \rho(X) + a$	$\forall a \in \mathbb{R}, X \in V,$
positively homogeneous:	$\rho(aX) = a \cdot \rho(X)$	$\forall a \geq 0, X \in V,$
subadditive:	$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$	$\forall X, Y \in V.$

It seems to be accepted in the finance industry that the concept of a coherent risk measure provides a useful characterization of risk measures under fairly general conditions (see Artzner et al. (1997) for the motivation behind the choice of these axioms). A serious criticism to the necessity of the subadditivity and positive homogeneity can, however, be raised if liquidity risk is taken into account. This is the risk that the market cannot easily absorb the sell-off of large asset positions. In this situation, doubling the size of a position might more than double its risk. To take into account possible liquidity-driven violations to subadditivity and positive homogeneity, the concept of convex risk measures has been independently introduced in Heath & Ku (2004), Föllmer & Schied (2002) and Frittelli & Gianin (2002) by replacing the axioms on subadditivity and positive homogeneity by the weaker requirement of convexity.

Definition 3.2 (Convex risk measures). A translation invariant and monotonic risk measure $\rho : V \to \mathbb{R}$ is called **convex** if it has the property

convex : $\rho(aX + (1 - a)Y) \leq a\rho(X) + (1 - a)\rho(Y) \quad \forall X, Y \in V,\ a \in [0, 1].$

The debate on coherent versus convex risk measures is subject of current research and will not be covered in this survey article. We believe that coherent risk measures provide an appropriate axiomatic framework for most practical applications and will therefore focus on this concept. For the theory of convex risk measures we refer to the excellent exposition in Föllmer & Schied (2004).

Two other important areas of active research are not covered in this article: the theory of dynamic risk measures and the connection between risk measures, utility theory and portfolio choice. We refer the reader to the recent articles Cheridito et al. (2006) and Pirvu & Zitkovic (2006) and the literature surveys provided therein.

3.3 Representation theorems for coherent risk measures

A general technique for specifying coherent risk measures is given in Artzner et al. (1999).

Proposition 3.3. *Let $\mathcal{Q}$ be a set of absolutely continuous probability measures with respect to $\mathbb{P}$. The function*

$$\rho_{\mathcal{Q}}(X) := \sup\{\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(X) \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\} \tag{16}$$

defines a coherent risk measure on L^{∞}.

Does every coherent risk measure have a representation of the form (16)? Artzner et al. (1999) have shown that this is indeed the case if the underlying probability space Ω is finite. For infinite Ω the situation is more complicated. It is shown in Theorem 2.3 in Delbaen (2002) that the representation of general coherent risk measures has to be based on the more general class of finitely additive probabilities. In order to represent a coherent risk measure ρ by standard, i.e. σ-additive, probability measures the coherent risk measure ρ has to satisfy an additional condition, the so-called Fatou property.

Definition 3.4 (Fatou property and monotonic convergence). Given a function $\rho : L^{\infty} \to \mathbb{R}$. Then ρ satisfies the *Fatou property*, if $\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$ for any uniformly bounded sequence $(X_n)_{n\geq 1}$ converging to X in probability; ρ satisfies the *monotonic convergence property*, if $\rho(X_n) \downarrow 0$ for any sequence $0 \leq X_n \leq 1$ such that $X_n \downarrow 0$.

For coherent risk measures the monotonic convergence property implies the Fatou property. Furthermore, the Fatou property (the monotonic convergence property) of ρ is equivalent to continuity of ρ from below (from above), see Föllmer & Schied (2004).

Theorem 3.5 (Representation of coherent risk measures). *Let ρ be a coherent risk measure. Then we have*

1. *ρ satisfies the Fatou property if and only if there exists an $L^1(\mathbb{P})$-closed, convex set $\mathcal{Q}$ of absolutely continuous probability measures on Ω with*

$$\rho(Y) = \sup\{E_{\mathbb{Q}}(Y) \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\}. \tag{17}$$

2. *Assume that ρ can be represented in the form (17). Then ρ satisfies the monotonic convergence property if and only if for every $Y \in L^{\infty}$ there is a $\mathbb{Q}_Y \in \mathcal{Q}$ such that $\rho(Y)$ is exactly $E_{\mathbb{Q}_Y}(Y)$, i.e. $\rho(Y)$ is not only a supremum but also a maximum.*

The proof of the first part of the theorem given in Delbaen (2000, 2002) is mainly based on two theorems in functional analysis, the bipolar theorem and the Krein-Šmulian the-

orem. The proof of the second part uses James' characterization of weakly compact sets (Diestel 1975). The connection to dual representations of Fenchel-Legendre type is outlined in Föllmer & Schied (2004), see also Delbaen (2000, 2002) and Frittelli & Gianin (2002).

3.4 Expected shortfall

The most popular class of coherent risk measures is Expected Shortfall (see, for instance, Rockafellar & Uryasev (2000, 2001); Acerbi & Tasche (2002)). For an integrable random variable Y the Expected Shortfall at level α, denoted by ES_α, is the risk measure defined by

$$\mathrm{ES}_\alpha(Y) := (1-\alpha)^{-1} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(Y) du.$$

It is easy to show that

$$\mathrm{ES}_\alpha(Y) = (1-\alpha)^{-1} \left\{ \mathrm{E}(Y \mathbf{1}_{\{Y > \mathrm{VaR}_\alpha(Y)\}}) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y) \cdot \left(\mathbb{P}(Y \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) - \alpha \right) \right\} \tag{18}$$

is an equivalent characterization of Expected Shortfall. Furthermore, ES_α is coherent (Acerbi & Tasche (2002)) and satisfies the monotonic convergence property. Hence, by Theorem 3.5, there exists a set $\mathcal{Q}$ of probability measures with

$$\mathrm{ES}_\alpha(Y) = \max\{\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}(Y) \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\}. \tag{19}$$

This set consists of all absolutely continuous probability measures $\mathbb{Q}$ whose density $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ is $\mathbb{P}$-a.s. bounded by $1/(1-\alpha)$ (see, for example, Delbaen (2000)). Furthermore, it follows from (18) that for every $Y \in L^\infty$ the maximum in (19) is attained by the probability measure $\mathbb{Q}_Y$ given in terms of its density by

$$\frac{d\mathbb{Q}_Y}{d\mathbb{P}} := \frac{\mathbf{1}_{\{Y > \mathrm{VaR}_\alpha(Y)\}} + \beta_Y \mathbf{1}_{\{Y = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)\}}}{1-\alpha}, \quad \text{with} \tag{20}$$

$$\beta_Y := \frac{\mathbb{P}(Y \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) - \alpha}{\mathbb{P}(Y = \mathrm{VaR}_\alpha(Y))} \quad \text{if} \quad \mathbb{P}(Y = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) > 0. \tag{21}$$

3.5 Spectral measures of risk

A particularly interesting subclass of coherent risk measures has been introduced in Kusuoka (2001), Acerbi (2002, 2004) and Tasche (2002). Spectral measures of risk can be defined by adding two axioms to the set of coherency axioms: law invariance and comonotonic additivity. Spectral risk measures are generalizations of Expected Shortfall. In fact, they can be defined as the convex hull of the Expected Shortfall measures. A third characterization provides a direct link to risk aversion: spectral risk measures can be represented as integrals specified by appropriate risk aversion functions σ (see Theorem 3.7).

Recall that two real valued random variables X and Y are said to be *comonotonic* if there exist a real valued random variable Z and two non-decreasing functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $X = f(Z)$ and $Y = g(Z)$. A risk measure ρ will be called *law-invariant* if $\rho(X)$ depends only on the distribution of X. Note that VaR and Expected Shortfall are law-invariant. Furthermore, it has been recently shown in Jouini et al. (2006) that law-invariant convex risk measures have the Fatou property.

Definition 3.6 (Spectral risk measures). A coherent risk measure ρ is called a spectral risk measure if it is law-invariant and comonotonic additive, meaning that $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$ for all comonotonic $X, Y \in V$.

Law invariance of a risk measure ρ is an essential property for practical applications: note that a risk measure can only be estimated from empirical loss data if it is law-invariant. Two comonotonic portfolios $X, Y \in V$ provide no diversification at all when added together. It is therefore a natural requirement that $\rho(X + Y)$ should equal the sum of $\rho(X)$ and $\rho(Y)$. If a risk measure is subadditive and comonotonic additive the upper bound $\rho(X) + \rho(Y)$ placed on $\rho(X + Y)$ by subadditivity is sharp as it can be actually attained in the case of comonotonic variables.

For a proof of the following theorem we refer to Kusuoka (2001), Acerbi (2002) and Tasche (2002). Generalizations can be found in Föllmer & Schied (2004) and Weber (2007).

Theorem 3.7 (Characterization of spectral risk measures). *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space with non-atomic $\mathbb{P}$, i.e. there exists a random variable that is uniformly distributed on (0,1). Then the following three conditions are equivalent for a risk measure ρ.*

1. *ρ is a spectral measure of risk.*
2. *ρ is in the convex hull of the Expected Shortfall measures.*
3. *ρ can be represented in the form*

$$\rho(X) = p \int_0^1 \mathrm{VaR}_u(X)\sigma(u)du + (1-p)\mathrm{VaR}_1(X)$$

where $p \in [0,1]$ and σ is a non-decreasing density on $[0,1]$, i.e. $\sigma \geq 0$ on $[0,1]$, $\int_0^1 \sigma(u)du = 1$, and $\sigma(u_1) \leq \sigma(u_2)$ for $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$.

3.6 Capital Allocation

We now turn to the allocation of risk capital either to subportfolios or to business units. More formally, assume that a risk measure ρ has been fixed and let X be a portfolio which consists of subportfolios $X_1, \ldots, X_m$, i.e. $X = X_1 + \ldots + X_m$. The objective is to distribute the risk capital $k := \rho(X)$ of the portfolio X to its subportfolios, i.e. to compute risk contributions $k_1, \ldots, k_m$ of $X_1, \ldots, X_m$ with $k = k_1 + \ldots + k_m$.

Allocation techniques for risk capital are a prerequisite for portfolio management and performance measurement. In recent years, theoretical and practical aspects of different allocation schemes have been analyzed in a number of papers; see for instance

Tasche (1999, 2002), Overbeck (2000), Delbaen (2000), Denault (2001), Hallerbach (2003). An allocation scheme proposed by several authors is the *allocation by the gradient* or *Euler principle*:[2] the capital allocated to the subportfolio X_i of X is the derivative of the associated risk measure ρ at X in the direction of X_i (see (24) for a precise formalization). Tasche (1999) argues that allocation based on the Euler principle provides the right signals for performance measurement. Another justification for the Euler principle is given in Denault (2001) using cooperative game theory and the notion of "fairness". He shows that the Euler principle is the only fair allocation principle for a coherent risk measure. In the following we will review a simple axiomatization of capital allocation in Kalkbrener (2005). The main axioms are the property that the entire risk capital of a portfolio is allocated to its subportfolios and a diversification property that is closely linked to the subadditivity of the underlying risk measure. It turns out that in this framework the Euler principle is an immediate consequence of the proposed axioms.

The axiomatization is based on the assumption that the capital allocated to subportfolio X_i only depends on X_i and X but not on the decomposition of the remainder $X - X_i = \sum_{j \neq i} X_j$ of the portfolio. Hence, a capital allocation can be considered as a function Λ from $V \times V$ to $\mathbb{R}$. Its interpretation is, that $\Lambda(X, Y)$ represents the capital allocated to the portfolio X considered as a subportfolio of portfolio Y.

Definition 3.8 (Axiomatization of capital allocation). A function $\Lambda: V \times V \to \mathbb{R}$ is called a capital allocation with respect to a risk measure ρ if it satisfies the condition $\Lambda(X, X) = \rho(X)$ for all $X \in V$, i.e. if the capital allocated to X (considered as stand-alone portfolio) is the risk capital $\rho(X)$ of X.
The following requirements for a capital allocation Λ are proposed.

1. **Linearity.** For a given overall portfolio Z the capital allocated to a union of subportfolios is equal to the sum of the capital amounts allocated to the individual subportfolios. In particular, the risk capital of a portfolio equals the sum of the risk capital of its subportfolios. More formally, Λ is called linear if

   $$\forall a, b \in \mathbb{R}, X, Y, Z \in V \quad \Lambda(aX + bY, Z) = a\Lambda(X, Z) + b\Lambda(Y, Z).$$

2. **Diversification.** The capital allocated to a subportfolio X of a larger portfolio Y never exceeds the risk capital of X considered as a stand-alone portfolio: Λ is called diversifying if

   $$\forall X, Y \in V \quad \Lambda(X, Y) \leq \Lambda(X, X).$$

3. **Continuity.** A small increase in a position does only have a small effect on the risk capital allocated to that position: Λ is called continuous at $Y \in V$ if

   $$\forall X \in V \quad \lim_{\epsilon \to 0} \Lambda(X, Y + \epsilon X) = \Lambda(X, Y).$$

Risk measures and capital allocation rules are closely related. First, given a capital allocation Λ the corresponding risk measure ρ is obviously given by the values of Λ on the diagonal, i.e. $\rho(X) = \Lambda(X, X)$. Conversely, for a positively homogeneous and subadditive risk measure ρ a corresponding capital allocation Λ_ρ can be constructed as follows: let V^* be the set of real linear functionals on V and for a given risk measure ρ consider the following subset

$$H_\rho := \{h \in V^* \mid h(X) \leq \rho(X) \text{ for all } X \in V\}.$$

It is an easy consequence of the Hahn-Banach Theorem that for a positively homogeneous and subadditive risk measure ρ

$$\rho(X) = \max\{h(X) \mid h \in H_\rho\} \tag{22}$$

for all $X \in V$. Hence for every $Y \in V$ there exists an $h_Y^\rho \in H_\rho$ with $h_Y^\rho(Y) = \rho(Y)$. This allows to define a capital allocation Λ_ρ by

$$\Lambda_\rho(X, Y) := h_Y^\rho(X). \tag{23}$$

The set H_ρ can be interpreted as a collection of (generalized) scenarios: the capital allocated to a subportfolio X of portfolio Y is simply the loss of X under scenario h_Y^ρ.

The following theorem (Theorem 4.2 in Kalkbrener (2005)) states the equivalence between positively homogeneous, subadditive (but not necessarily monotonic) risk measures and linear, diversifying capital allocations.

Theorem 3.9 (Existence of capital allocations). *Let* $\rho: V \to \mathbb{R}$.

a) *If there exists a linear, diversifying capital allocation* Λ *with associated risk measure* ρ *then* ρ *is positively homogeneous and subadditive.*

b) *If* ρ *is positively homogeneous and subadditive then* Λ_ρ *is a linear, diversifying capital allocation with associated risk measure* ρ.

If a linear, diversifying capital allocation Λ is moreover continuous at a portfolio $Y \in V$ it is uniquely determined by the directional derivative of its associated risk measure, as the next theorem (Theorem 4.3 in Kalkbrener (2005)) shows.

Theorem 3.10 *Let* ρ *be a positively homogeneous and sub-additive risk measure and* $Y \in V$. *Then the following three conditions are equivalent:*

a) Λ_ρ *is continuous at* Y, *i.e. for all* $X \in V$ $\lim_{\epsilon \to 0} \Lambda_\rho(X, Y + \epsilon X) = \Lambda_\rho(X, Y)$.

b) *The directional derivative*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\rho(Y + \epsilon X) - \rho(Y)}{\epsilon} \tag{24}$$

exists for every $X \in V$.

c) *There exists a* unique $h \in H_\rho$ *with* $h(Y) = \rho(Y)$.

If these conditions are satisfied then $\Lambda_\rho(X, Y)$ *equals (24) for all* $X \in V$, *i.e.* Λ_ρ *is given by the Euler principle.*

Theorem 3.9 implies that in the general case, in particular for credit portfolios, there do not exist linear diversifying capital allocations for VaR since VaR is not subadditive. However, under regularity conditions (see, for example, Tasche (1999)), the directional derivative (24) exists for VaR_α and equals

$$\mathrm{E}(X \mid Y = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)). \tag{25}$$

The volatility (or covariance) allocation, on the other hand, is linear and diversifying, as it is derived from the risk measure Standard Deviation using (23). More precisely, let c

be a non-negative real number and define the risk measure ρ_c^{Std} and the capital allocation Λ_c^{Std} by

$$\rho_c^{Std}(X) := c \cdot \mathrm{Std}(X) + \mathrm{E}(X), \tag{26}$$

$$\Lambda_c^{Std}(X, Y) := \begin{cases} c \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)/\mathrm{Std}(Y) + E(X) & \text{if } \mathrm{Std}(Y) > 0, \\ E(X) & \text{if } \mathrm{Std}(Y) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Then the risk measure ρ_c^{Std} is translation invariant, positively homogeneous and subadditive but not monotonic for $c > 0$. Λ_c^{Std} is a linear, diversifying capital allocation with respect to ρ_c^{Std}. If $\mathrm{Std}(Y) > 0$ then Λ_c^{Std} is continuous at Y and equals the directional derivative (24) by Theorem 3.10.

Expected Shortfall ES is a coherent risk measure and therefore positively homogeneous and subadditive. Hence, application of (23) to Expected Shortfall yields a linear, diversifying capital allocation with associated risk measure ES. The scenario function $h_Y^{\mathrm{ES}}(X)$ for this risk measure is given by $\mathrm{E}_{\mathbb{Q}_Y}(X)$, where the probability measure $\mathbb{Q}_Y$ is specified in (20). In summary,

$$\Lambda_\alpha^{ES}(X, Y) := \mathrm{E}_{\mathbb{Q}_Y}(X) = \left(\int X \cdot \mathbf{1}_{\{Y > \mathrm{VaR}_\alpha(Y)\}} d\mathbb{P} + \beta_Y \int X \cdot \mathbf{1}_{\{Y = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)\}} d\mathbb{P} \right) / (1 - \alpha)$$

is a linear, diversifying capital allocation with respect to ES_α. If

$$\mathbb{P}(Y > \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) = 1 - \alpha \quad \text{or} \quad \mathbb{P}(Y \geq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) = 1 - \alpha \tag{28}$$

then Λ_α^{ES} is continuous at Y and equals the directional derivative (24). In particular, (28) holds if $\mathbb{P}(Y = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)) = 0$; in that case $\Lambda_\alpha^{ES}(X, Y)$ takes the particularly intuitive form

$$\Lambda_\alpha^{ES}(X, Y) = E(X \mid Y > \mathrm{VaR}_\alpha(Y)).$$

The extension to spectral risk measures can be found in Overbeck (2004).

3.7 Case study: capital allocation in an investment banking portfolio

We will now analyze the practical consequences of different allocation schemes when applied to a realistic credit portfolio. The case study is based on a sample investment banking portfolio consisting of $m = 25000$ loans with an inhomogeneous exposure and default probability distribution. The average exposure size is 0.004% of the total exposure and the standard deviation of the exposure size is 0.026%. The portfolio expected loss is 0.72% and the unexpected loss, i.e. the standard deviation, is 0.87%. Default probabilities $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m$ of all companies are obtained from Deutsche Bank's rating system and vary between 0.02% and 27%. Default correlations are specified by a Bernoulli mixture model: for company i, the conditional default p_i has the form

$$p_i(\psi) := \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\bar{p}_i) - \sqrt{R_i} \sum_{j=1}^{96} \alpha_{ij} \psi_j}{\sqrt{1 - R_i}} \right). \tag{29}$$

where the 96 systematic factors $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_{96})$ follow a multi-dimensional normal distribution and represent different countries and industries; see (9) and (13).

The portfolio loss distribution L specified by this model does not have an analytic form. Monte Carlo simulation is therefore used for the calculation and allocation of risk capital. For this class of models, however, the Monte Carlo estimation of tail-focused risk measures like Value-at-Risk or Expected Shortfall is a demanding computational problem due to high statistical fluctuations. This stability problem is even more pronounced for Expected Shortfall contributions of individual transactions. Importance sampling is a variance reduction technique that has been successfully applied in credit portfolio models of this type. We refer to Glasserman & Li (2005), Kalkbrener et al. (2004) and Egloff et al. (2005) for details.

For the test portfolio we have calculated the risk measures $\mathrm{VaR}_{0.9998}(L)$, $\mathrm{ES}_{0.999}(L)$ and $\mathrm{ES}_{0.99}(L)$. The $\mathrm{VaR}_{0.9998}(L)$ is the risk measure used at Deutsche Bank for calculating Economic Capital, i.e. the capital requirement for absorbing unexpected losses over a one-year period with a high degree of certainty. The confidence level of 99.98% is derived from Deutsche Bank's target rating of AA+, which is associated with an annual default rate of 0.02%. The $\mathrm{ES}_{0.999}(L)$ has been chosen since it leads to a comparable amount of risk capital, while being based on a coherent risk measure. The $\mathrm{ES}_{0.99}(L)$ was calculated to study the impact of the confidence level α on the properties of the Expected Shortfall measure. The application of these risk measures results in the following capital requirements (in percent of portfolio exposure):

$$\mathrm{VaR}_{0.9998}(L) = 10.50\%, \qquad \mathrm{ES}_{0.999}(L) = 9.43\%, \qquad \mathrm{ES}_{0.99}(L) = 5.68\%.$$

In the next step the portfolio capital is distributed to the individual loans using different capital allocation algorithms. In credit portfolio models of the form (29) the application of the Euler principle to VaR_α leads to risk contributions for individual loans that are either 0 or the full exposure of the loan. This digital behaviour of the contribution (25) is due to the fact that $\{L = \mathrm{VaR}_\alpha(L)\}$ is usually represented by a single combination of defaults and non-defaults of the m loans. We therefore do not distribute $\mathrm{VaR}_{0.9998}(L)$ via the directional derivative (25) but follow the industry standard and use volatility contributions (27) instead. The $\mathrm{ES}_{0.999}(L)$ and $\mathrm{ES}_{0.99}(L)$ are allocated using Expected Shortfall contributions.

Figure 2 displays the 50 loans with the highest capital charge under Expected Shortfall allocation based on the 99.9% quantile. The relation of portfolio capital

$$\mathrm{VaR}_{0.9998}(L) > \mathrm{ES}_{0.999}(L) > \mathrm{ES}_{0.99}(L)$$

also holds for each of these loans. However, the order of the capital consumption changes and the absolute differences in capital are significant: the highest capital consumption for Expected Shortfall is 93% of the exposure compared to almost 200% for covariances. In particular, under the covariance allocation the capital charge exceeds the overall exposure (the maximum possible loss) for almost all loans in this sub-sample. This demonstrates that the shortcomings of the covariance allocation, i.e. the fact that the underlying risk measure is not monotonic, are not purely theoretical but have implications for realistic credit portfolios.

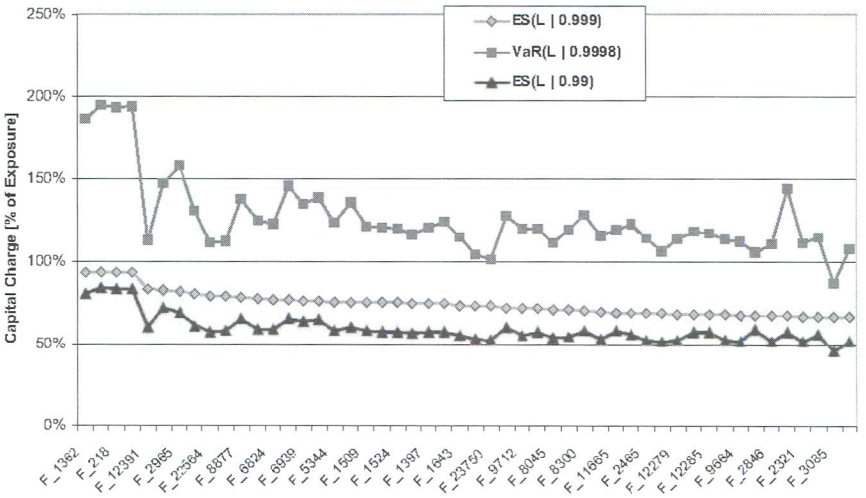


Figure 2. Comparison between Expected Shortfall and covariance capital allocation for loans with highest capital charges.

In contrast, Expected Shortfall contributions are usually higher than volatility contributions for investment-grade loans, i.e. for loans with a rating of BBB or above; see Kalkbrener et al. (2004) for details. This result illustrates that unrealistically high capital charges for poorly rated loans are avoided under Expected Shortfall allocation by distributing a higher proportion of the portfolio capital to highly rated loans.

Expected shortfall contributions behave also very reasonably with respect to the second main risk driver in credit portfolios, namely *concentration risk*. This risk is caused by default correlations and name concentration. Expected Shortfall contributions measure the average contribution of individual loans to portfolio losses above a specified α-quantile. For a high α these losses are mainly driven by default correlations and name concentration and Expected Shortfall allocation therefore is – almost by definition – very sensitive to concentration risk. It is therefore not surprising that Expected Shortfall usually penalizes concentration risks more strongly than the covariance method. For instance, the 99.9% Expected Shortfall contribution at $R = 60\%$ is three times higher than at $R = 30\%$ for a typical AA+ rated loan in our portfolio whereas the volatility contribution of this loan not even doubles.[3] Overall, this case study strongly supports the view that Expected Shortfall contributions provide a reasonable methodology for allocating risk capital for credit portfolios.

4 Dynamic Credit Risk Models and Credit Derivatives

4.1 Overview

Credit derivatives. The volume in trading credit derivatives at the exchanges and directly between individual parties has increased enormously since the first of these products were introduced roughly fifteen years ago. The reason for this success is to a

large extent due to the fact that they allow to transfer credit risk to a larger community of investors. Traditionally the risk arising from a loan contract could not be transferred and remained in the books of the lending institution until maturity. With credit derivatives the risk profile of a given portfolio of credits can be shaped according to specified limits. Concentrations of risk caused by geographic or industry sector factors can be removed. Also by selling a whole credit portfolio via a collateralized debt obligation (CDO) or a collateralized loan obligation (CLO), a financial institution can free part of its capital which can then be used for new business opportunities. Thus credit derivatives allow banks to use their capital more efficiently by acting more as a broker of risk than a taker of risk. Some important credit derivatives are introduced below; for further information we refer for instance to Schönbucher (2003) or Bluhm & Overbeck (2006).

Dynamic credit risk models. To analyse credit derivatives, static models which consider only a fixed future time horizon are no longer appropriate: the pay-off of most credit derivatives depends on the timing of credit events such as default or downgrading of a company; furthermore markets for certain credit products have become so liquid that investors can trade credit risk in a dynamic fashion. For these reasons dynamic (continuous time) models based on (sophisticated) tools from stochastic calculus are needed.

Dynamic credit risk models can be classified into *firm-value models*, as discussed briefly in Section 2.1, and *reduced-form models*: in this model class the precise mechanism leading to default is left unspecified; instead the default time of a firm is modelled as a nonnegative random variable, whose distribution typically depends on economic covariables. The approach is similar to the modelling philosophy underlying the Bernoulli mixture models introduced in Section 2.2. Reduced-form models are popular in practice, since they lead to tractable formulas for prices of credit derivatives. In particular, it is often possible to apply the well-developed pricing machinery for default-free term structure models to the analysis of defaultable securities; see for instance Lando (1998) or Duffie & Singleton (1999). Duffie & Lando (2001) provide a link between firm-value models and reduced-form models assuming that an investor has *incomplete information*; see also Blanchet-Scalliet & Jeanblanc (2004) or Frey & Runggaldier (2006) for a discussion from a more theoretical viewpoint. For textbook treatments of dynamic credit risk models we refer to Bielecki & Rutkowski (2002), Bluhm et al. (2002), Duffie & Singleton (2003), Lando (2004), Schönbucher (2003) and Chapter 9 of McNeil et al. (2005). Currently a lot of research is devoted to the development of dynamic credit portfolio models. For reasons of space we cannot discuss this exciting field. An overview is given in Section 9.6 of McNeil et al. (2005), but the best way to get an impression of the current developments is to visit the excellent web-site `www.default-risk.com`.

Martingale modelling and credit spreads. The existence of a liquid market for credit products requires a specific modelling approach: pricing models for credit derivatives are set up under an *equivalent martingale measure* – an artificial probability measure turning discounted security prices into martingales (fair bets) – and model parameters are determined by equating model prices to prices actually observed on the market (model calibration). In this way it is ensured that the model does not permit any arbi-

trage (riskless profit) opportunities. Absence of arbitrage also immediately leads to the existence of *credit spreads*: the risk that a lender might loose part or all of his money due to default of a counterparty during the lifetime of a credit contract has to be compensated by an interest rate which is higher than the risk-free rate (the interest rate earned by default-free bonds). The difference between the risk-free rate and the rate one has to pay for a bond or loan subject to default risk is termed *spread.*

4.2 The Defaultable Lévy Libor Model

Among the many possible ways to quantify the dynamic evolution of credit spreads we outline in the following an approach which allows to capture the joint dynamics of risk-free interest rates and credit spreads; for details we refer to the original article Eberlein, Kluge & Schönbucher (2006). A number of instruments depend on both quantities so that modelling interest rates and credit spreads separately might lead to inconsistencies. Instead of describing the dynamics by a diffusion with continuous trajectories we will consider more powerful driving processes, namely *time-inhomogeneous Lévy processes*, also called processes with independent increments and absolutely continuous characteristics (PIIAC) (see Jacod & Shiryaev (2003)). This class of processes is rather flexible and in the context of credit risk even more appropriate than in equity models since credit risk-related information often arrives in such a way that it causes jumps in the underlying quantities: take for example the adjustment of the rating of a firm by one of the leading agencies. Models driven by Lévy processes capture such an abrupt movement more realistically than Brownian motion driven models which have continuous paths. In implementations typically generalized hyperbolic Lévy processes (see Eberlein (2001)) or any of its subclasses like hyperbolic or normal inverse Gaussian processes are used.

Let us consider a fixed time horizon T^* and a discrete tenor structure $T_0 < T_1 < \cdots < T_n = T^*$. T_k denotes the time points where certain periodic payments have to be made. As an example take quarterly or semiannual interest payments for a loan or a coupon-bearing bond over a period of 10 years. As underlying interest rate we consider the *δ-forward Libor rates* $L(t, T)$. The acronym Libor stands for London Interbank Offered Rate. $L(t, T_k)$ is the annualized interest rate which applies for a period of length $\delta_k = T_{k+1} - T_k$ starting at time point T_k as of time t. δ_k is typically 3 or 6 months. Formally $L(t, T_k)$ is defined by

$$L(t, T_k) = \frac{1}{\delta_k}\left(\frac{B(t, T_k)}{B(t, T_{k+1})} - 1\right) \tag{30}$$

where $B(t, T_k)$ denotes the price at time t of a zero coupon bond with maturity T_k. Zero coupon bond prices are also called *discount factors* since they represent the amount which due to interest earned increases to the face value 1 until maturity T_k, thus $B(T_k, T_k) = 1$. Actually the Libor rate is not a risk-free rate since by definition it is the rate at which large internationally operating banks lend money to other large internationally operating banks. There is a very small default risk involved and consequently the Libor rate is slightly above the treasury rate. Since it is readily available it is conveni-

ent to take the Libor rate as the base rate. The corresponding rate for a contract which has a nonnegligible probability to default is the *defaultable forward Libor rate* $\overline{L}(t, T_k)$. Both rates are related by the equation

$$\overline{L}(t, T_k) = L(t, T_k) + S(t, T_k) \tag{31}$$

where $S(t, T_k)$ is the (positive) spread. Since $S(t, T_k)$ turns out not to be the quantity which will show up in valuation formulae for credit derivatives we will model instead the *forward default intensities* $H(t, T_k)$ given by

$$H(t, T_k) = \frac{S(t, T_k)}{1 + \delta_k L(t, T_k)}. \tag{32}$$

The term $\delta_k L(t, T_k)$ is small compared to 1, therefore, numerically $H(t, T_k)$ and $S(t, T_k)$ are quite close.

We start by specifying the dynamics of the most distant Libor rate by setting

$$L(t, T_{n-1}) = L(0, T_{n-1}) \exp\left(\int_0^t b^L(s, T_{n-1})\, ds + \int_0^t \lambda(s, T_{n-1})\, dL_s^{T^*} \right). \tag{33}$$

The fact that $L(\cdot, T_{n-1})$ is modeled as an exponential will guarantee its positivity. $\lambda(\cdot, T_{n-1})$ is a deterministic volatility structure and $L^{T^*} = (L_t^{T^*})$ is a time-inhomogeneous Lévy process which without loss of generality has the simple canonical representation

$$L_t^{T^*} = \int_0^t \sqrt{c_s}\, dW_s^{T^*} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu - \nu^{T^*})(ds, dx). \tag{34}$$

The first term is a stochastic integral with respect to a standard Brownian motion W^{T^*} and represents the continuous Gaussian part, whereas the second integral, which is an integral with respect to the compensated random measure of jumps of L^{T^*}, is a purely discontinuous process. The drift term $b^L(\cdot, T_{n-1})$ will be chosen in such a way that $L(\cdot, T_{n-1})$ becomes a martingale under the *terminal forward measure* $\mathbb{P}_{T^*}$.[4]

Via a backward induction for each tenor time point T_k, *forward measures* $\mathbb{P}_{T_k}$ are derived. Although one could define each forward martingale measure $\mathbb{P}_{T_k}$ by giving explicitly its density relative to the spot martingale measure $\mathbb{P}$ – this is the usual martingale measure known from stock price models – the latter is not used in the context of Libor models. One starts with a probability measure $\mathbb{P}_{T^*}$ which is interpreted as the terminal forward measure and proceeds backwards in time by introducing successively the forward measures $\mathbb{P}_{T_k}$ via Radon–Nikodym derivatives

$$\frac{d\mathbb{P}_{T_k}}{d\mathbb{P}_{T_{k+1}}} = \frac{1 + \delta_k L(T_k, T_k)}{1 + \delta_k L(0, T_k)}.$$

Then, for each tenor time point T_k, under $\mathbb{P}_{T_{k+1}}$ the Libor rate $L(t, T_k)$ can be given in the following uniform form

$$L(t, T_k) = L(0, T_k) \exp\left(\int_0^t b^L(s, T_k)\, ds + \int_0^t \lambda(s, T_k)\, dL_s^{T_{k+1}} \right) \tag{35}$$

where also the driving processes $L^{T_{k+1}} = (L_t^{T_{k+1}})$ have to be derived from L^{T^*} during

the backward induction. To implement this model one uses only mildly time-inhomogeneous Lévy processes, namely piecewise (time-homogeneous) Lévy processes. Typically three Lévy parameter sets – one for short, one for intermediate, and one for long maturities – are sufficient to calibrate the model to a volatility surface given by prices of interest rate derivatives such as caps, floors and swaptions. For some calibration results see Eberlein & Koval (2006), where the Lévy Libor model has been extended to a multicurrency setting.

The dynamics of the forward default intensities $H(\cdot, T_k)$ cannot be specified directly since it depends on the specification of the random time point at which a defaultable loan or bond actually defaults. There is a standard way to construct a random time for the default event. Let $\Gamma = (\Gamma_t)$ be a hazard process, that is an adapted, right-continuous, increasing process starting at 0 with $\lim_{t\to\infty} \Gamma_t = \infty$. Let η be a uniformly distributed random variable on the interval $[0, 1]$, independent of the process $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$, possibly defined on an extension of the underlying probability space. Then

$$\tau = \inf\{t > 0 \mid e^{-\Gamma_t} \leq \eta\} \tag{36}$$

defines a stopping time with respect to the 'right' filtration which can be used to indicate default. By choosing the hazard process Γ appropriately – only its values at the tenor time points T_k matter – one can now model the forward default intensities $H(t, T_k)$ in such a way that the dynamics is described in the same simple form (35) as given for the Libor rates, namely

$$\begin{aligned} H(t, T_k) = H(0, T_k) \exp\Bigg(& \int_0^t b^H(s, T_k)\, ds + \int_0^t \sqrt{c_s}\gamma(s, T_k)\, dW_s^{T_{k+1}} \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s, T_k) x (\mu - \nu^{T_{k+1}})(ds, dx) \Bigg). \end{aligned} \tag{37}$$

Again this is done by a backward induction along the tenor time points and as in (35) the specific form as an exponential guarantees that the forward default intensities and thus the spreads $S(t, T_k)$ are positive.

Based on this joint model for interest and default rates we can now price defaultable instruments and credit derivatives. Let us start with a *defaultable coupon bond* with n coupons of a fixed amount c that are promised to be paid at the dates $T_1, \ldots, T_n$. In case default happens during the life time of the bond usually not everything is lost. There is a positive recovery. To incorporate this fact in the model, suitable recovery rules have to be fixed. The most appropriate scheme is the *recovery of par rule*. The assumption is then that if a coupon bond defaults in the time interval $(T_k, T_{k+1}]$, the recovery is given by a recovery rate $\pi \in [0, 1)$ times the sum of the notional amount, which we set equal to 1, and the interest accrued over the period $(T_k, T_{k+1}]$. The resulting amount is paid at time T_{k+1}. The promised interest payments for subsequent periods are lost.

Theorem 4.1 (Pricing of defaultable coupon bonds). *Under the recovery of par rule the arbitrage-free price at time $T_0 = 0$ of a defaultable bond with n coupons of amount c is*

$$B(0, c, n) = \overline{B}(0, T_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{B}(0, T_{k+1}) \Big(c + \pi(1 + c)\delta_k E_{\overline{\mathbb{P}}_{T_{k+1}}}[H(T_k, T_k)] \Big), \tag{38}$$

where $\overline{B}(0, T_k)$ *are the pre-default prices of defaultable zero-coupon bonds with maturities* T_k*, which are known at time* 0.

Note that the only random variables in this pricing formula are the forward default intensities. This is the reason why we aimed at describing the dynamics of $H(\cdot, T_k)$ in a relatively simple form. The expectations are taken with respect to the (restricted) defaultable forward measures $\overline{\mathbb{P}}_{T_{k+1}}$ for the dates T_k. These are the appropriate martingale measures in the defaultable world. Their Radon-Nikodym densities with respect to the (default-free) forward measures $\mathbb{P}_{T_k}$ are given by

$$\frac{d\overline{\mathbb{P}}_{T_k}}{d\mathbb{P}_{T_k}} = \frac{B(0, T_k)}{\overline{B}(0, T_k)} e^{-\Gamma_{T_k}} = \frac{B(0, T_k)}{\overline{B}(0, T_k)} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \delta_i H(T_i, T_i)}. \tag{39}$$

Recall that $B(0, T_k)$ denotes the time-0 price of a default-free zero-coupon bond with maturity T_k. A formula similar to (38) can be obtained to price a *defaultable floating coupon bond* that pays an interest rate composed of the default-free Libor rate plus a constant spread x. Let us mention here that the change of measure technique is a key tool in interest rate and credit theory to obtain valuation formulae which are as simple as possible.

The most popular and heavily traded credit derivatives are *credit default swaps.* They can be used to insure defaultable financial instruments against default. In a credit default swap the protection buyer A pays periodically a fixed fee to the protection seller B until a prespecified credit event occurs or the final time point of the contract is reached. The credit event can be the default of a reference bond issued by a party C. The protection seller in turn will make a payment that covers the losses of A in case the credit event happens. Of course the credit event as well as the default payment have to be clearly specified. Let us consider a standard default swap with the maturity T_n where the credit event is defined to be the default of a certain fixed-coupon bond. According to the recovery scheme explained above, the default payment A will receive at time T_{k+1} if default happend in the period $(T_k, T_{k+1}]$ is $1 - \pi(1 + c)$. The periodic fee s, the so-called *default swap rate*, is now determined in such a way that the initial value of the contract is zero. The time-0 value of the periodic fee payments is $s\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{B}(0, T_{k-1})\right)$ since each fee payment of size s which has to be made at time T_{k-1} has to be discounted by the corresponding discount factor $\overline{B}(0, T_{k-1})$. Following the standard pricing principle for a contingent claim, some nontrivial analysis shows that the initial value of the payment A will receive in case of default is

$$\sum_{k=1}^{n} (1 - \pi(1 + c)) \overline{B}(0, T_k) \delta_{k-1} E_{\overline{\mathbb{P}}_{T_k}} [H(T_{k-1}, T_{k-1})]. \tag{40}$$

Equating these two sums one gets the default swap rate

$$s = \frac{1 - \pi(1 + c)}{\sum_{k=1}^{n} \overline{B}(0, T_{k-1})} \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{B}(0, T_k) \delta_{k-1} E_{\overline{\mathbb{P}}_{T_k}} [H(T_{k-1}, T_{k-1})] \right). \tag{41}$$

The formula shows that again expectations of forward default intensities have to be evaluated under the corresponding defaultable forward measures. Another important

class of credit derivatives which can be priced in this model framework are *credit default swaptions.* The holder of such an option has the right to enter a credit default swap at some prespecified time and swap rate. Credit default swaptions are typically *extension options* which are often imbedded in a credit default swap.

There is a very liquid market for credit default swaps. Therefore the current swap rates usually do not have to be determined by formula (41). Instead, credit default swaps are used as calibration instruments for the term structure of forward default intensities. In other words, given the currently quoted swap rates, (41) is used to extract the model parameters and then the so calibrated model can be used to price less liquid instruments for example in the OTC-market. Other derivatives which can be priced in this modelling framework are *total rate of return swaps, asset swaps, options on defaultable bonds*, and *credit spread options.*

Comments

1 The precise definition of this allocation scheme, called volatility allocation, is given in Section 3.6.

2 Recall Euler's well-known rule that states that if $f : S \to \mathbb{R}$ is positively homogeneous and differentiable at $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, we have $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

3 The R-parameter is the coupling of the loan to the systematic factors and therefore quantifies the correlation of the loan with the rest of the portfolio.

4 P_{T^*} is the martingale measure corresponding to the numeraire $B(t, T^*)$,i.e. security prices expressed in units of $B(t, T^*)$ are P_{T^*}-martingales.

References

Acerbi, C. (2002), 'Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion', *J. Banking Finance* **26**(7), 1505–1518.

Acerbi, C. (2004), Coherent representation of subjective risk-aversion, *in* G. Szegö, ed., 'Risk Measures for the 21st Century', Wiley, Chichester.

Acerbi, C. & Tasche, D. (2002), 'On the coherence of expected shortfall', *J. Banking Finance* **26,** 1487–1503.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. & Heath, D. (1997), 'Thinking coherently', *Risk* **10**(11), 68–71.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. & Heath, D. (1999), 'Coherent measures of risk', *Mathematical Finance* **9,** 203–228.

Bielecki, T. & Rutkowski, M. (2002), *Credit Risk: Modeling, Valuation, and Hedging,* Springer, Berlin.

Black, F. & Cox, J. (1976), 'Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions', *J. Finance* **31,** 351–367.

Blanchet-Scalliet, C. & Jeanblanc, M. (2004), 'Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims', *Finance and Stochastics* **8,** 145–159.

Bluhm, C. & Overbeck, L. (2006), *Structured Credit Portfolio Analysis Baskets & CDOs,* Chapman & Hall.

Bluhm, C., Overbeck, L. & Wagner, C. (2002), *An Introduction to Credit Risk Modeling,* CRC Press/Chapman & Hall.

Cheridito, P., Delbaen, F. & Kupper, M. (2006), 'Dynamic monetary risk measures for bounded discrete time processes', *Electronic Journal of Probability* **11,** 57–106.

Crosbie, P. & Bohn, J. (2002), 'Modeling default risk', KMV working paper. Available from http://www.kmv.com.

Crouhy, M., Galai, D. & Mark, R. (2001), *Risk Management,* McGraw-Hill, New York.

Delbaen, F. (2000), 'Coherent risk measures', lecture notes, Cattedra Galiliana, Scuola Normale Superiore, Pisa.

Delbaen, F. (2002), Coherent risk measures on general probability spaces, *in* K. Sandmann & P. Schönbucher, eds, 'Advances in Finance and Stochastics', Springer, Berlin, pp. 1–37.

Denault, M. (2001), 'Coherent allocation of risk capital', *Journal of Risk* **4**(1).

Diestel, J. (1975), *Geometry of Banach Spaces – Selected Topics,* Vol. 485, Springer.

Duffie, D. & Lando, D. (2001), 'Term structure of credit risk with incomplete accounting observations', *Econometrica* **69,** 633–664.

Duffie, D. & Singleton, K. (1999), 'Modeling term structures of defaultable bonds', *Rev. Finan. Stud.* **12,** 687–720.

Duffie, D. & Singleton, K. (2003), *Credit Risk: Pricing, Measurement and Management,* Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Eberlein, E. (2001), Application of generalized hyperbolic Lévy motions to finance, *in* O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch & S. Resnick, eds, 'Lévy Processes: Theory and Applications', Birkhäuser, Boston, pp. 319–337.

Eberlein, E., Kluge, W. & Schönbucher, P. (2006), 'The Lévy Libor model with default risk', *Journal of Credit Risk* **2,** 3–42.

Eberlein, E. & Koval, N. (2006), 'A cross-currency Lévy market model', *Quantitative Finance* **6,** 1–16.

Egloff, D., Leippold, M. & Dalbert, C. (2005), 'Optimal importance sampling for credit portfolios with stochastic approximations', working paper, Zürcher Kantonalbank, Zürich.

Elliott, R.J. and Aggoun, L. & Moore, J. (1995), *Hidden Markov Models: Estimation and Control,* Springer, New York.

Embrechts, P., McNeil, A. & Straumann, D. (2001), Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls, *in* M. Dempster & H. Moffatt, eds, 'Risk Management: Value at Risk and Beyond', Cambridge University Press, http://www.math.ethz.ch/~mcneil, pp. 176–223.

Föllmer, H. and Schied, A. (2002), 'Convex measures of risk and trading constraints', *Finance and Stochastics* **6,** 429–447.

Föllmer, H. & Schied, A. (2004), *Stochastic Finance -An Introduction in Discrete Time,* 2nd edn, Walter de Gruyter, Berlin New York.

Frey, R. & McNeil, A. (2003), 'Dependent defaults in models of portfolio credit risk', *J. Risk* **6**(1), 59–92.

Frey, R. & Runggaldier, W. (2006), 'Credit risk and incomplete information: a nonlinear filtering approach', preprint, Universität Leipzig.

Frittelli, M. & Gianin, E. R. (2002), 'Putting order in risk measures', *J. Banking Finance* **26,** 1473–1486.

Glasserman, P. & Li, J. (2005), 'Importance sampling for portfolio credit risk', *Management Science* **51,** 1643–1656.

Hallerbach, W. (2003), 'Decomposing portfolio Value-at-Risk: A general analysis', *Journal of Risk* **5**(2), 1–18.

Heath, D. & Ku, H. (2004), 'Pareto equilibria with coherent measures of risk', *Mathematical Finance* **14,** 163–172.

Jacod, J. & Shiryaev, A. (2003), *Limit Theorems for Stochastic Processes,* 2nd edn, Springer Verlag, Berlin.

Jarrow, R., Lando, D. & Turnbull, S. (1997), 'A Markov model for the term structure of credit risk spreads', *Rev. Finan. Stud.* **10,** 481–523.

Jouini, E., Schachermayer, W. & Touzi, N. (2006), 'Law invariant risk measures have the Fatou property', preprint, Université Paris Dauphine.

Kalkbrener, M. (2005), 'An axiomatic approach to capital allocation', *Mathematical Finance* **15,** 425–437.

Kalkbrener, M., Lotter, H. & Overbeck, L. (2004), 'Sensible and efficient capital allocation for credit portfolios', *Risk* **17**(1), 19–24.

Kealhofer, S. & Bohn, J. (2001), 'Portfolio management of default risk', KMV working paper. Available from `http://www.kmv.com`.

Kloman, H. (1999), Does risk matter?, *in* 'EARTH Matters, Special Edition on Risk Management', Lamont-Doherty Earth Observatory, Columbia University.

Kusuoka, S. (2001), 'On law invariant coherent risk measures', *Advances in Mathematical Economics* **3,** 83–95.

Lando, D. (1998), 'Cox processes and credit risky securities', *Rev. Derivatives Res.* **2,** 99–120.

Lando, D. (2004), *Credit Risk Modeling: Theory and Applications,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Lando, D. & Skodeberg, T. (2002), 'Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations', *Journal of Banking and Finance* **26,** 423–444.

Lintner, J. (1965), 'Security prices, risk and maximal gains from diversification', *J. Finance* **20**(4), 587–615.

Longstaff, F. & Schwartz, E. (1995), 'Valuing risky debt: A new approach', *J. Finance* **50,** 789–821.

Markowitz, H. (1952), 'Portfolio selection', *J. Finance* **7,** 77–91.

Matten, C. (2000), *Managing Bank Capital: Capital Allocation and Performance Measurement,* 2nd edn, Wiley, New York.

McNeil, A., Frey, R. & Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

McNeil, A. & Wendin, J. (2007), 'Bayesian inference for generalised linear mixed models of portfolio credit risk', *Journal of Empirical Finance*, **14**(2), 131–149.

Merton, R. (1974), 'On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates', *J. Finance* **29,** 449–470.

Overbeck, L. (2000), Allocation of economic capital in loan portfolios, *in* W. Härdle & G. Stahl, eds, 'Measuring Risk in Complex Stochastic Systems', Berlin.

Overbeck, L. (2004), Spectral Capital Allocation, *in* A. Dev , eds, 'Economic Capital, A Practitioner Guide', Risk Books, London.

Pirvu, T. & Zitkovic, G. (2006), 'Maximizing the growth rate under risk constraints', preprint, Dept. of Mathematics, University of Texas at Austin.

Robert, C. & Casella, G. (1999), *Monte Carlo Statistical Methods,* Springer, New York.

Rockafellar, R. T. & Uryasev, S. (2002), 'Conditional value-at-risk for general loss distributions', *J. Banking Finance* **26,** 1443–1471.

Rockafellar, R. & Uryasev, S. (2000), 'Optimization of conditional Value-at-Risk', *Journal of Risk* **2,** 21–42.

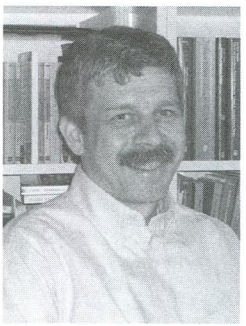
Schönbucher, P. (2003), *Credit Derivatives Pricing Models,* Wiley.

Sharpe, W. (1964), 'Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk', *J. Finance* **19**(3), 425–442.

Tasche, D. (1999), 'Risk contributions and performance measurement', preprint, Dept. of Mathematics, TU-München.

Tasche, D. (2002), 'Expected shortfall and beyond', *J. Banking Finance* **26,** 1519–1533.

Weber, S. (2007), 'Distribution invariant risk measures, entropy, and large deviations', *Journal of Applied Probability*, **44**, 16–40.



Funktionalanalytische Methoden bei freien Randwertaufgaben

Joachim Escher

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 35K55, 35Q30, 35R35, 46N20, 76D07
- Keywords and Phrases: Freie Randwertaufgaben, nichtlineare Evolutionsgleichungen, analytische Halbgruppen, maximale Regularität

Neuere Entwicklungen in der Funktionalanalysis bilden die Grundlage eines umfassenden Studiums abstrakter (nichtlinearer) Evolutionsgleichungen. Dabei ist eine Theorie für unendlich-dimensionale dynamische Systeme entstanden, die hinreichend allgemein ist, um wichtige Klassen freier Randwertaufgaben untersuchen zu können. Anhand zweier konkreter Beispiele werden einige dieser Entwicklungen vorgestellt und die entsprechenden analytischen Werkzeuge erläutert.

Eingegangen: 12.06.2006

Joachim Escher, Institut für Angewandte Mathematik,
Leibniz Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover,
E-Mail: escher@ifam.uni-hannover.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Einführung

Viele natur- und ingenieurwissenschaftliche Prozesse verändern die räumlichen Gebiete in denen diese Prozesse stattfinden. Die mathematische Modellierung dieses ubiquitären Phänomens erfolgt in der Regel durch sogenannte freie Randwertaufgaben, d. h. durch Systeme partieller Differentialgleichungen, in welchen neben den eigentlichen Zustandsgrößen auch der freie Rand des sich verändernden Gebietes bestimmt werden muss. Dabei weisen die meisten relevanten freien Randwertaufgaben eine starke Kopplung zwischen den Zustandsgrößen und dem freien Rand auf. Außerdem unterliegen die Lösungen freier Randwertaufgaben offensichtlich keinem Superpositionsprinzip, und stellen somit stets nichtlineare, wie sich in den Anwendungen zeigt, quasilineare bzw. vollnichtlineare Evolutionsgleichungen dar. Einige Merkmale und Eigenschaften dieser Systeme werden im Verlauf der vorliegenden Ausführungen erörtert.

Wichtige Beiträge der Funktionalanalysis haben in den vergangenen drei Jahrzehnten wesentlich zum Verständnis unendlich-dimensionaler dynamischer Systeme beigetragen. Dabei ist eine allgemeine Theorie entstanden, welche die analytische Schärfe besitzt, die die Behandlung freier Randwertaufgaben im Rahmen klassischer Lösungen erfordert. Zudem besticht dieser Zugang durch eine große Flexibilität, die es erlaubt, verschiedene Klassen freier Randwertaufgaben zu untersuchen. Zu erwähnen sind hier Phasenübergangsmodelle wie das Stefanproblem, das Mullins-Sekerka-System oder der Oberflächendiffusionsfluss, hydrodynamische Modelle wie die Navier-Stokessche Gleichung, das klassische Wasserwellenproblem, die Hele-Shaw-Zelle oder Flüsse durch poröse Medien, und in der Geometrie sogenannte Krümmungsflüsse.

Ziel dieses Beitrages ist es, an Hand zweier Beispiele über neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet zu berichten. Die Auswahl der diskutierten Beispiele wurde dabei vom Gedanken geleitet, die dahinterstehenden allgemeinen Prinzipien aufzudecken. Das ersten Beispiel befasst sich mit der Modellierung von Tumorwachstum. Es wird dargelegt, dass diese Modelle im Rahmen der sogenannten quasilinearen parabolischen Evolutionsgleichungen adäquat untersucht werden können. Das Charakteristikum dieser Klasse von Evolutionsgleichungen besteht darin, dass in natürlicher Weise ein führender linearer Anteil ausgezeichent ist, dem die Nichtlinearitäten in einem zu präzisierenden Sinne untergeordnet sind. Die parabolische Struktur spiegelt sich in der Tatsache wider, dass der führende lineare Anteil im Rahmen der analytischen Halbgruppen auf geeigneten Banachräumen behandelt werden kann.[1] Dieser Zugang ist äußerst flexibel, da die Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten nahezu optimal sind und keine Voraussetzungen an die Geometrie des zugrundeliegenden Banachraumes zu stellen sind (vgl. Theorem 3.1).

In einem gewissen Gegensatz hierzu stehen die sogenannten voll-nichtlinearen parabolischen Evolutionsgleichungen, bei welchen kein führender linearer Term mehr ausgezeichnent ist, dem die Nichtlinearitäten untergeordnet sind. Unter genügenden Regularitätsvoraussetzungen ist es naheliegend, die Gleichungen zu linearisieren, und in einem ersten Schritt die entsprechenden linearen Evolutionsgleichungen zu untersuchen. Hierbei erzwingt die voll-nichtlineare Struktur der ursprünglichen Gleichungen jedoch, dass die entsprechenden linearen Systeme Isomorphismen zwischen geeigneten Funktionenräumen induzieren. Die scheinbar harmlose Forderung, dass Lösungsoperatoren

linearer Evolutionsgleichungen Isomorphismen zwischen Banachraum-wertigen Funktionenräumen sind, hat erstaunlich tiefliegende funktionalanalytische Konsequenzen, u. a. auch für die Geometrie der zugrundeliegenden Banachräume, vgl. Abschnitt 5. Diese reichhaltige Struktur wurde unter verschiedenen Gesichtspunkten und mit unterschiedlichen Methoden untersucht, und ist heutzutage als Theorie der maximalen Regularität bekannt. Das zweite Beispiel dieses Beitrages beschreibt den Fluss einer zähen Flüssigkeit unter dem Einfluss von Oberflächenspannungseffekten. Es zeigt sich, dass dieses Problem keine quasilineare, sondern eine voll-nichtlineare Evolutionsgleichung ist, die jedoch mit Hilfe der sogenannten stetigen maximalen Regularität erfolgreich untersucht werden kann.

Beiden Beispielen gemeinsam ist die Tatsache, dass, obwohl die Zustandsgrößen durch Differentialgleichungen beschrieben werden, der freie Rand nicht durch Differentialoperatoren, sondern vielmehr durch sogenannte Pseudodifferentialoperatoren mit nicht glatten Symbolen an die Zustandsgrößen gekoppelt ist. Pseudodifferentialoperatoren sind auf der Fouriertransformation basierende Verallgemeinerungen linearer Differentialoperatoren, deren Theorie in den letzten 50 Jahren entwickelt wurde. Neuere Untersuchungen zeigen, dass die Pseudodifferentialoperatoren der hier diskutierten freien Randwertaufgaben wichtige spektrale Eigenschaften besitzen, die es erlauben, für diese Operatoren einen sehr weitreichenden Funtionalkalkül zu entwickeln, vgl. [25].

Aufgrund der komplexen Struktur freier Randwertaufgaben kann eine erfolgreiche Untersuchung dieser Probleme nur dann gelingen, wenn Methoden und Konzepte verschiedener mathematischer Disziplinen im Zusammenspiel verwendet werden. Im Zentrum des zweiten und des vierten Abschnittes steht die Modellierung der betrachteten Probleme. Die Lektüre dieser Ausführungen bedarf keiner besonderer Detailkenntnisse. Im dritten und fünften Abschnitt werden einige analytische Aspekte freier Randwertaufgaben beleuchtet. Um hier ein gewisses Maß an Präzision zu erlangen, habe ich mich nicht gescheut, an einigen Stellen etwas weiter auszuholen. Mit dem letzten Abschnitt wollte ich an der Geometrie interessierte Leser ansprechen: Dort werden allgemeine Transformationsgruppen verwendet, um Regularitätseigenschaften abstrakter nichtlinearer Gleichungen zu gewinnen.

2 Tumorwachstumsmodelle

Bei der Modellierung gewisser prävaskularer Karzinome werden die Tumorzellen als Partikel einer inkompressiblen Flüssigkeit, der Tumor selbst als ein sich bewegendes Gebiet betrachtet, dessen Geschwindigkeitsfeld proportional zum Druckgradienten ist. Die Zellproliferation erfolgt durch den metabolen Konsum eines durch den Tumor diffundierenden Nährstoffes, z.B. Sauerstoff oder Glukose. In den betrachteten Modellen wird die Proliferationsrate durch den Quellterm in der entsprechenden Kontinuitätsgleichung beschrieben. Schließlich wirken Oberflächenspannungskräfte dem inneren Druck entgegen.

Im Folgenden bezeichne $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ den Tumor zur Zeit t und $\vec{v}$ sein Geschwindigkeitsfeld. Die Nährstoffkonzentration zur Zeit t und im Punkt $x \in \Omega(t)$ wird mit $\sigma(t, x)$ und

die Proliferationsrate mit $f(\sigma)$ bezeichnet. Bei konstanter Dichte folgt dann aus der Massenbilanz die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{v} = f(\sigma) \quad \text{in} \quad \Omega(t),\ t \geq 0, \tag{2.1}$$

wobei $\operatorname{div} \vec{v}$ für die Divergenz oder Quellenstärke des Vektorfeldes $\vec{v}$ steht. Bezeichnen wir den Druck in $\Omega(t)$ mit $p(t,x)$ und dessen Gradienten mit $\nabla p(t,x)$, so besagt das Darcysche Gesetz, dass

$$\vec{v} = -\nabla p \quad \text{in} \quad \Omega(t),\ t \geq 0, \tag{2.2}$$

und wir erhalten

$$-\Delta p = f(\sigma) \quad \text{in} \quad \Omega(t),\ t \geq 0, \tag{2.3}$$

wobei $\Delta = \operatorname{div} \cdot \nabla$ für den Laplaceschen Operator steht. Jedem der in (2.1)–(2.3) auftretenden Differentialoperatoren liegt die Euklidsche Metrik in $\mathbb{R}^m$ zugrunde. Die Diffusion des Nährstoffes wird durch folgende partielle Differentialgleichung[2] beschrieben

$$\partial_t \sigma - \Delta \sigma + g(\sigma) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega(t),\ t \geq 0, \tag{2.4}$$

wobei $g(\sigma) > 0$ für die Konsumationsrate steht. Es bezeichne ferner $\Gamma(t)$ die Tumoroberfläche zur Zeit $t \geq 0$, d. h. $\Gamma(t)$ ist die Randmannigfaltigkeit des Gebietes $\Omega(t)$. Neben den Größen p und σ ist die Familie $\{\Gamma(t)\,;\, t > 0\}$ als weitere Unbekannte des Systems zu betrachten. Alle zu bestimmenden Größen sind durch die Randbedingungen

$$V = -\partial_\nu p, \qquad p = \gamma H \quad \text{auf} \quad \Gamma(t),\ t > 0 \tag{2.5}$$

gekoppelt. Hierbei steht ν für die äußere Einheitsnormale an $\Gamma(t)$ und $V = \vec{v} \cdot \nu$ für die Normalgeschwindigkeit der Familie $\{\Gamma(t)\,;\, t > 0\}$. Die Normalenableitung an $\Gamma(t)$ bzgl. ν bezeichnen wir mit ∂_ν. Die erste Gleichung in (2.5) ist somit eine Konsequenz aus dem Darcyschen Gesetz. Die zweite Gleichung in (2.5) besagt, dass die Oberflächenspannungskräfte proportional zum Krümmungsvektor der Tumoroberfläche wirken. Dabei steht H für die mittlere Krümmung[3] von $\Gamma(t)$ und γ für einen positiven Parameter, den sogenannten Oberflächenspannungskoeffizienten. Die Orientierung von H ist so gewählt, dass die mittlere Krümmung konvexer Gebiete nichtnegativ ist. Die als bekannt betrachtete Nährstoffkonzentration außerhalb des Tumors sei mit ψ bezeichnet. Dann ergibt sich die weitere Randbedingung

$$\sigma = \psi \quad \text{auf} \quad \Gamma(t),\ t > 0. \tag{2.6}$$

Schließlich wird angenommen, dass das System am Anfang der Evolution bekannt sei, d. h. es gelte

$$\Gamma(0) = \Gamma_0, \quad \sigma(0,\cdot) = \sigma_0, \tag{2.7}$$

wobei Γ_0 eine genügend reguläre Hyperfläche ist, die den Rand des Tumors Ω_0 zur Zeit $t = 0$ darstellt, und σ_0 für die Anfangsverteilung des Nährstoffs steht. Damit Nährstoff in den Tumor diffundieren kann, ist es sinnvoll die Beziehung $\sigma_0 \leq \psi$ zu fordern. An den Druck p ist keine Anfangsbedingung zu stellen; diese ist durch (Γ_0, σ_0) eindeutig festgelegt. In der Tat: Es bezeichne H_0 die mittlere Krümmung von Γ_0 und es sei $f_0 := f(\sigma_0)$. Dann ist der Druck p_0 zur Zeit $t = 0$ die eindeutig bestimmte Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$-\Delta p_0 = f_0 \quad \text{in} \quad \Omega_0, \qquad p_0 = \gamma H_0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_0.$$

Zusammenfassend erhalten wir folgendes System für das Tripel (p, σ, Γ):

$$\left\{\begin{array}{rcccl} -\Delta p & = & f(\sigma) & \text{in} & \Omega(t),\ t \geq 0, \\ \partial_t \sigma & = & \Delta\sigma - g(\sigma) & \text{in} & \Omega(t),\ t > 0, \\ V & = & -\partial_\nu p & \text{auf} & \Gamma(t),\ t > 0, \\ p & = & \gamma H & \text{auf} & \Gamma(t),\ t \geq 0, \\ \sigma & = & \psi & \text{auf} & \Gamma(t),\ t \geq 0, \\ \sigma(0,\cdot) & = & \sigma_0 & \text{in} & \Omega(0), \\ \Gamma(0) & = & \Gamma_0. & & \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Das obige Modell geht auf Greenspan [36, 37] und Byrne und Chaplain [10, 11] zurück. Für die Proliferations- bzw. Konsumationsrate f bzw. g werden in der Literatur verschiedene Ansätze vorgeschlagen. Die meisten Arbeiten betrachten lineare Raten der Form

$$f(\sigma) := \mu(\sigma - \widetilde{\sigma}), \qquad g(\sigma) = \lambda\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

mit positiven Konstanten $\mu, \widetilde{\sigma}, \lambda$. Die Bedeutung der Konstanten μ und λ ist offensichtlich. Auch die Rolle von $\widetilde{\sigma}$ lässt sich leicht erklären: Diese Konstante stellt einen Schwellenwert für die Zellproliferation dar. Gilt nämlich $\sigma < \widetilde{\sigma}$, so wirkt f als Senke und das Tumorvolumen wird in diesen Gebieten reduziert. Dies bedeutet, dass in diesem Fall zu wenig Nährstoff vorhanden ist, damit der Tumor wachsen kann. Im Fall $\sigma > \widetilde{\sigma}$ wirkt f als Quelle und das Tumorvolumen vergrößert sich in diesen Gebieten. Neben linearen Proliferationsraten wurden auch logistische Funktionen [11, 12] oder Polynome bzw. Potenzfunktionen [37, 57, 58] untersucht. Modifizierte Modelle und experimentelle Untersuchungen werden in den Arbeiten [47, 44, 49, 52, 41] dokumentiert.

Die ersten analytischen Resultate [36, 37, 10, 11] befassen sich mit rotationssymmetrischen Lösungen für ein durch räumliche Mittelung vereinfachtes System, in welchem die Randbedingungen für den Druck p durch eine Integrodifferentialgleichung für den Radius des Tumors ersetzt werden. Die ersten Untersuchungen für das volle System (2.8) gehen auf Bazaliy, Cui und Friedman zurück [31, 17, 18, 9, 8].

Theorem 2.1 *Es gelte (2.9). Ferner sei $\psi \equiv \overline{\sigma}$ konstant und es gelte $\widetilde{\sigma} < \overline{\sigma}$. Dann besitzt (2.8) eine eindeutig bestimmte rotationssymmetrische Gleichgewichtslage. Diese Lösung ist asymptotisch stabil, falls μ genügend klein ist.*

Die Nährstoffkonzentration außerhalb des Tumors wird durch $\overline{\sigma}$ beschrieben. Es ist deshalb nur dann Tumorwachstum zu erwarten, wenn – wie in Theorem 2.1 geschehen – vorausgesetzt wird, dass dieser Wert größer ist als der Schwellenwert $\widetilde{\sigma}$ für die Proliferation. Die Tatsache, dass im Fall $\widetilde{\sigma} \geq \overline{\sigma}$ kein Tumorwachstum möglich ist, kann wie folgt eingesehen werden. Es bezeichne $\mathrm{Vol}(t) := \int_{\Omega(t)} dx$ das Gesamtvolumen des Tumors zur Zeit t. Für klassische Lösungen des Systems (2.8) ist diese Funktion glatt, und ihre erste Ableitung ist durch

$$\frac{d\,\mathrm{Vol}(t)}{dt} = \int_{\Gamma(t)} V\, d\sigma(t)$$

gegeben. Nun gilt für die Normalgeschwindigkeit $V = -\partial_\nu p = -\nabla p \cdot \nu$. Unter Beachtung der ersten Gleichung in (2.8) mit $f(\sigma) = \mu(\sigma - \widetilde{\sigma})$ folgt deshalb aus dem Gaußschen Integralsatz:

$$\int_{\Gamma(t)} V \, d\sigma(t) = -\int_{\Gamma(t)} (\nabla p \cdot \nu) \, d\sigma(t) = -\int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \nabla p \, dx = \mu \int_{\Omega(t)} (\sigma - \widetilde{\sigma}) \, dx.$$

Weil die Konsumationsrate $g(\sigma)$ positiv ist, nimmt die Nährstoffkonzentration σ im Tumorinneren ab, d. h. es gilt[4]

$$\sigma(t,x) \leq \max_{y \in \Gamma(t)} \psi(y) \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega(t), \ t \geq 0. \tag{2.10}$$

In Theorem 2.1 wird die Situation $\psi \equiv \overline{\sigma}$ betrachtet, d. h. die Nährstoffkonzentration außerhalb des Tumors wird als konstant angesehen. Wir erhalten somit aus (2.10) die Beziehung

$$\frac{d\,\mathrm{Vol}(t)}{dt} \leq \mu \int_{\Omega(t)} (\overline{\sigma} - \widetilde{\sigma}) \, dx = \mu(\overline{\sigma} - \widetilde{\sigma}) \mathrm{Vol}(t).$$

Es folgt $d \ln(\mathrm{Vol}(t))/dt \leq \mu(\overline{\sigma} - \widetilde{\sigma})$, d. h. im Fall $\overline{\sigma} < \widetilde{\sigma}$ fällt das Volumen von $\Omega(t)$ mindestens exponentiell mit der Rate $\mu(\widetilde{\sigma} - \overline{\sigma})$.

In Theorem 2.1 werden lediglich kleine Störungen von Sphären als Anfangsgeometrien für Γ_0 zugelassen. Allgemeinere Anfangsbedingungen werden in [9] untersucht. Es wird nachgewiesen, dass (2.8) eindeutig klassisch lösbar ist, falls die Anfangsdaten genügend regulär sind. Trotz der hohen Regularität der Anfangsdaten konnte in [9] ein Regularitätsverlust der Lösungen nicht ausgeschlossen werden. Die Wohlgestelltheit des Systems (2.8) wurde abschließend durch folgendes Resultat geklärt:

Theorem 2.2 ([21]) *Es seien f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und Ω_0 bezeichne ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^m$, dessen Rand Γ_0 eine C^4-Hyperfläche sei. Ferner sei $\sigma_0 \in C^2(\overline{\Omega}_0)$ und $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bezeichne eine beschränkte und glatte Funktion. Dann besitzt das System (2.8) unter der minimalen Verträglichkeitsbedingung $\sigma_0|\Gamma_0 = \psi|\Gamma_0$ eine eindeutig bestimmte klassische Lösung (p, σ, Γ) auf dem (möglicherweise)[5] endlichen Zeitintervall $(0, T)$. Außerdem ist diese Lösung auf der Zeit-Raum Mannigfaltigkeit $\cup_{t \in (0,T)}(\{t\} \times \overline{\Omega}(t))$ glatt.*

Theorem 2.2 ist die Basis, um qualitative Eigenschaften der Lösungen des Systems (2.8), wie globale Existenz, Blow-up-Phänomene, Stabilitäts- oder Bifurkationseigenschaften von Gleichgewichtslagen zu studieren.

Die Modellierung gewisser in vitro Tumorzellkulturen basiert auf der folgenden, geometrisch etwas einfacheren Konfiguration, vgl. [41, 44, 47]. Dazu bezeichne $\Gamma_0 := \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ eine undurchlässige Schicht (z.B. den Boden einer Petri-Schale). Die Tumorzellkultur befindet sich dann im Gebiet

$$\Omega(t) := \Omega_\rho(t) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \, ; \, 0 < y < \rho(t, x)\},$$

mit einer unbekannten positiven Funktion $\rho(t, x)$. Die Nährstoffzufuhr erfolgt über die freie Randkomponente

$$\Gamma(t) := \Gamma_\rho(t) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}\,;\, y = \rho(t,x)\}.$$

Unter den folgenden vereinfachenden Voraussetzungen gelingt eine vollständige Analyse der Stabilitäts- und Bifurkationseigenschaften einer Klasse von Gleichgewichtslagen des Systems.

- Die Zeitskala des Tumorwachtums ist in der Regel deutlich größer als die Zeitskala der Diffusion des Nährstoffes. Dies rechtfertigt das Ersetzen der Diffusionsgleichung (2.4) durch die quasi-stationäre Approximation

$$\Delta\sigma = g(\sigma) \qquad \text{für } (x,y) \in \Omega_\rho(t),\ t > 0. \tag{2.11}$$

- Der Einfachheit halber soll ein räumlich zweidimensionales Modell diskutiert werden, welches außerdem in horizontaler Richtung als periodisch vorausgesetzt sei, d. h.

$$\sigma(t,x,y),\ p(t,x,y) \text{ und } \rho(t,x) \text{ sind } 2\pi\text{-periodisch in } x. \tag{2.12}$$

  Im Folgenden identifizieren wir 2π-periodische Funktionen mit Funktionen über dem Kreis $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

- Es gelte (2.9) und $\psi \equiv \overline{\sigma}$ sei konstant.

  Die Normalgeschwindigkeit der obigen Geometrie ist durch

$$V = \rho_t / \sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}$$

gegeben. Damit wird die dritte Gleichung in (2.8) zu $\partial_t\rho = -\nabla p \cdot \vec{\nu}$ mit $\vec{\nu} = (-\nabla\rho, 1)$. Insgesamt erhalten wir folgendes System:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \Delta\sigma & = & \sigma & \text{in} & \Omega_\rho(t),\ t > 0, \\ \Delta p & = & -\mu(\widetilde{\sigma} - \sigma) & \text{in} & \Omega_\rho(t),\ t > 0, \\ \partial_t\rho & = & -(\nabla p|\vec{\nu}) & \text{auf} & \Gamma_\rho(t)\ t > 0, \\ \sigma & = & \overline{\sigma} & \text{auf} & \Gamma_\rho(t),\ t > 0, \\ p & = & \gamma\kappa & \text{auf} & \Gamma_\rho(t),\ t > 0, \\ \partial_y\sigma & = & 0,\ \partial_y p = 0 & \text{auf} & \Gamma_0,\ t > 0, \\ \rho(0,\cdot) & = & \rho_0 & \text{in} & t = 0. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Um die folgenden Resultate präzise formulieren zu können, ist es hilfreich einige Bezeichnungsweisen einzuführen. Es bezeichne $C_+([0,T) \times \mathbb{S}^1)$ den Kegel der positiven Funktionen in $C([0,T) \times \mathbb{S}^1)$. Für jedes $\rho \in C_+([0,T) \times \mathbb{S}^1)$ setzen wir

$$D_{\rho,T} := \{(t,x,y)\,;\, t \in [0,T),\ x \in \mathbb{S}^1,\ 0 \le y \le \rho(t,x)\}.$$

Diese Menge stellt den natürlichen Definitionsbereich des Druckes p und der Nährstoffkonzentration σ dar. Es sei K eine kompakte glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann bezeichnen wir im Folgenden mit $C^{k+\alpha}(K)$ den üblichen Banachraum aller C^k-Funktionen, deren Ableitungen der Ordnung k gleichmäßig α-Hölder-stetig[6] sind.

Definition Ein Tripel (σ, p, ρ) heißt *Lösung* des Systems (2.13), falls $(\sigma, p) \in C(D_{\rho,T}) \times C(D_{\rho,T})$ und $\sigma(t,\cdot) \in C^{4+\alpha}(\overline{\Omega_\rho(t)})$, $p(t,\cdot) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega_\rho(t)})$ für jedes $t \in (0,T)$ und

$$\rho \in C([0,T), C^{3+\alpha}_+(\mathbb{S}^1)) \cap C^1((0,T), C^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)),$$

und falls dieses Tripel das System (2.13) punktweise in $D_{\rho,T}$ erfüllt. Eine Lösung (σ, p, ρ) heißt *flach*, falls jede der Funktionen σ, p und ρ in der x-Variablen konstant ist.

Theorem 2.3 ([15, 16]) *Es seien μ, $\widetilde{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ und γ positive Konstanten. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) (Wohlgestelltheit) *Für jedes $\rho_0 \in C^{3+\beta}_+(\mathbb{S}^1)$ mit $\beta > \alpha$ gibt es ein $T > 0$, so dass (2.13) eine Lösung (σ, p, ρ) auf $[0,T)$ besitzt. Diese Lösung ist in der Klasse $C(D_{\rho,T}) \times C(D_{\rho,T}) \times C([0,T), C^{3+\alpha}(\mathbb{S}^1))$ eindeutig bestimmt.*

Im Folgenden gelte $\widetilde{\sigma} < \bar{\sigma}$.

(b) (Flache Lösungen) *(i) Es gibt eine eindeutig bestimmte Konstante $\rho_* \in (0,\infty)$ und ein eindeutig bestimmtes Paar $(\sigma_*, p_*) \in C^\infty([0,\rho_*]) \times C^\infty([0,\rho_*])$, so dass (σ_*, p_*, ρ_*) eine flache Gleichgewichtslage des Systems (2.13) ist.*

(ii) Für $\rho_0 \in (0,\infty)$ bezeichne (σ, p, ρ) die Lösung zum Anfangswert ρ_0. Dann ist (σ, p, ρ) flach, existiert global, d. h. $T = \infty$, und es gibt positive Konstanten ω, K, $T_0 > 0$, so dass

$$|\rho(t) - \rho_*| \le K \exp(-\omega t), \qquad t \ge T_0.$$

(c) (Asymptotische Stabilität) *Es gibt ein $\gamma_* > 0$, so dass für $\gamma > \gamma_*$ die Gleichgewichtslage (σ_*, p_*, ρ_*) asymptotisch stabil ist, d. h. es gibt positive Konstanten ω, ε, K, so dass*

$$\begin{aligned} &\|\sigma(t,\cdot) - \sigma_*\|_{C^{4+\alpha}} + \|p(t,\cdot) - p_*\|_{C^{2+\alpha}} \\ &\qquad + \|\rho(t,\cdot) - \rho_*\|_{C^{4+\alpha}} \le K \exp(-\omega t), \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

falls $\|\rho_0 - \rho_*\|_{C^{4+\alpha}} < \varepsilon$.

(d) (Instabilität) *Gilt $0 < \gamma < \gamma_*$, so ist die Gleichgewichtslage (σ_*, p_*, ρ_*) instabil.*

(e) (Bifurkation) *Es gibt eine Nullfolge $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass jedes γ_k ein Bifurkationspunkt nicht-flacher Lösungen von der flachen Gleichgewichtslage (σ_*, p_*, ρ_*) ist, d. h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es in der Nähe von $(\gamma_k, \sigma_*, p_*, \rho_*)$ einen Zweig nicht-flacher Gleichgewichtslösungen. In den Punkten $\{\gamma > 0\,;\, \gamma \ne \gamma_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ findet keine Bifurkation statt.*

Bemerkung Die zweite Aussage in (b) besagt, dass die flachen Gleichgewichtslagen in der Klasse der *flachen Lösungen* für jeden Wert $\gamma > 0$ global stabil sind. Im Fall $\gamma \in (0, \gamma_*)$ folgt hingegen aus (d), dass die diese Gleichgewichtslagen gegenüber nicht-flachen Störungen aus $C^{4+\alpha}(\mathbb{S}^1)$ instabil sind. Dies verdeutlicht, dass der Klasse der flachen Lösungen (mit Ausnahme der flachen Equilibrien) eine nachgeordnete Stellung zukommt, da wesentliche dynamische Eigenschaften des Systems in dieser Klasse nicht beobachtet werden können.

3 Quasilineare Evolutionsgleichungen

Die Struktur der inhärenten Nichtlinearität freier Randwertaufgaben tritt deutlich zu Tage, wenn man diese Systeme auf ein festes Referenzgebiet transformiert. Dazu kann man etwa die sogenannte Hanzawa-Transformation zu verwenden, vgl. [39].

Es sei Σ eine kompakte geschlossene glatte orientierbare Hyperfläche des $\mathbb{R}^m$ mit dem äußeren Normalenfeld μ. Für hinreichend kleines $a > 0$ ist die Abbildung

$$X : \Sigma \times (-a, a) \to \mathbb{R}^{m-1}, \quad (p, r) \mapsto p + r\mu(p) \tag{3.1}$$

ein glatter Diffeomorphismus auf das Bild $\mathcal{R} := \mathrm{im}(X)$, d.h. $X \in \mathrm{Diff}^\infty(\Sigma \times (-a, a), \mathcal{R})$. Offensichtlich besteht $\mathcal{R}$ genau aus den Punkten in $\mathbb{R}^m$, deren Abstand zu Σ den Wert a nicht überschreitet. Deshalb lässt sich die Inverse X^{-1} in die metrische Projektion Ξ und den orientierten Abstand Λ zerlegen, d. h. $X^{-1} = (\Xi, \Lambda)$ und

$$\Xi \in C^\infty(\mathcal{R}, \Sigma) \quad \text{und} \quad \Lambda \in C^\infty(\mathcal{R}, (-a, a)). \tag{3.2}$$

Es sei nun $\rho \in C^2(\Sigma)$ mit $\|\rho\|_\infty < a$ und

$$\theta_\rho : \Sigma \to \mathbb{R}^m, \quad p \mapsto p + \rho(p)\mu(p).$$

Dann ist $\Gamma_\rho := \mathrm{im}(\theta_\rho)$ eine C^2–Hyperfläche und $\theta_\rho \in \mathrm{Diff}^2(\Sigma, \Gamma_\rho)$. Für spätere Zwecke halten wir fest, dass Γ_ρ auch die Nullstellenmenge der Funktion $\phi_\rho(x) := \Lambda(x) - \rho(\Xi(x))$ ist.

Wir bezeichnen das von Γ_ρ eingeschlossene Gebiet mit Ω_ρ und setzen außerdem $D := \Omega_{\rho \equiv 0}$. Das Gebiet D, dessen Rand Σ ist, dient uns als Referenzgebiet. Um (2.8) in ein System auf $\overline{D}$ transformieren zu können, muss der Diffeomorphismus θ_ρ geeignet ins Innere fortgesetzt werden. Diese Erweiterung bezeichnen wir mit Θ_ρ. Dabei kann man diese Erweiterung so konstruieren, dass Θ_ρ ein C^2–Diffeomorphismus von D auf das Gebiet Ω_ρ ist, d. h.

$$\Theta_\rho \in \mathrm{Diff}^2(D, \Omega_\rho) \quad \text{und} \quad \Theta_\rho|\Sigma = \theta_\rho.$$

Wir bezeichnen mit Θ_ρ^* den von Θ_ρ induzierten pull-back-Operator, d. h.

$$\Theta_\rho^* u := u \circ \Theta_\rho \quad \text{für} \quad u \in C(\Omega_\rho),$$

und mit Θ_*^ρ den entsprechenden push-forward-Operator, d. h.

$$\Theta_*^\rho v := v \circ \Theta_\rho^{-1} \quad \text{für} \quad v \in C(D).$$

Nun erklären wir die folgenden transformierten Differentialoperatoren

$$A(\rho)u := -\Theta_\rho^* \Delta(\Theta_*^\rho u) \quad \text{und} \quad B(\rho)u := \Theta_\rho^*(\nabla(\Theta_*^\rho u) \cdot \nabla\phi_\rho)$$

für $u \in C^2(D)$. Wir benötigen außerdem die Transformationen der Nichtlinearitäten f, g und des Krümmungsoperators H_{Γ_ρ}:

$$\hat{f}(u, \rho) := \Theta_\rho^* f(\Theta_*^\rho u), \ \hat{g}(u, \rho) := \Theta_\rho^* g(\Theta_*^\rho u) \quad \text{und} \quad H(\rho) := \Theta_\rho^* H_{\Gamma_\rho},$$

sowie die der Rand- und Anfangsdaten:

$$\chi(\rho) := \Theta_\rho^* \psi \quad \text{und} \quad v_0 := \Theta_{\rho_0}^* \sigma_0.$$

Diese Operatoren berücksichtigen die Transformationen der räumlichen Differentialoperatoren. Weil die Diffeomorphismen $\Theta_{\rho(t)}$ auch von der Zeit abhängen, entsteht aus der parabolischen Gleichung für σ ein zusätzlicher Term, den wir abkürzend mit $R(u, v, \rho)$ bezeichnen. Setzen wir schließlich $u := \Theta_\rho^* p$ und $v := \Theta_\rho^* \sigma$, so erhalten wir aus (2.8) das folgende System für die neuen Unbekannten (u, v, ρ):

$$\left\{\begin{array}{rcccl} A(\rho)u & = & \hat{f}(v,\rho) & \text{in} & J \times D, \\ \partial_t v + A(\rho)v & = & R(u,v,\rho) - \hat{g}(v,\rho) & \text{in} & J \times D, \\ \partial_t \rho + B(\rho)u & = & 0 & \text{auf} & J \times \Sigma, \\ u & = & H(\rho) & \text{auf} & J \times \Sigma, \\ v & = & \chi(\rho) & \text{auf} & J \times \Sigma, \\ v(0,\cdot) & = & v_0 & \text{in} & D, \\ \rho(0,\cdot) & = & \rho_0 & \text{auf} & \Sigma. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Im obigen System steht $J = [0, T)$ für das Zeitintervall, auf dem die Abbildungen u, v, ρ erklärt sind. Um die Darstellung zu vereinfachen, betrachten wir im Folgenden den in den Anwendungen wichtigen Spezialfall einer konstanten Nährstoffkonzentration außerhalb des Tumors, d. h. $\psi \equiv$ const. Eine einfache Translation zeigt, dass wir in dieser Situation den Wert der Konstanten 0 setzen können. Dies bedeutet, dass wir für v homogene Dirichletsche Randbedingungen betrachten können. Der allgemeine Fall $\psi \not\equiv$ const. bedarf einer etwas komplizierteren Behandlung, auf die wir hier nicht eingehen wollen, vgl. [21].

In einem nächsten Schritt führen wir in (3.3) eine Reduktion durch, in dem wir, bei gegebenem ρ und rechten Seiten $\widetilde{f}$ und h, das elliptische Randwertproblem

$$A(\rho)r = \widetilde{f} \quad \text{in} \quad D, \qquad \gamma r = h \quad \text{auf} \quad \Sigma, \tag{3.4}$$

für r lösen. Hierbei bezeichnet γ den Spur- oder Einschränkungsoperator auf D bzgl. Σ, d. h. $\gamma r := r|\Sigma$.

Für die folgenden Betrachtugnen ist es hilfreich, sogenannte Sobolevräume einzuführen. Diese (verallgemeinerten) Funktionenräume bilden den mathematischen Rahmen, welcher der variationellen Struktur vieler partieller Differentialgleichungen angepasst ist. Die Sobolevräume $W_q^k(D)$ mit $q \in (1, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$ sind die, bzgl. natürlicher Normen (im Fall $q = 2$ sogar Hilbertnormen) vervollständigten Räume glatter Funktionen. D.h. dem Vektorraum der glatten Funktionen werden „ideale Elemente" hinzugefügt, die als Grenzwerte bzgl. geeigneter Normen realisiert werden können.[7] Dabei gibt der Index k an, wieviele verallgemeinerten Differenzierbarkeitseigenschaften eine Sobolev-Funktion aus $W_q^k(D)$ besitzt. Es ist bekannt, dass sich die Elemente in $W_q^k(D)$ mit klassischen (gleichmäßig stetigen bzw. stetig differenzierbaren) Funktionen identifizieren lassen, falls k und q groß genug sind. Insbesondere können solche Sobolev-Funktionen auf den Rand von D eingeschränkt werden.[8] Es liegt in der Natur der Sache, dass man bei freien Randwertaufgaben an der genauen Randregularität interessiert ist. Dazu benötigen wir neben den Sobolevräumen auch die Besovräume $B_{qq}^s(\Sigma)$ mit $s \geq 0$ und $q \in (1, \infty)$, vgl. [55, 56]. Es ist nämlich bekannt, dass[9]

$$\gamma \in \mathcal{L}(W_q^s(D), B_{qq}^{s-1/q}(\Sigma)) \tag{3.5}$$

eine Retraktion ist, falls $s > 1/q$. Weil jede Retraktion surjektiv ist, folgt aus (3.5) ins-

besondere, dass die Skala der Besovräume das richtige Werkzeug ist, um die Randregularität der Elemente der Sobolevräume $W_q^k(D)$ zu messen: Für $u \in W_q^k(D)$ gehört $u|\Sigma$ zu $B_{qq}^{k-1/q}(\Sigma)$, und zu jedem $h \in B_{qq}^{k-1/q}(\Sigma)$ gibt es ein $u \in W_q^k(D)$ mit $u|\Sigma = h$.

Die klassische Theorie der elliptischen Randwertprobleme sichert außerdem, dass es zu jedem Paar $(\widetilde{f}, h) \in L_q(D) \times B_{qq}^{2-1/q}(\Sigma)$ eine eindeutige Lösung r von (3.4) in $W_q^2(D)$ gibt. Wir bezeichnen den entsprechenden Poisson- bzw. Potentialoperator mit $S(\rho)$ bzw. $T(\rho)$, d. h. für die Lösung r von (3.4) gilt $r = S(\rho)\widetilde{f} + T(\rho)h$. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir das zu (3.3) äquivalente System

$$\begin{cases} \partial_t v + A(\rho)v & = & R(r(v,\rho),v,\rho) - \widetilde{g}(v,\rho) & \text{in} & J \times D, \\ \partial_t \rho + B(\rho)T(\rho)H(\rho) & = & -B(\rho)S(\rho)\widetilde{f}(v,\rho) & \text{auf} & J \times \Sigma, \\ v & = & 0 & \text{auf} & J \times \Sigma, \\ v(0,\cdot) & = & v_0 & \text{in} & D, \\ \rho(0,\cdot) & = & \rho_0 & \text{auf} & \Sigma, \end{cases}$$

wobei wir die Abkürzung $r(v,\rho) = S(\rho)\widetilde{f}(v,\rho) + T(\rho)H(\rho)$ verwendet haben. Schließlich beachten wir, dass der Operator $H(\hat{\rho})$, der aus der mittleren Krümmung von Γ_ρ entstanden ist, eine quasilineare Struktur trägt. D. h. es gilt

$$H(\hat{\rho}) = P(\hat{\rho})\hat{\rho} + K(\hat{\rho}) \quad \text{für} \quad \hat{\rho} \in C^2(\Sigma),$$

wobei K und $[\hat{\rho} \mapsto P(\hat{\rho})]$ nichtlineare Operatoren erster Ordnung sind, der Operator $[\eta \mapsto P(\hat{\rho})\eta]$ hingegen linear und von zweiter Ordung ist. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich das folgende System

$$\begin{cases} \partial_t v + A(\rho)v & = & F_1(v,\rho) & \text{in} & J \times D, \\ \partial_t \rho + B(\rho)T(\rho)P(\rho)\rho & = & F_2(v,\rho) & \text{auf} & J \times \Sigma, \\ v & = & 0 & \text{auf} & J \times \Sigma, \\ v(0,\cdot) & = & v_0 & \text{in} & D, \\ \rho(0,\cdot) & = & \rho_0 & \text{auf} & \Sigma, \end{cases} \tag{3.6}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} F_1(v,\rho) &:= R(r(v,\rho),v,\rho) - \widetilde{g}(v,\rho)\,, \\ F_2(v,\rho) &:= -B(\rho)[S(\rho)\widetilde{f}(v,\rho) + T(\rho)K(\rho)] \end{aligned}$$

gesetzt haben. Das System (3.6) liegt nun in einer Form vor, die eine Behandlung im Rahmen der heutzutage gut ausgebauten Theorie der quasilinearen parabolischen Evolutionsgleichungen erlaubt. Wir stellen ein zentrales Resultat dieser Theorie in einer etwas vereinfachten Fassung kurz vor. Es bezeichne E_0 und E_1 Banachräume, so dass E_1 stetig eingebettet und dicht in E_0 ist. Ferner bezeichne $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ die Menge aller Operatoren $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$, so dass $-A$ als unbeschränkter Operator in E_0 mit Definitionsbereich E_1 eine starkstetige analytische Halbgruppe in $\mathcal{L}(E_0, E_0)$ erzeugt.[10] Außerdem benötigen wir sogenannte Interpolationsräume, die wir mit E_θ für $\theta \in (0,1)$ bezeichnen. Das folgende Resultat geht auf H. Amann zurück, vgl. [2]:

Theorem 3.1 *Es seien* $0 < \gamma \leq \beta < \alpha < 1$ *und* $T > 0$. *Ferner sei*

$$(\mathbb{A}, F) \in C^1([0,T] \times E_\beta, \mathcal{H}(E_1, E_0)) \times E_\gamma), \qquad u_0 \in E_\alpha.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes maximales $t^+ \in (0,T]$, *so dass das quasilineare parabolische Anfangswertproblem*

$$u' = \mathbb{A}(t,u)u + F(t,u), \quad t \in (0,T], \qquad u(0) = u_0.$$

eine eindeutig bestimmte Lösung

$$u := u(\cdot, u_0) \in C([0,t^+), E_\alpha) \cap C^1((0,t^+), E_0)$$

besitzt. Sind $\mathbb{A}$ *und* F *unabhängig von* t, *so induziert die Abbildung* $(t,u_0) \mapsto u(t,u_0)$ *ein dynamisches System auf* E_α.

Um (3.6) mit Theorem 3.1 lösen zu können, setzen wir

$$E_0 := L_q(D) \times B_{qq}^{1-1/q}(\Sigma), \quad E_1 := W_{q,0}^2(D) \times B_{qq}^{4-1/q}(\Sigma),$$

wobei $W_{q,0}^2(D) := \{v \in W_q^2(D)\,;\, v|\Sigma = 0\}$. Vermöge (3.5) ist $W_{q,0}^2(D)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W_q^2(D)$, also selbst ein Banachraum. Wählen wir $q > m+1$, so folgt aus dem Sobolevschen Einbettungsatz, dass $B_{qq}^{4-1/q}(\Sigma) \subset C^3(\Sigma)$. Für $\rho \in B_{qq}^{4-1/q}(\Sigma)$ mit $\|\rho\|_\infty < b$ sind die in (3.6) auftretenden Operatoren erklärt. Wir setzen deshalb $X := \{(v,\rho) \in E_1\,;\, \|\rho\|_\infty < b\}$ und definieren den quasilinearen Operator

$$\mathbb{A}(V)W := \Big(A(\rho)w, B(\rho)T(\rho)P(\rho)\eta\Big)$$

für $V = (v,\rho) \in X$ und $W = (w,\eta) \in E_1$, sowie

$$F(V) = \Big(R(r(v,\rho),v,\rho) - \widetilde{g}(v,\rho)\,, -B(\rho)[S(\rho)\widetilde{f}(v,\rho) + T(\rho)K(\rho)]\Big)$$

für $V = (v,\rho) \in X$. Mit Hilfe der Interpolationstheorie für Sobolev- und Besvoräume, sowie geeigneten Einbettungssätzen ist möglich, die nachstehenden Abbildungs- und Regularitätseigenschaften

$$(\mathbb{A}, F) \in C^\infty(X_\beta, \mathcal{L}(E_1, E_0), E_\gamma)$$

für geeignete Werte $\beta, \gamma \in (0,1)$ zu verifizieren. Auf die technischen Details sei hier verzichtet. Hingegen wollen wir noch einige Erläuterungen zur Generatoreigenschaft des linearen Operators $\mathbb{A}(V)$ (bei festem $V = (v,\rho) \in X$) anschließen. In der ersten Komponente besteht dieser Operator aus dem gleichmäßig elliptischen Operator $A(\rho)$, der die Ordnung zwei besitzt. Die Koeffizienten dieses Operators sind zwar nicht glatt, besitzen aber trotzdem genügend Regularität, um die bekannten parameter-abhängigen a-priori-Abschätzungen elliptischer Operatoren von Agmon-Douglis-Nirenberg anpassen zu können, um nachzuweisen, dass $A(\rho) \in \mathcal{H}(W_{q,0}^2(D), L_q(D))$. Die zweite Komponente $\Phi(\rho) := B(\rho)T(\rho)P(\rho)$ des Operators $\mathbb{A}(v)$ ist kein Differentialoperator, sondern ein Pseudodifferentialoperator dritter Ordnung auf der Mannigfaltigkeit Σ. Auch dieser Operator besitzt kein glattes Symbol in der Tangentialraumvariablen. Neuere Untersuchungen zeigen jedoch, dass $\Phi(\rho)$ parameter-elliptisch ist, und sogar einen beschränkten H_∞-Kalkül besitzt, vgl. [25]. Diese Resultate implizieren dann unmittelbar, dass $\Phi(\rho) \in \mathcal{H}(B_{qq}^{4-1/q}(\Sigma), B_{qq}^{1-1/q}(\Sigma))$.

Der Operator $\Phi(\rho)$ spielt auch in der Untersuchung des Systems (2.13) eine zentrale Rolle. Dabei spiegelt sich die sehr einfache geometrische Konfiguration auch in der Analysis wider: Die Linearisierung $L(\rho^*)$ von (2.13) über dem flachen Equilibrium ρ^* ist kein (echter) Pseudodifferentialoperator, sondern vielmehr ein Fouriermultiplikationsoperator. Mit der Fourierentwicklung

$$r(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

für $r \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ gilt nämlich

$$L(\rho^*)r(x) = \lambda_0 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei

$$\begin{aligned}\lambda_k = -\mu(\bar{\sigma} - \widetilde{\sigma}) + \mu\widetilde{\sigma}\rho_*[\sqrt{k^2+1}\tanh(\sqrt{k^2+1}\rho_*) - k\tanh(k\rho_*)] \\ +\gamma k^3 \tanh(k\rho_*), \quad k = 0,1,2,\dots\ .\end{aligned}$$

Aufgrund der genauen Kenntnis des Spektrums der Linearisierung $L(\rho^*)$ können allgemeine Resultate über das Verhalten quasilinearer parabolische Flüsse in der Nähe von Gleichgewichtslagen und Methoden der Bifurkationstheorie verwendet werden, um Theorem 2.3 zu beweisen, vgl. [15, 16, 45, 13].

4 Zähe Flüssigkeitstropfen

Es bezeichne $\Omega(t)$ einen Flüssigkeitstropfen, der sich frei unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{g}$ und der Oberflächenspannung bewege. Betrachtet man eine Newtonsche inkompressible Flüssigkeit mit konstanter Dichte ρ_f und Viskosität μ, so erfüllen das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ und der Druck p der Flüssigkeit die bekannten Navier-Stokesschen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\rho_f[\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}] - \mu\Delta\vec{v} + \nabla p &= \rho_f \vec{g} \\ \operatorname{div}\vec{v} &= 0\end{aligned}\right\} \text{ in } \Omega(t). \tag{4.1}$$

Mit dem hydrodynamischen Spannungstensor

$$T(\vec{v},p) := p\,\mathrm{id}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} - \mu[\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^\top],$$

dem Oberflächenspannungskoeffizienten γ und dem mittleren Krümmungsvektor $H\vec{\nu}$ an $\Gamma(t)$ gilt auf dem freien Rand $\Gamma(t)$ die Bedingung

$$T(\vec{v},p)\vec{\nu} = \gamma\vec{\nu} \quad \text{auf} \quad \Gamma(t). \tag{4.2}$$

Die Orientierungen sind dabei wie in Paragraph 2 festgelegt. In konkreten Anwendungen ist es wichtig, den Einfluss der Viskosität auf die konvektiven und äußeren Kräfte zu berücksitigen. Dazu wählt man eine charakteristische Länge L und einen Einheits-

vektor $\vec{e}$. Mit den nach Reynolds bzw. Bond benannten Größen $\mathrm{Re} = \rho_f L\gamma/\mu^2$ bzw. $\mathrm{B} = \rho_f L^2|\vec{g}|/\gamma$ erhält man aus (4.1) und (4.2) das folgende dimensionsfreie System:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}] - \Delta\vec{v} + \nabla p &= \mathrm{B}\vec{e} \quad \text{in } \Omega(t), \\ \operatorname{div}\vec{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega(t), \\ T(\vec{v},p)\vec{\nu} &= H\vec{\nu} \quad \text{auf } \Gamma(t). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Für zähe Flüssigkeiten, wie sie etwa bei viskosen Sinterprozessen auftreten, sind Werte für die Reynolds- und Bondzahl sehr klein und werden z.B. in [43] mit $\mathrm{Re} = 10^{-19}\ldots 10^{-21}$ und $\mathrm{B} = 10^{-6}\ldots 10^{-8}$ angegeben. Für diese Flüsse können sowohl der konvektive Term $\partial_t\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$, als auch der Einfluss der Gravitationskraft $\vec{g}$ vernachlässigt werden. Wir erhalten somit das folgende freie Randwertproblem für den Stokesschen Fluss:

$$\begin{aligned} -\Delta\vec{v} + \nabla p &= 0 \quad \text{in } \Omega(t), \\ \operatorname{div}\vec{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega(t), \\ T(\vec{v},p)\vec{\nu} &= H\vec{\nu} \quad \text{auf } \Gamma(t), \\ V &= \vec{v}\cdot\vec{\nu} \quad \text{auf } \Gamma(t), \\ \Gamma(0) &= \Gamma_0 \quad \text{in } t = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wie in Paragraph 3 kann das System (4.4) mit Hilfe des Diffeomorphismus θ_ρ zu einer Evolutionsgleichung auf der Referenzmannigfaltigkeit Σ für die Abstandsfunktion ρ reduziert werden:

$$\partial_t\rho + Q(\rho)\rho = 0, \quad \rho(0) = \rho_0, \tag{4.5}$$

wobei der Operator Q in lokalen Koordinaten folgende Darstellung besitzt:

$$Q(\rho)\sigma = [\partial_\alpha\sigma(\theta_\rho^*(\partial_i P^\alpha)) - \mu_i]\mathcal{S}^i(\rho). \tag{4.6}$$

In (4.6) wurden neben der Summationskonvention auch die Bezeichnungsweisen P und μ von (3.1) und (3.2) verwendet, und $\mathcal{S}(\rho)$ steht für den Lösungsoperator des transformierten vektorwertigen elliptischen Randwertproblems in (4.4). Offensichtlich ist der Operator $\sigma \mapsto Q(\rho)\sigma$ für festes ρ linear und von erster Ordnung. Ferner folgt aus den Abbildungseigenschaften des Operaotrs $\mathcal{S}(\rho)$, dass auch die nichtlineare Abbildung $\rho \mapsto Q(\rho)\sigma$ für festes σ von erster Ordnung ist. Somit kann (4.5) nicht im Rahmen von Theorem 3.1 behandelt werden: Der lineare Hauptteil ist hyperbolisch und erzeugt deshalb gewiss keine analytische Halbgruppe. Ferner ist die Nichtlinearität in Q dem linearen Anteil nicht untergeordnet. Dies bedeutet, dass (4.5) als voll-nichtlineare Evolutionsgleichung zu betrachten und entsprechend zu behandeln ist. Der nächste Abschnitt ist der analytischen Untersuchung solcher Aufgabenstellungen gewidmet.

5 Stetige maximale Regularität

Die auf Da Prato und Grisvard zurückgehende Theorie der stetigen maximalen Regularität bildet einen eleganten Zugang, um voll-nichtlineare parabolische Evolutionsglei-

chungen zu studieren. Im Folgenden soll eine kurze Einführung in diese Theorie gegeben werden. Dazu seien E_0 und E_1 Banachräume, so dass E_1 stetig eingebettet und dicht in E_0 ist. Ferner sei $D \subset E_1$ offen und

$$\Pi \in C^1(D, E_0) \quad \text{mit} \quad \partial\Pi(v) \in \mathcal{H}(E_1, E_0), \quad v \in D. \tag{5.1}$$

Hierbei bezeichnet $\partial\Pi(v)$ die Fréchet-Ableitung des (nichtlinearen) Operators Π an der Stelle v. Weil Π voraussetzungsgemäß Fréchet-differenzierbar ist, gilt

$$\partial\Pi(v)h = \frac{d}{d\varepsilon}\Pi(v+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}, \qquad v \in D,\ h \in E_1.$$

Für $T > 0$ seien

$$\mathbb{E}_0 := C([0,T], E_0), \qquad \mathbb{E}_1 := C([0,T], E_1) \cap C^1([0,T], E_0),$$

und $\gamma : \mathbb{E}_0 \to E_0,\ u \mapsto u(0)$ bezeichne den zeitlichen Spuroperator in $\mathbb{E}_0$. Man sagt, dass $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)$ ein Paar **maximaler Regularität** für $\partial\Pi(v)$ ist, falls die folgende Isomorphieeigenschaft erfüllt ist:

$$\left(\frac{d}{dt} + \partial\Pi(v), \gamma\right) \in Isom(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0 \times E_1), \quad v \in D. \tag{5.2}$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir nun das folgende Existenz- und Eindeutigkeitsresultat formulieren:

Theorem 5.1 *([19]) Es seien* (5.1) *und* (5.2) *für jedes $v \in D$ erfüllt. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in D$ und $f \in C(\mathbb{R}_+, E_0)$ ein eindeutig bestimmtes maximales $t^+ := t^+(u_0) > 0$ und eine eindeutige Lösung*

$$u := u(\cdot, u_0) \in C([0,t^+), D) \cap C^1([0,t^+), E_0) \tag{5.3}$$

des abstrakten Anfangswertproblemes

$$\frac{d}{dt}u + \Pi(u) = f, \qquad u(0) = u_0. \tag{5.4}$$

Bemerkung 5.2 a) Theorem 5.1 geht im wesentlichen auf Da Prato und Grisvard zurück, vgl. [19]. Eine interessante Erweiterungen von Theorem 5.1 wurde von Angenent [3] bewiesen.

b) Es ist zu beachten, dass Theorem 5.1 den „linearen" Fall $D = E_1$ und $\Pi \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ umfasst. In dieser Situation stimmt die Aussage von Theorem 5.1 mit der Voraussetzung (5.2) überein. Trotzdem ist es nicht offensichtlich, ob diese Voraussetzung für unbeschränkte Operatoren mit $E_1 \neq E_0$ verifiziert werden kann. In der Tat hat Baillon [7] gezeigt, dass im Fall $E_1 \neq E_0$ die Eigenschaft (5.2) nur dann richtig sein kann, falls E_0 eine isomorphe Kopie des Folgenraumes c_0 enthält. Nun ist bekanntlich jeder abgeschlossene Teilraum eines reflexiven Banachraumes selbst reflexiv. Weil c_0 aber nicht reflexiv ist, kann (5.2) somit in reflexiven Banachräumen nicht gelten. Es gehört zu den Hauptresultaten der Arbeit [19], dass Da Prato und Grisvard mit Hilfe des sogenannten **stetigen Interpolationsfunktors** $(\cdot,\cdot)^0_{\theta,\infty}$ nicht-reflexive Banachräume konstruiert haben, in welchen die Bedingung (5.2) verifiziert werden kann.

c) Im Folgenden soll kurz eine wichtige Skala von Banachräumen vorgestellt werden, die mit Hilfe der stetigen Interpolationsmethode realisiert werden kann. Dazu definieren wir für jedes $s \in \mathbb{R}$ die **kleinen Hölderräume** $buc^s(\mathbb{R}^m)$ durch

$$buc^s(\mathbb{R}^m) := \text{Abschließung von } BUC^\infty(\mathbb{R}^m) \text{ in } B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m).$$

Hierbei bezeichnen $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m)$ die üblichen Besovräume, vgl. [55]. Es ist bekannt, dass der Raum $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^m)$ im Fall $s > 0$, $s \neq \mathbb{N}$, mit dem klassischen Hölderraum $BUC^s(\mathbb{R}^m)$ übereinstimmt, vgl. Theorem 2.5.7 und Remark 2.2.2.3 in [55]. Mit diesen Bezeichnungen wird in [45], Theorem 1.2.17 gezeigt, dass

$$(BUC(\mathbb{R}^m), BUC^n(\mathbb{R}^m))^0_{\theta,\infty} = buc^{\theta n}(\mathbb{R}^m)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\theta \in (0,1)$ mit $\theta n \notin \mathbb{N}$.

d) Eine weitere Skala von Banachräumen, in welcher stetige maximale Regularität erwartet werden kann, sind die sogenannten kleinen Nikol'skiiräume. Diese Räume können als stetige Interpolationsräume zwischen den klassischen Besselpotentialräumen dargestellt werden, vgl. [19], Section 6 und [53], Section 6.

e) Es bezeichne Σ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann werden die kleinen Hölderräume $h^s(\Sigma)$ ebenfalls als Abschließung von $C^\infty(\Sigma)$ in $C^s(\Sigma)$ erklärt. Wie in c) gilt dann

$$(C(\Sigma), C^n(\Sigma))^0_{\theta,\infty} = h^{\theta n}(\Sigma)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\theta \in (0,1)$ mit $\theta n \notin \mathbb{N}$, vgl. Corollary 1.2.19 in [45].

f) Es bezeichne wiederum (Σ, d_Σ) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es ist bekannt, dass im Fall $\alpha \in (0,1)$ die klassische Höldernorm auf dem Raum $C^{k+\alpha}(\Sigma)$ eine Topologie erzeugt, die nicht separabel ist. Hingegen kann man zeigen, dass die kleinen Hölderräume $h^{k+\alpha}(\Sigma)$ sehr wohl separabel sind, vgl. [42]. Dies bedeutet insbesondere, dass $C^{k+\alpha}(\Sigma) \setminus h^{k+\alpha}(\Sigma) \neq \emptyset$. Außerdem besitzen die Räume $h^\alpha(\Sigma)$ die folgende intrinsische Charakterisierung

$$h^\alpha(\Sigma) = \{f \in C^\alpha(\Sigma)\,;\, \lim_{\delta \to 0} \sup_{x,y \in \Sigma,\, 0 < d_\Sigma(x,y) < \delta} \frac{|f(x) - f(y)|}{[d_\Sigma(x,y)]^\alpha} = 0\}.$$

Mit Hilfe dieser Charakterisierung erkennt man z.B. leicht, dass $x^\alpha \in C^\alpha([0,1]) \setminus h^\alpha([0,1])$.

g) Es sei $A \in \mathcal{H}(h^{k+l+\sigma}(\Sigma), h^{k+\sigma}(\Sigma))$ für $k, l \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (0,1)$. Ferner sei $\theta \in (\sigma, 1)$ und der (maximale) Definitionsbereich der $h^{k+\theta}(\Sigma)$-Realisierung von A sei $h^{k+l+\theta}(\Sigma)$. Setzen wir nun $E_0 := h^{k+\theta}(\Sigma)$ und $E_1 := h^{k+l+\theta}(\Sigma)$, so folgt aus Théorème 3.1 in [19], dass $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)$ ein Paar maximaler Regularität für A ist.

h) Es seien Σ und Q wie in (4.6) und A bezeichne die Fréchet-Ableitung des Operators $[\rho \mapsto Q(\rho)\rho]$ im Punkt ρ_0. Dann wird in Lemma 5.5 in [24] gezeigt, dass A ein Pseudodifferentialoperator erster Ordnung auf Σ ist, der für jedes $\theta \in (0,1)$ die Eigenschaft $A \in \mathcal{H}(h^{3+\theta}(\Sigma), h^{2+\theta}(\Sigma))$ besitzt. ■

6 Parabolische Regularisierung

Bevor wir die voll-nichtlineare Evolutionsgleichung (4.5) und somit auch das freie Randwertproblem (4.4) für den Stokesschen Fluss mit Hilfe von Theorem 5.1 lösen, wollen wir einen Regularitätssatz für die Lösungen des abstrakten Anfangswertproblemes (5.4) vorstellen. Eine wichtige Eigenschaft *linearer* parabolischer Differentialgleichungen, etwa der Wärmeleitungsgleichung besteht darin, dass die Lösungen solcher Gleichungen eine instantane räumliche Regularisierung erfahren. Dies bedeutet, dass die Lösungen zu jedem positiven Zeitpunkt bezüglich der räumlichen Variablen beliebig glatt sind, auch wenn der Anfangswert nur endliche Regularitätseigenschaften aufweist. Weil die Nichtlinearitäten der in Abschnitt 3 diskutierten Probleme den entsprechenden linearen Hauptteilen untergeordnet sind, ist es möglich mit sogenannten „bootstrapping" Argumenten nachzuweisen, dass auch diese quasilinearen Probleme die oben beschriebene Regularisierungseigenschaft haben. Im Gegensatz dazu liegt es gerade im Wesen der maximalen Regularität, dass solche bootstrapping Argumente nicht anwendbar sind: Die Lösung von (5.4) liegt im Funktionenraum (5.3), und der abstrakte Rahmen bietet keine weiteren Möglichkeiten eine Regularisierungseigenschaft der Lösungen nachzuweisen. Im Folgenden wird erläutert, dass eine solche Regularisierungseigenschaft trotzdem vorliegt, falls der nichtlineare Operator Π mit der Geometrie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit Σ in einem geeigneten Sinne verträglich ist. In diesem Fall gelingt es sogar nachzuweisen, dass die Lösungen reell-analytische Funktionen der Raum- und Zeitvariablen sind. Dazu seien im Weiteren

- Σ eine kompakte geschlossene analytische Mannigfaltigkeit der Dimension m,
- $\Pi \in C^\omega(D, E_0)$, und es gelten (5.1) und (5.2) für jedes $v \in D$,

wobei $C^\omega(D, E_0)$ die Gesamtheit aller reell-analytischen Abbildungen von D in E_0 bezeichnet, und E_0 und E_1 Banachräume von Funktionen über Σ sind, so dass

$$E_1 \subset C^1(\Sigma), \qquad E_1 \subset E_0 \subset C(\Sigma). \tag{A_1}$$

Wir wählen $u_0 \in D$ und bezeichnen mit u die eindeutig bestimmte Lösung von (5.4) auf $[0, t^+)$. Um die Darstellung zu vereinfachen behandeln wir nur den Fall $f \equiv 0$. Schließlich setzen wir

$$\hat{u}(t,p) := u(t)(p) \quad \text{für} \quad (t,p) \in [0,t^+) \times \Sigma. \tag{6.1}$$

Unser Ziel ist es, Regularitätseigenschaften von $\hat{u}$ zu beweisen, die über die von (5.3) hinausgehen. Dazu wählen wir $T \in (0, t^+)$ und setzen $I := [0, T]$. Die Hauptidee der folgenden Überlegungen besteht darin, durch geeignete Flüsse auf Σ Parameter in $\hat{u}$ einzuführen, deren Regularitätseigenschaften mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen genau studiert werden können. Bei dieser Vorgehensweise, die auf Angenent [3, 4] zurückgeht und in [27, 29, 22, 23] weiterentwickelt wurde, ist die maximale Regularität der Linearisierung von zentraler Bedeutung. Unabhängig von Angenents Arbeiten hat Masuda zur Untersuchung dreidimensionaler Navier-Stokesscher Gleichungen in festen Gebieten ebenfalls parameterabhängige Lösungen eingeführt und deren Regularität untersucht, vgl. [46].

Es bezeichne $\mathcal{V}^\omega(\Sigma)$ den Vektorraum aller reell-analytischen Vektorfelder über Σ. Weil Σ glatt und kompakt ist, gibt es aufgrund des Whitneyschen Einbettungssatzes ein N, so dass Σ glatt in $\mathbb{R}^N$ eingebettet ist. Weil die glatten Einbettungen außerdem offen sind in $C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^N)$ und $C^\omega(\Sigma, \mathbb{R}^N)$ in $C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^N)$ dicht liegt, gibt es eine reell-analytische Einbettung e von Σ in $\mathbb{R}^N$. Mit der entsprechenden Riemannschen pull-back-Metrik lässt sich nun eine parameter-abhängige Familie analytischer Flüsse auf Σ konstruieren, so dass die entsprechenden Vektorfelder das Tangentialbündel aufspannen. Genauer gilt (vgl. [24]):

Lemma 6.1 *Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Abbildung*

$$S \in C^\omega(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Sigma, \Sigma) \tag{6.2}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$S(\mu, t, \cdot) \in \mathrm{Diff}^\omega(\Sigma), \quad (\mu, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{6.3}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} S(\mu, t, p)|_{t=0} ; \mu \in \mathbb{R}^N \right\} = T_p\Sigma, \quad p \in \Sigma, \tag{6.4}$$

$$\left[\mu \mapsto \frac{\partial}{\partial t} S(\mu, t, \cdot)|_{t=0} \right] \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^N, \mathcal{V}^\omega(\Sigma)). \tag{6.5}$$

Bemerkung 6.2 Es gibt Situationen, in denen eine parameter-abhängige Familie analytischer Flüsse auf Σ mit den obigen Eigenschaften intrinsisch, und nicht über eine Einbettung konstruiert werden können. Ein einfaches Beispiel ist etwa der m-dimensionale Torus $\Sigma := \mathbb{T}^m := \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. Mit $N = m$ und

$$S(\mu, t, p) := p + t\mu$$

gelten offensichtlich (6.2)–(6.5). Diese einfache Konstruktion lässt sich allgemein auf global symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Ist Σ eine solche Mannigfaltigkeit und G die entsprechende endlich-dimensionale Liesche Gruppe, die analytisch und transitiv auf Σ operiert, so kann S wie folgt konstruiert werden

$$S(\mu, t, p) := \exp(t\mu^k X_k) \cdot p, \tag{6.6}$$

wobei $\{X_1, \ldots, X_N\}$ eine Vektorraumbasis der Lieschen Algebra von G bezeichnet und $\cdot$ für die Wirkung von G auf Σ steht, vgl. [29]. Es ist zu beachten, dass bei dieser Konstruktion keine Kompaktheitseigeschaften von Σ verwendet wurden. ■

Wir setzen nun

$$W_\mu(t)v := S(\mu, t, \cdot)^* v, \quad (\mu, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \ v \in E_j, \ j = 0, 1,$$

wobei wir der Einfachheit halber dieselbe Bezeichnungsweise für diese Operatoren auf E_0 bzw. auf E_1 verwenden. Die Flusseigenschaft von $S(\mu, \cdot, \cdot)$ impliziert unmittelbar, dass die Abbildung $[t \mapsto W_\mu(t)]$ eine Darstellung der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in $(\mathrm{Isom}(E_j), \circ)$ ist. Unsere nächste Voraussetzung stellt sicher, dass die linearen Operatoren $W_\mu(t)$ auf E_j beschränkt sind, und dass die Abbildung $[t \mapsto W_\mu(t)v]$ für jedes $v \in E_j$ stetig ist, d. h. wir verlangen, dass für jedes $\mu \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$[t \mapsto W_\mu(t)] \text{ ist eine starkstetige Gruppe auf } E_j, \ j = 0, 1. \tag{A_2}$$

Der starkstetigen Gruppe $\{W_\mu(t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ ist in eindeutiger Weise ein infinitesimaler Erzeuger zugeordnet, den wir mit A_μ bezeichnen. Es ist bekannt, dass A_μ ein abgeschlossener (im Allgemeinen jedoch unbeschränkter) Operator in E_0 ist, vgl. Theorem 1.6.3 in [48]. Somit ist der Definitionsbereich $\mathrm{dom}(A_\mu)$ von A_μ, versehen mit der Graphennorm von A_μ, ein wohldefinierter Banachraum. Unsere nächste Voraussetzung lautet nun

$$E_1 \hookrightarrow \mathrm{dom}(A_\mu) \quad \text{für jedes} \quad \mu \in \mathbb{R}^N. \tag{A_3}$$

Eine einfache Konsequenz aus (A_3) ist, dass

$$A_\mu \in \mathcal{L}(E_1, E_0) \quad \text{für jedes} \quad \mu \in \mathbb{R}^N. \tag{6.7}$$

Es sei $w \in E_1$. Mit $v_\mu := \frac{\partial}{\partial t} S(\mu, t, \cdot)|_{t=0}$ gilt dann wegen (A_1) und (A_3):

$$A_\mu w(p) = T_p w v_\mu, \quad p \in \Sigma.$$

Aufgrund der Eigenschaft (6.5) bildet $[(\mu, w) \mapsto A_\mu w]$ somit den Raum $\mathbb{R}^N \times E_1$ bilinear nach E_0 ab. Die nächste Voraussetzung stellt sicher, dass diese Abbildung beschränkt ist:

$$[(\mu, w) \mapsto A_\mu w] \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N \times E_1, E_0). \tag{A_4}$$

Es ist zu beachten, dass sich die Voraussetzungen (A_1) – (A_4) nur auf die Familie $S(\mu, \cdot, \cdot)$ und nicht auf den nichtlinearen Operator Π beziehen. Um die wesentliche Voraussetzung an den Operator Π formulieren zu können, sei

$$S_\mu := S(\mu, 1, \cdot) \in \mathrm{Diff}^\omega(\Sigma), \quad \mu \in \mathbb{R}^N. \tag{6.8}$$

Offensichtlich gilt $S_\mu = \exp(v_\mu)$, wobei $\exp : T\Sigma \to \Sigma$ die übliche Riemannsche Exponentialabbildung bezeichnet. Mit Hilfe der Diffeomorphismen S_μ führen wir die folgenden pull-back und push-forward Operatoren S_μ^* und $S_*^\mu := (S_\mu)_* = (S_\mu^{-1})^*$ auf den Funktionenräumen E_j, $j = 0, 1$ ein, d. h. wir setzen

$$S_\mu^* v = v \circ S_\mu \quad \text{und} \quad S_*^\mu v = v \circ S_\mu^{-1}, \quad v \in E_j,\ j = 0, 1.$$

Nun erklären wir

$$\Phi(\mu, v) := S_\mu^* \Pi(S_*^\mu v) \quad \text{für} \quad (\mu, v) \in \mathbb{R}^N \times D, \tag{6.9}$$

und fordern, dass es eine offene Nullumgebung O in $\mathbb{R}^N$ gebe mit

$$\Phi \in C^\omega(O \times D_0, E_0). \tag{A_5}$$

Beispiele 6.9 **a)** Eine wichtige Klasse von Operatoren die die Eigenschaft (A_5) besitzen, bilden äquivariante Operatoren auf global symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dabei nennen wir, mit den Bezeichnungen von Bemerkung 6.8, den Operator Π **äquivariant** bzgl. G, falls es eine offene Umgebung O des neutralen Elementes in G gibt mit $O \cdot D \subset D$ und

$$\Pi(g \cdot v) = g \cdot \Pi(v) \quad \text{für} \quad (g, v) \in O \times D,$$

wobei

$$g \cdot v : \Sigma \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto v(g \cdot p)$$

für die Gruppenwirkung von G auf Funktionen über Σ steht. Es sei nun S wie in (6.6). Dann impliziert die Äquivarianz von Π:

$$\Phi(\mu, v) = \exp(\mu^k X_k) \cdot \Pi(\exp(-\mu^k X_k) \cdot v) = \Pi(v).$$

Vermöge der Voraussetzung (5.1) ist (A_5) somit offensichtlich erfüllt. Konkrete Beispiele translations- und rotationsäquivarianter Operatoren werden in [27, 29, 20] diskutiert.

b) Es sei $\Phi(\rho) := Q(\rho)\rho$ für $\rho \in h^{2+\alpha}(\Sigma)$ mit dem zum Stokesschen Fluss gehörenden Operator Q, vgl. (4.5). Ein detailiertes Studium parameter-abhängiger pull-back Operatoren auf kleinen Hölderräumen über kompakten Mannigfaltigkeiten zeigt, dass der Operator Φ die Voraussetzung (A_5) erfüllt. Für die zum Teil technischen Details verweisen wir auf [24].

c) (Lokale Operatoren) Es sei $\pi \in C^\omega(\mathbb{R})$ und Π bezeichne den durch π induzierten Nemitskii-Operator, d. h. es gelte

$$\Pi(v)(p) := \pi(v(p)), \qquad p \in \Sigma.$$

Dann erfüllt Π offensichtlich die Voraussetzung (A_5).

d) Es seien $\Sigma = \mathbb{S}^1$ und $E_0 = h^\alpha(\mathbb{S}^1)$, $E_1 = h^{2+\alpha}(\mathbb{S}^1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Ferner seien $a \in h^\alpha(\mathbb{S}^1)$ und

$$\Pi(v) := a\partial^2 v, \quad v \in h^{2+\alpha}(\mathbb{S}^1),$$

wobei ∂ für die Ableitung nach dem Bogenlängenparameter steht. Weil $h^\alpha(\mathbb{S}^1)$ eine Banachalgebra ist, folgt sofort, dass $\Pi \in \mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\mathbb{S}^1), h^\alpha(\mathbb{S}^1))$. Für $v \in h^{2+\alpha}(\mathbb{S}^1)$ und $\mu \in \mathbb{R}$ gilt ferner

$$\Phi(\mu, v)(p) = a(p+\mu)\partial^2 v(p), \quad p \in \mathbb{S}^1.$$

Somit ist Π genau dann drehäquivariant, wenn der Koeffizient a konstant ist. In diesem Fall gilt (A_5), vgl. die obige Bemerkung a). Allgemeiner kann man zeigen, dass (A_5) für jedes $a \in C^\omega(\mathbb{S}^1)$ gilt. Hingegen ist die Abbildung $\Phi(\mu, v)$ für $a \in h^\alpha(\mathbb{S}^1) \setminus C^\infty(\mathbb{S}^1)$ nicht glatt in μ, und folglich kann die Eigenschaft (A_5) in diesem Fall nicht richtig sein. ■

Mit Hilfe der in Lemma 6.1 konstruierten Abbildung S lassen sich nun in der folgenden Weise Parameter in die Lösung u aus (6.44) einbauen. Es sei N wie Lemma 6.1 und

$$V := V(\varepsilon) := (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \mathbb{B}_{\mathbb{R}^N}(0, \varepsilon),$$

mit $\varepsilon > 0$. Für $(\lambda, \mu) \in V$ setzen wir

$$v_{\lambda,\mu}(t)(p) = \hat{u}(\lambda t, S(\mu, t, p)), \qquad (t, p) \in I \times \Sigma. \tag{6.10}$$

Wie bereits erwähnt kann aufgrund der maximalen Regularität der Linearisierung des Operators Π der Satz über implizite Funktionen in Banachräumen angewendet werden, um folgenes Resultat zu beweisen, vgl. [24]:

Proposition 6.4 *Es gibt ein* $\varepsilon_0 > 0$ *so dass* $[(\lambda, \mu) \mapsto v_{\lambda,\mu}] \in C^\omega(V(\varepsilon_0), \mathbb{E}_1)$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun leicht den folgenden Satz beweisen:

Theorem 6.5 *Unter den Voraussetzungen* (A_1)–(A_5) *gilt* $\hat{u} \in C^\omega((0,t^+) \times \Sigma)$.

Beweis: Es sei $(t_0, p_0) \in (0,T] \times \Sigma$. Vermöge Lemma 6.1 gibt es $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^N$ mit $\|b_k\| = 1$ für $k = 1, \dots, m$, so dass $(v_{b_1}, \dots, v_{b_m})$ eine Basis von $T_{p_0}\Sigma$ ist. Im Folgenden schreiben wir $\hat{\mu}\mathcal{B} := \sum_{k=1}^m \mu^k b_k$ für $(\mu^1, \dots, \mu^m) \in \mathbb{R}^m$. Außerdem setzen wir

$$\varphi : V(\varepsilon) \to (0,t^+) \times \Sigma, \quad (\lambda, (\mu^1, \dots, \mu^m)) \mapsto \big(\lambda t_0, S(\hat{\mu}\mathcal{B}, t_0, p_0)\big)$$

für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Aus Lemma 6.1 folgt dann, dass $\varphi \in C^\omega(V(\varepsilon), (0,t^+) \times \Sigma)$, und (6.5) impliziert die Beziehung

$$T_{(1,0)}\varphi(\xi, (\eta_1, \dots, \eta_m)) = t_0\Big(\xi, \sum_{k=1}^m \eta^k v_{b_k}(p_0)\Big) \in \mathbb{R} \times T_{p_0}\Sigma$$

für alle $(\xi, (\eta^1 \dots, \eta^m)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Somit ist $T_{(1,0)}\varphi$ bijektiv. Aufgrund des Satzes über die Umkehrabbildung folgt nun, dass für genügend kleines $\varepsilon > 0$ die Abbildung φ eine analytische Parametrisierung φ einer offenen Umgebung O von (t_0, p_0) in $(0,t^+) \times \Sigma$ ist.

Wegen (A_1) gilt $\mathbb{E}_1 \subset C(I, C(\Sigma))$. Folglich ist die Auswertungsabbildung

$$\mathbb{E}_1 \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto w(t_0)(p_0)$$

wohldefiniert. Vermöge Proposition 6.4 gilt deshalb

$$[(\lambda, \hat{\mu}) \mapsto v_{\lambda,\hat{\mu}\mathcal{B}}(t_0)(p_0)] \in C^\omega(V(\varepsilon), \mathbb{R}).$$

Andererseits zeigt (6.10), dass $\varphi^*\hat{u}(\lambda, \hat{\mu}) = v_{\lambda,\hat{\mu}\mathcal{B}}(t_0)(p_0)$ für $(\lambda, \hat{\mu}) \in V(\varepsilon)$. Dies impliziert $\hat{u} \in C^\omega(O, \mathbb{R})$ und folglich die Behauptung. ∎

Abschließend soll kurz erläutert werden, wie die Hauptresultate der Abschnitte 5 und 6 angewendet werden können, um nachzuweisen, dass der Stokessche Fluss (4.4) mit Oberflächenspannung für große Klassen von Anfangsdaten wohlgestellt ist, und die entsprechenden Lösungen reell-analytische Funktionen der Orts- und Zeitvariablen sind.

Theorem 6.6 *Es sei* $\alpha \in (0,1)$ *und für* $\rho_0 \in h^{3+\alpha}(\Sigma)$ *sei der Operator* $Q(\rho_0)\rho_0$ *erklärt. Dann gibt es ein* $T = T(\rho_0) > 0$, *so dass das Anfangswertproblem*

$$\partial_t \rho + Q(\rho)\rho = 0, \quad \rho(0) = \rho_0, \tag{6.11}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung

$$\rho = \rho(\cdot, \rho_0) \in C([0,T), h^{3+\alpha}(\Sigma)) \cap C^1([0,T), h^{2+\alpha}(\Sigma))$$

besitzt. Mit

$$\hat{\rho}(t,p) := \rho(t, \rho_0)(p) \quad \textit{für} \quad (t,p) \in (0,T) \times \Sigma$$

gilt außerdem

$$\hat{\rho} \in C^\omega((0,T) \times \Sigma).$$

Beweis: Vermöge der Bemerkungen 5.2 (g) und (h) folgt die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage unmittelbar aus Theorem 5.1.

Setzen wir $E_i := h^{2+i+\alpha}(\Sigma)$ für $i = 0, 1$, so überprüft man leicht, dass die Voraussetzungen (A_1)–(A_4) für jede Familie S gelten, die die Eigenschaften (6.2)–(6.5) erfüllt. Auf die Gültigkeit der Voraussetzung (A_5) wurde bereits in Beispiel 6.3(b) hingewiesen. Somit folgt die letzte Aussage aus Theorem 6.5 ∎.

Die Lösungen von (6.11) induzieren nun vermöge des Diffeomorphismus θ_ρ eine Familie offener Gebiete $\{\Omega(t)\,;\, t \in (0,T)\}$ in $\mathbb{R}^m$, so dass $\overline{\Omega}(t)$ für jedes $t \in (0,T)$ eine kompakte berandete Mannigfaltigkeit mit analytischer Randmannigfaltigkeit $\Gamma(t)$ ist. Außerdem gibt es ein Paar

$$(\vec{v},p) \in C(\mathcal{P}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} := \bigcup_{t\in[0,T)} (\{t\} \times \overline{\Omega}(t)),$$

so dass $(\vec{v}(t,\cdot),p(t,\cdot)) \in C^\omega(\overline{\Omega}(t), \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ für $t \in (0,T)$, und so dass $(\vec{v},p,\Gamma(\cdot))$ eine klassische Lösung von (4.4) ist.

Wie in vielen zweidimensionalen Modellen der Hydrodynamik ist es auch für den ebenen Stokesschen Fluss (4.4) möglich eine sogenannte Stromfunktion einzuführen, die mit funktionentheoretischen Methoden untersucht werden kann. Wird etwa das Anfangsgebiet Ω_0 von einer analytischen Kurve begrenzt, so können mit diesen Methoden ebenfalls analytische Lösungen für den Stokesschen Fluss (4.4) in der Ebene konstruiert werden. Für interessante Untersuchungen auf diesem Gebiet sei auf die Arbeiten [35, 5, 6, 51, 50, 34] verwiesen.

Anmerkungen

1 Halbgruppen sind ein Hilfsmittel zur funktionalanalytischen Beschreibung abstrakter dissipativer Systeme.

2 Differentialgleichungen vom Typ (2.4) werden als parabolisch bezeichnet. Hierbei steht $\partial_t\sigma$ für die partielle Ableitung von σ nach der Zeit und es gilt $\Delta\sigma = \sum_{j=1}^m \partial_j^2\sigma$, wobei $\partial_j^2\sigma$ die zweite partielle Ableitung von σ nach der j-ten Ortsvariablen bezeichnet.

3 Die mittlere Krümmung einer Hyperfläche ist das arithmetische Mittel der sogenannten Hauptkrümmungen.

4 Es sei darauf hingewiesen, dass die Eigenschaft (2.10) etwa keine a-priori-Forderung oder der Heuristik der Modellierung geschuldet ist. Sie ist vielmehr eine Konsequenz des parabolischen Maximumsprinzips, welches ein klassisches Werkzeug zur analytischen Untersuchung dieser partiellen Differentialgleichungen ist.

5 Nichtlineare Differentialgleichungen besitzen im Allgemeinen keine globalen Lösungen. Es können vielmehr sogenannte Blow-up-Phänomene auftreten, bei denen die Lösungen in endlicher Zeit eine Singularität entwickeln.

6 Hölder-stetige Funktionen können als Verallgemeinerungen Lipschitz-stetiger Funktionen betrachtet werden. Sie spielen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine zentrale Rolle.

7 E. Zeilder bietet dazu folgendenVergleich an: "*The introduction of Sobolev spaces corresponds to the introduction of real numbers by completion of the set of rational numbers via irrational numbers*", vgl. p. 127 in [59].

8 Es gibt Sobolev-Funktionen, die nicht stetig sind und für die eine Punktauswertung nicht sinnvoll erklärt werden kann.

9 Hierbei bezeichnet $\mathcal{L}(X, Y)$ den Banachraum aller linearen und beschränkten Abbildungen des Banachraumes X in den Banachraum Y.

10 Es ist bekannt, dass $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ ist. Im Folgenden statten wir $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ stets mit der von der Norm in $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ erzeugten Topologie aus, vgl. [1].

Literatur

[1] Amann, H.: *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Vol. I, Birkhäuser, 1995.

[2] Amann, H.: Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, in *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis*, H. J. Schmeisser & H. Triebel, editors, Teubner (1993), 9–126.

[3] Angenent, S.: Nonlinear analytic semiflows. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **115A** (1990), 91–107.

[4] Angenent, S.: Parabolic equations for curves on surfaces, Part I. Curves with p-integrable curvature. *Annals of Math.* **132** (1990) 451–483.

[5] Antanovskii, L.K.: Analyticity of a free boundary in plane quasi-steady flow of a liquid form subject to variable surface tension, in: *Proc. of Conference: The Navier-Stokes Equations II: Theory and Numerical Methods, Oberwolfach 1991,* Springer 1993, 1–16.

[6] Antanovskii, L.K.: Creeping thermocapillary motion of a two-dimensional deformable bubble: existence theorem and numerical simulation, *Eur. J. Mech., B/Fluids* **11** (1992) 6 741–758.

[7] Baillon, J. B.: Caractère borné de certains générateurs de semigroup linéaire dans les espaces de Banach, *C.R. Acad. Sc. Paris* **290 A** (1980), 757–760.

[8] Bazaliy, B., Friedman, A.: Global existence and asymptotic stability for an elliptic-parabolic free boundary problem: an application to a model of tumor growth. *Indiana Univ. Math. J.*, **52** (2003), 1265–1304.

[9] Bazaliy, B., Friedman, A.: A free boundary problem for an elliptic-parabolic system: application to a model of tumor growth, *Comm. Part. Diff. Equs.*, **28** (2003), 517–560.

[10] Byrne, H., Chaplain, M.: Growth of necrotic tumors in the presence and absence of inhibitors, *Math. Biosci.*, **135** (1996), 187–216.

[11] Byrne, H., Chaplain, M.: Free boundary value problems associated with the growth and development of multicellular spheroids, *European. J. Appl. Math.*, **8** (1997), 639–658.

[12] Byrne, H.: A weakly nonlinear analysis of a model of avascular solid tumor growth, *J. Math. Biol.*, **39** (1999), 59–89.

[13] Chow, S. N., Hale, J. K.: *Methods of Bifurcation Theory*, Springer, New York, 1982.

[14] Cui, S.: Global existence of solutions for a free boundary problem modelling the growth of necrotic tumors, *Interfaces and Free Boundaries*, **7** (2005), 147–159.

[15] Cui, S., Escher, J.: Well-posedness and stability of a multi-dimensional tumor growth model, preprint 2006.

[16] Cui, S., Escher, J., Zhou, F.: Bifurcation for a free boundary problem with surface tension modeling the growth of multi-layer tumors, preprint.

[17] Cui, S., Friedman, A.: Analysis of a mathematical model of the growth of necrotic tumors, *J. Math. Anal. Appl.*, **255** (2001), 636–677.

[18] Cui, S., Friedman, A.: A free boundary problem for a singular system of differential equations: an application to a model of tumor growth, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355** (2002), 3537–3590.

[19] Da Prato, G., Grisvard, P.: Equations d'évolution abstraites nonlinéaires de type parabolique, *Ann. Mat. Pura Appl.* **120** (1979), 329–396.

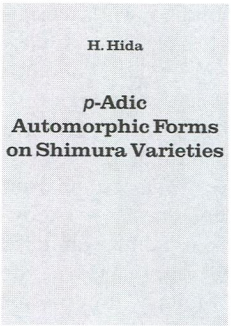
[20] Escher, J.: The intermediate surface diffusion flow on spheres, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **10** (2003), 28–47.

[21] Escher, J.: Classical solutions to a moving boundary problem for an elliptic-parabolic system, *Interfaces Free and Boundaries*, **6** (2004), 175–193.

[22] Escher, J., Prüß, J., Simonett, G.: A new approach to the regularity of solutions for parabolic equations, in *Evolution Equations*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **234**, M. Dekker, New York, 2003, 167–190.

[23] Escher, J., Prüß, J., Simonett, G.: Analytic solutions for a Stefan problem with Gibbs-Thomson correction, *J. reine angew. Math.* **563** (2003), 1–52.
[24] Escher, J., Prokert, G.: Analyticity of solutions to nonlinear parabolic equations on manifolds and an application to Stokes Flow, *J. math. fluid mech.* **8** (2006), 1–35.
[25] Escher, J., Seiler, J.: Bounded H_∞-calculus for pseudodifferential operators and applications to the Dirichlet-Neumann operator for non-smooth domains, erscheint in *Trans. AMS*.
[26] Escher, J., Simonett, G.: Maximal regularity for a free boundary problem, *NoDEA* **2** (1995), 463–510.
[27] Escher, J., Simonett, G.: Analyticity of the interface in a free boundary problem, *Math. Ann.* **305** (1996), 439–459.
[28] Escher, J., Simonett, G.: Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models, *SIAM J. Math. Anal.* **28** (1997), 1028–1047.
[29] Escher, J., Simonett, G.: Analyticity of solutions to fully nonlinear parabolic evolution equations on symmetric spaces, *J. Evolution Equations*, **3** (2004), 549–576.
[30] Escher, J., Simonett, G.: Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension, *Adv. Differential Equations* **2** (1997), 619–642.
[31] Friedman, A., Reitich, F.: Analysis of a mathematical model for the growth of tumors, *J. Math. Biol.*, **38** (1999), 262–284.
[32] Friedman, A., Reitich, F.:, Symmetry-breaking bifurcation of analytic solutions to free boundary problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353** (2000), 1587–1634.
[33] Friedman, A., Reitich, F.: On the existence of spatially patterned dormant malignancies in the model for the growth of non-necrotic vascular tumor, *Math. Models Appl. Sci.*, **11** (2000), 601–625.
[34] Friedman, A., Reitich, F.: Quasistatic motion of a capillary drop. I. The two-dimensional case, *J. Diff. Eq.* **178** (2002), 212–263.
[35] Garabedian, P. R.: Free boundary flows of viscous liquid, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 421–434.
[36] Greenspan, H.: Models for the growth of solid tumors by diffusion, *Stud. Appl. Math.*, **51** (1972), 317–340.
[37] Greenspan, H.: On the growth and stability of cell cultures and solid tumors, *J. Theor. Biol.*, **56** (1976), 229–242.
[38] Günther, M., Prokert, G.: Existence results for the quasistationary motion of a capillary liquid drop, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* **16** (1997) 311–348.
[39] Hanzawa, E. I.: Classical solution of the Stefan problem, *Tohoku Math. J.* **33** (1981), 297–335.
[40] Hirsch, M.W.: *Differential Topology*, Springer, Berlin, 1997.
[41] Kim, J. B., Stein, R. O'Hare, M. J.: Three-dimensional in vitro tissue culture models for breast cancer – a review, *Breast Cancer Research and Treatment*, **149** (2004), 1–11.
[42] Kneisel, C.: Der mittlere Krümmungsfluß in der Nähe von Sphären, Diplomarbeit, Universität Hannover, 2003.
[43] Kuiken, H. K.: Viscous sintering: the surface-tension-driven flow of a liquid form under the influence of curvature gradients at its surface, *J. Fluid Mech.* **214**, 503–515.
[44] Kyle, A. H., Chan, C. T. O., Minchinton, A. I.: Characterization of three-dimensional tissue cultures using electrical impedance spectroscopy, *Biophysical J.*, **76** (1999), 2640–2648.
[45] Lunardi, A.: *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Equations*, Birkhäuser, Basel, 1991.
[46] Masuda, K. On the regularity of solutions of the nonstationary Navier-Stokes equations, in: *Approximation Methods for Navier-Stokes Problems*, Lecture Notes in Mathematics **771**, 360–370, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
[47] Mueller-Klieser, W.: Three-dimensional cell cultures: from molecular mechanisms to clinical applications, *Am. J. Cell Physiol*, **273** (1997), 1109–1123.
[48] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 1983.

[49] Pettet, G., Please, C., McElwain, M.: The migration of cells in multicell tumor spheroids, *Math. Biol.*, **63** 2001, 231–257.
[50] Prokert, G.: On the existence of solutions in plane quasistationary Stokes flow driven by surface tension, *Euro. Journ. of Appl. Math.* **6** (1995) 539–558.
[51] Reissig, M., Wolfersdorf, L.v.: A simplified proof of a moving boundary problem for Hele-Shaw flows in the plane, *Arkiv för matematik* **31** (1992), 101–116.
[52] Sherrat, J., Chaplain, M.: A new mathematical model for vascular tumor growth, *J. Math. Biol.*, **43** 2001, 291–312.
[53] Simonett, G.: Center manifolds for quasilinear reaction-diffusion systems, *Differential and Integrals Equations* **8** (1995), 753–796.
[54] Solonnikov, V.A.: On quasistationary approximation in the problem of motion of a capillary drop, in: Escher, J., Simonett, G. (Eds.): *Topics in nonlinear analysis*, Birkhäuser 1999, 643–671.
[55] Triebel, H.: *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
[56] Triebel, H.: *Theory of Function Spaces II*, Birkhäuser, Basel, 1992.
[57] Ward, J., J. King, J.: Mathematical modeling of avascular tumor growth, *IMA J. Math. Appl. Biol. Med.*, **14** (1997), 53–75.
[58] Ward, J., J. King, J.: Mathematical modeling of avascular tumor growth II, *IMA J. Math. Appl. Biol. Med.*, **15** (1998), 1–42.
[59] Zeilder, E.: *Applied Functional Analysis. Application to Mathematical Physics*, Springer Verlag, New York, 1995.



H. Hida
p-Adic Automorphic Forms on Shimura Varieties

Berlin u.a., Springer, 2004, 390 S., € 89,95

The theory of modular forms (and, more generally, automorphic forms) was initially an analytic one, with examples such as Eisenstein series constructed as infinite sums which converged on the upper half plane. However, there were shades of algebra lurking in many of these analytic objects. For example the classical Eisenstein series of even integer weight $k \geq 4$ has the power series expansion

$$E_k(q) = \frac{\zeta(1-k)}{2} + \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function and $\sigma_{k-1}(n)$ denotes the sum of the $(k-1)$st powers of the positive divisors of n (note that q has become the traditional variable to use when writing power series expansions of modular forms). The function $\sigma_{k-1}(n)$ is far more familiar to number theorists than to analysts, and of course the zeta function also has classical links to number theory.

In fact there were even some indications of an arithmetic side to the story, perhaps starting with Ramanujan's observation that if

$$\Delta(q) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 + \cdots$$
$$= \sum_{m\geq 1} \tau(m) q^m$$

is the weight 12 modular form related to discriminants of elliptic curves, then then integers $\tau(m)$ satisfied

$$\tau(m) \equiv \sigma_{11}(m) \pmod{691}.$$

Note that $\zeta(-11) = 691/32760$ (explaining where this mysterious prime number came from) and Ramanujan's observation could hence be more succinctly expressed as

$$\Delta(q) \equiv E_{12}(q) \pmod{691}.$$

One had to wait until the 1960s before these (and many other) congruences between modular forms were explained conceptually. But then a lot of things happened at once. Modular forms are examples of automorphic forms for the group GL_2, and Langlands pointed out conjectural links between automorphic forms and Galois representations, thus giving a totally different way of studying modular forms. Parts of Langlands' conjectures were verified by Langlands himself, Eichler, Shimura and Deligne, so suddenly congruences between modular forms could be re-interpreted as congruences between Galois representations. A very concrete theory of mod p modular forms was developed by Serre and Swinnerton-Dyer. In fact, with the advent of Grothendieck's theory of schemes and subsequent developments in moduli spaces, one could even give a conceptual algebraic definition of a modular form over an arbitrary ring R, and one could recover the classical definition by letting R be the field of complex numbers. By letting R be the ring of integers modulo p^n and taking careful limits, Serre was able to construct infinite-dimensional Banach spaces of objects which became known as p-adic modular forms. These Banach spaces contained, and generalised, the spaces of classical modular forms, and gave p-adic information about these classical forms. As an example of their use, Serre used the Eisenstein series mentioned above to give a new construction of a p-adic analogue of the Riemann zeta function. Katz used Serre's spaces, and generalisations of them, to give conceptual explanations of the congruences that had been observed between modular forms, and also developed enough of a theory of p-adic Hilbert modular forms to enable himself, Deligne and Ribet to construct many new p-adic L-functions. Then,

after this period of intense activity, the uses of the p-adic theory seemed to dry up, to a large extent.

All this changed in the early 1980s when Haruzo Hida, a young Japanese mathematician, discovered a hitherto unexpected structure in the subspace of ordinary p-adic modular forms. Hida proved a finiteness theorem about these forms (thus getting some kind of control over an important part of the infinite-dimensional space of p-adic modular forms) and showed that ordinary p-adic modular forms moved naturally in p-adic families. This work was extremely important because it gives one a "new degree of freedom" in the theory of modular forms: when analysing a modular form, at least if it is ordinary, one can put it into what is now called a Hida family, and use the other forms in the family to shed light on the original form. One beautiful example of this was the work of Greenberg and Stevens, who managed to compute the derivative of the p-adic L-function associated to a certain type of modular form by putting the form in a family, computing the derivative with respect to the new variable instead, and then exploiting the fact that the resulting family of L-functions had a family of zeroes, enabling them to relate the derivative they had to the one one they wanted. Hida's work opened up this kind of possibility and still remains a very powerful tool for the analysis of classical modular forms (most recently, Wiles and others have related Hida's "big" Hecke algebras to certain abstractly-defined deformation rings, although these aspects of the theory are not covered in the book under review).

Over the past two decades, Hida and others have generalised his theory and constructed p-adic families of automorphic forms for many other groups. However, the moment one leaves the relative safety of the group GL_2, one runs into technical difficulties. Classically one has the Eichler-Shimura isomorphism, relating sections of line bundles on modular curves to the cohomology of congruence subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, and one can choose which of these objects one would like to p-adically interpolate. In Hida's original work he managed to construct families on both the geometric side and the cohomological side. However when one works with automorphic forms on a general reductive group, the Eichler-Shimura map may not even exist, and if it does, it may be far from being an isomorphism and one has to choose what to interpolate. If G "admits Shimura varieties" (roughly speaking, this is true for many symplectic and unitary groups but false for GL_n if $n > 2$) then one can try and use algebraic geometry to analyse automorphic forms for G, but there are still technical problems to be overcome before the theory can be made to start. For example the Shimura variety may not be a moduli space for abelian varieties, one may not have an analogue of a key intermediate result of Igusa and Ribet (irreducibility of the Igusa tower), the ordinary locus in the Shimura variety may be non-affine or (more seriously) too small, one may need a good understanding of compactification of the Shimura varieties in question, one certainly needs a good understanding of the reduction mod p of the varieties, and so on. On the other hand, the approach using group cohomology, although it will work in more general situations (for example for GL_n), becomes bogged down with problems of torsion in the cohomology, sometimes to the extent that one can say very little about the cohomology groups that one is interested in, and one has to restrict to cohomology in lower degrees. Historically Hida developed his theory geometrically for Hilbert modular forms, but then used cohomological methods for nearly a decade when generalising his results to GL_n over number fields.

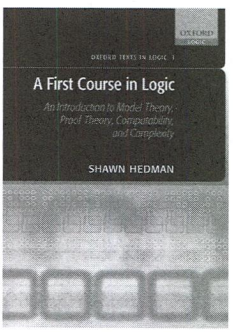
In the book under review however, Hida has returned to the geometric construction of p-adic families of ordinary forms. The advantage of this method is that, when it works, it produces very precise control theorems without errors involving torsion; this is essentially because one is using H^0 in coherent cohomology rather than H^n in group cohomology. The disadvantage is that, con-

trary to the cohomological approach which (modulo its relations to automorphic forms) is mainly group-theoretic, the geometric approach needs a deep understanding of moduli spaces of abelian varieties with extra structure, and their compactifications, both in characteristic 0 and characteristic p. Hida has recently solved many of these problems several papers that he wrote in the last few years, and the motivation of the book under review is to explain some of these ideas by working through them firstly in special cases, and then in more and more general situations.

We now turn to the contents of the book. After some introductory chapters about algebraic geometry, modular curves and modular forms, Hida gives a new proof of Igusa's theorem (irreducibility of the classical Igusa tower) in Chapter 3, and deduces, via techniques which are now standard, his (vertical) control theorem for ordinary p-adic modular forms. In Chapter 4 he shows that his proof of Igusa's theorem will generalise to give a proof of Ribet's theorem of the irreducibility of the Igusa tower in the Hilbert modular case, at least when p is unramified in the base field (although Ribet did not need this assumption when he proved this result in the 1970s). Hida goes on to deduce control theorems for p-adic Hilbert modular forms. After a chapter on the Eichler Shimura map isomorphism and its generalisation to certain other reductive groups, Hida uses his technique to prove irreducibility of the Igusa tower in the Siegel modular case (here the irreducibility result was already proved by Chai and Faltings), although he does not then go on to develop the control theorem for p-adic Siegel modular forms at this point. It should be noted that on the way he develops, or at least sketches the developent of, a lot of the machinery of quotients a la Mumford and toroidal compactifications. In the final two chapters Hida shows how far his techniques will go in the general case of a group G that admits Shimura varieties – and they go a long way. He axiomatizes the ingredients necessarily for the precise control theorem to work and then verifies that these axioms hold for a wide class of unitary and symplectic groups. He also proves an appropriate modification of Igusa's theorem which works in many unitary and symplectic cases. A remark for the experts: the theorems are perhaps not quite the most general possible: for example Hida must often assume that his group G is unramified at p, and some of his general control theorems, although they are precise (rather than up to torsion), only relate classical forms to p-adic ones for "sufficiently regular" weights, where there appears to be no explicit bound on exactly how large the weight must be for the theorems to apply. On the other hand, the results obtained are still strikingly strong.

Hida's theory has had many applications in the theory of classical modular forms, and as mathematics continues to mature, this more general theory will no doubt have similarly striking applications in the theory of automorphic forms.

London K. Buzzard



S. Hedman
A First Course in Logic
An introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity, Oxford Texts in Logic 1

Oxford University press, 2004, 431 S., £ 29,99

Es herrscht sicherlich kein Mangel an Einführungen in die mathematische Logik. Einige der vorhandenen Texte neigen jedoch, meiner Meinung nach, zu übertriebenem Formalismus, haben eine etwas eingeschränkte Stoffauswahl oder wirken inzwi-

schen etwas altmodisch. Das vorliegende Buch ist daher eine willkommene Ergänzung der Auswahl an einführenden Logikbüchern.

Bereits in der Einleitung wird deutlich, dass algorithmischen Aspekten der Logik viel Aufmerksamkeit gewidmet wird.

Das erste Kapitel befasst sich mit Aussagenlogik. Exemplarisch gehe ich auf dieses Kapitel etwas näher ein, als auf die folgenden. Im ersten Kapitel werden auch Konzepte wie die Induktion über den Formelaufbau und formales Beweisen eingeführt. Der vorgestellte Ableitungskalkül für die Aussagenlogik kennt nur Regeln und keine Axiome. Mit Hilfe des Kalküls werden zunächst die üblichen Regeln des logischen Schließens bewiesen, wie zum Beispiel Kontraposition und Fallunterscheidung, sofern sie nicht bereits Bestandteil des Kalküls sind. Nachdem die Korrektheit des Kalküls gezeigt wurde, wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem sich jede gegebene aussagenlogische Formel in konjunktive Normalform bringen lässt. Anschließend wird der Horn-Algorithmus vorgestellt, mit dem sich für jede Horn-Formel schnell entscheiden lässt, ob die Formel erfüllbar ist. Es wird angedeutet, dass das Erfüllbarkeitsproblem für allgemeine aussagenlogische Formeln (SAT) NP-vollständig ist. An dieser Stelle wird auch auf das siebte Kapitel verwiesen, in dem näher auf Fragen der Berechenbarkeit und Komplexität eingegangen wird. Gegen Ende des Kapitels wird noch ein Resolutionskalkül vorgestellt und seine Vollständigkeit bewiesen.

Die Vollständigkeit des zunächst eingeführten Kalküls wird schließlich aus der Vollständigkeit des Resolutionskalküls, das nur über die Erfüllbarkeit einzelner Formeln Auskunft gibt, und dem Kompaktheitssatz gefolgert. Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik wird mit Hilfe eines recht eleganten, für die geplante Anwendung maßgeschneiderten Lemmas, das sich bei näherem Hinsehen als Version von Königs Baumlemma entpuppt, bewiesen. Dieses Vorgehen ist insofern originell, als dass sonst oft der Kompaktheitssatz aus dem Vollständigkeitssatz gefolgert wird. Ich halte es aber zum Beispiel auch für akzeptabel, in einer Anfängervorlesung über mathematische Logik keinen Ableitungskalkül für die Aussagenlogik einzuführen und stattdessen auf das Wahrheitstafelverfahren zu verweisen. In diesem Falle muß man aber den Kompaktheitssatz für die Aussagenlogik direkt beweisen, zum Beispiel in der im vorliegenden Buch vorgestellten Weise.

Im zweiten Kapitel werden die Sprache und die Semantik der erststufigen Logik eingeführt. Als Beispiele für Strukturen dienen dabei nicht nur Graphen, lineare Ordnungen, Zahlensysteme und so weiter, sondern zum Beispiel auch relationale Datenbanken.

Das dritte Kapitel beinhaltet die Anfänge der Beweistheorie. Hier wird zunächst der im ersten Kapitel vorgestellte Ableitungskalkül für die Aussagenlogik zu einem Ableitungskalkül für erststufige Logik aufgestockt. Oft geht man einen anderen Weg, indem man alle aussagenlogischen Tautologien als Axiome in den prädikatenlogischen Kalkül aufnimmt. Die im vorliegenden Buch vorgestellten Kalküle kommen jedoch, wie schon im Falle der Aussagenlogik bemerkt, ohne Axiome aus. Nach einer eingehenden Diskussion von pränexer und Skolem-Normalform wird Herbrand-Theorie betrieben und Resolution für erststufige Logik eingeführt. Der Schluss des Kapitels ist der Logikprogrammierung mit Hilfe von Prolog und Otter gewidmet.

Im vierten Kapitel werden nach einem recht weiten Ausflug in die Mengenlehre und insbesondere die Kardinalzahlarithmetik die klassischen Sätze über erststufige Logik bewiesen: Vollständigkeitssatz, Kompaktheitssatz, Löwenheim-Skolem aufwärts und abwärts. Es werden auch einige etwas weniger bekannte Sätze zum Beispiel über die Amalgamierung von Strukturen gebracht. Abschließend wird an einigen Beispielen verdeutlicht, wie wenig ausdruckstark die erststufige Logik eigentlich ist.

In den Kapiteln 5 und 6 werden modelltheoretische Themen wie Kategorizität, Zu-

fallsgraph und 0-1-Gesetze, Quantorenelimination, Typauslassung und Stabilität besprochen.

Kapitel 7 ist Berechenbarkeit und Komplexität gewidmet. Hier werden sowohl die Grundlagen der Rekursionstheorie als auch der Komplexitätstheorie dargestellt. Das zu Grunde liegende Maschinenmodell nennt der Autor eine *T-Maschine*, im wesentlichen eine Registermaschine, die mit der Programmiersprache T^{++} programmiert wird. Die Äquivalenz von rekursiven und mit einer T-Maschine berechenbaren Funktionen wird bewiesen. Am Schluss des Kapitels werden die Klassen P und NP untersucht und einige Beispiele für NP-vollständige Probleme genannt.

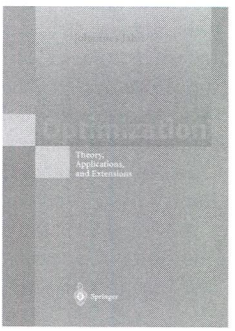
In Kapitel 8 werden die Gödelschen Unvollständigkeitssätze bewiesen. Kapitel 9 geht der Frage nach, was es über die erststufige Logik hinaus noch gibt. Es werden zweitstufige Logik und unendliche Logiken, sowie Fixpunkt-Logiken besprochen. In diesem Kapitel wird auch der Satz von Lindström bewiesen, der die hervorragende Rolle der erststufigen Logik zeigt.

Im Kapitel 10 geht es schließlich um endliche Modelltheorie. Während bisher algorithmische Aspekte der Logik im Zusammenhang mit automatischem Beweisen und dem Erfüllbarkeitsproblem (SAT) angesprochen wurden, geht es hier darum, Komplexitätsklassen mit Hilfe von Logiken zu beschreiben. Der wichtigste Satz in diese Richtung ist sicherlich der Satz von Fagin, der besagt, dass die Klasse NP, aufgefasst als Klasse von Grapheneigenschaften, genau die Klasse aller Eigenschaften ist, die sich mit einer zweitstufigen Formel der Form zweitstufiger Existenzquantor gefolgt von einer erststufigen Formel ausdrücken lassen. Man kann den Autor gar nicht genug dafür loben, diesen Satz in einer Einführung in die Logik zu bringen. Mir scheint sich der Satz von Faggin weder unter Logikern noch unter theoretischen Informatikern der angemessenen Bekanntheit zu erfreuen. Im zehnten Kapitel wird auch der Beweis der NP-Vollständigkeit von SAT nachgeholt.

Der vorliegende Text ist flüssig geschrieben, stellenweise witzig (der Name der Programmiersprache T^{++}) und gut lesbar. Es wird mehr argumentiert als gerechnet, ohne dass die Beweise unexakt wären. Die Auswahl der Themen ist recht umfangreich, ohne dass das Buch damit überladen wirkt. Es wird deutlich auf Stabilitätstheorie, automatisches Beweisen, Komplexitätstheorie und endliche Modelltheorie eingegangen, vermutlich die wichtigsten aktuellen Forschungsgebiete in der mathematischen Logik. Selbst in dem kurzen Abschnitt über Mengenlehre finden sich Verweise auf sehr tiefe, relativ frische Resultate in der Kardinalzahlarithmetik, die zwar faszinierend und wichtig sind, auf die man in einem einführenden Text über mathematische Logik allerdings verzichten könnte. Nicht erwähnt werden nichtklassische Logiken.

Abgesehen von einigen Schreibfehlern (Löwenhiem), macht das Buch einen recht sorgfältig geschriebenen Eindruck. Somit kann ich es wärmstens als Einführung in die mathematische Logik empfehlen. Auch eine Vorlesung ließe sich gut nach dem Buch halten, wenn man entsprechend viel weglässt, was aber angesichts des Aufbaus des Buches kein Problem sein sollte.

Berlin S. Geschke



J. Jahn
Vector Optimization, Theory, Applications and Extensions

Berlin u. a., Springer, 2004, 465 S., € 89,95

The book under review is dedicated to the theory of vector optimization in general

spaces. The aim of the book is to present a survey of modern and important results concerning theoretical foundations of vector optimization in a general mathematical setting, optimality conditions, applications in engineering and extensions to set-valued optimization.

The book starts in the first part with basic concepts and theoretical results from convex analysis that are important for developing optimization theory in general spaces. Several properties and assertions are motivated and explained at the example of vector-valued norms. After a introduction on the field of mappings on linear spaces (convex maps, differentiability, subdifferential) some fundamental theorems (Hahn-Banach theorem, separation theorems for convex sets, James theorem, Krein-Rutman theorems and Lyusternik theorem) are presented.

In the second part important results from theory of vector optimization are explained. An introduction of different solution concepts (minimal, strongly minimal, weakly minimal and properly minimal elements) is given. Using scalarization techniques necessary and sufficient conditions for optimal elements of a set are shown. The author introduces special parametric norms for scalarization and gives a complete characterization of minimal and weakly minimal elements in the general nonconvex case. Furthermore, existence results for optimal elements of a vector optimization problem are shown using Zorn's lemma and a scalarization techniques. Lagrange multiplier rules are proven for minimal and weakly minimal elements of a vector optimization problem. Moreover, the author presents a general duality principle and duality assertions for abstract convex vector optimization problems via scalarization methods. A specialization to abstract linear vector optimization problems is given.

The third part of the book is concerned with interesting applications of the theoretical results derived in the former chapters. For vector approximation problems the author shows Kolmogorov conditions and duality assertions. Furthermore, cooperative n player differential games are studied and necessary and sufficient conditions for optimal and weakly optimal controls are presented.

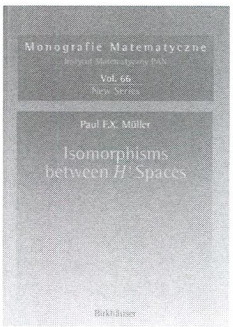
Engineering applications are considered in the fourth part of the book. This chapter introduces the basic concepts of multicriteria optimization. The author presents an interesting example from structural engineering, gives the definitions of several variants of the Edgeworth-Pareto optimality (weakly, properly, strongly and essentially Edgeworth-Pareto optimal points) and explains relations between these different concepts. Moreover, important scalarization results are shown, especially, the weighted sum and the weighted Chebyshev norm approach are investigated in detail. Furthermore, numerical methods are described. As a special application the author studies multiobjective design problems (design of antennas, design of FDDI (fiber distributed data interface) computer networks, a fluidized reactor-heater system and a cross-current multistage extraction process).

Finally, in part five some extensions to set-valued optimization are presented. General optimization problems with set-valued constraints or a set-valued objective function are closely related to problems in stochastic optimization, fuzzy theory and optimal control. Several optimality notions for a set-valued optimization problem are introduced. Furthermore, this chapter contains basic concepts and results from set-valued optimization: Differentiability notions, contingent epiderivatives, subdifferential and optimality conditions using contingent epiderivatives, subgradients and weak subgradients, especially Lagrange multiplier rules.

All at all, the book highlights very well recent developments in the field of active research, as well important and interesting topics like optimization theory in general spaces, optimality conditions and applications in engineering. The material is well presented, preliminaries are discussed in detail, and many illustrations help to understand

the complicated facts. The book may be warmly recommended to graduate students and researchers in optimization, numerical mathematics, operations research, engineering and other fields which apply optimization methods.

Halle C. Tammer



P. F. X. Müller
Isomorphisms between H^1 Spaces
Monogr. Matem. 66

Basel u. a., Birkhäuser, 2005, 453 S., € 98,–

Die Theory der Hardyräume H^p, also der Banachräume aller L^p-Funktionen auf dem komplexen Einheitskreis mit positiven Fourierkoeffizienten, gehört zum festen Bestand klassischer Analysis. Eine Sonderstellung kommt dabei dem Fall $p = 1$ zu. Hier hat es in den letzten drei Jahrzehnten eine stürmische Entwicklung gegeben. Es wurden neue und tiefliegende Erkenntnisse gewonnen wie etwa die Existenz einer unbedingten Basis und die Charakterisierung des Dualraums als Raum der BMO-Funktionen („bounded mean oszillation") mit Hilfe der Fefferman-Stein-Dualität. Gleichzeitig wurden neue Typen von H^1-Räumen eingeführt, etwa dyadische, atomare und martingale H^1-Räume, und deren Zusammenhänge untersucht. Einher damit ging die Diskussion wichtiger neuer Ungleichungen, der Interpolation von Integralkernoperatoren, banachraumtheoretischer Fragen und vieles andere mehr. Die hier gewonnenen Methoden sind auch interessant und hilfreich für benachbarte Gebiete der Analysis, so dass man im Zusammenhang mit H^1 eher von einem selbständigen Teilgebiet der Analysis als von einem einzelnen Banachraum analytischer Funktionen sprechen sollte.

All das rechtfertigt, den H^1-Räumen ein eigenständiges Buch zu widmen, welches die neu gewonnenen Ergebnisse an der Schnittstelle zwischen Fourieranalysis, Banachraum-, Wahrscheinlichkeits- und Operatortheorie übersichtlich darstellt und deren Beweise, die man sonst nur in Originalarbeiten findet, detailliert ausarbeitet. Dies wird im vorliegenden Buch durchgeführt.

Herausgekommen ist ein exzellentes Buch, welches das Potenzial besitzt, zu einem wichtigen Standardwerk der Analysis zu werden. Dem Verfasser gelingt es, auch die kompliziertesten Sachverhalte klar und verständlich darzustellen. Erreicht wird das u. a. durch eine konsequente Gliederung längerer Beweise, durch kurze Einführungen am Anfang eines jeden Abschnittes und Erläuterungen vor Beginn wichtiger technischer Aussagen. Auch scheut sich der Autor nicht, früher eingeführte Begriffe, welche später an anderer Stelle wieder gebraucht werden, dort noch einmal zu erklären. Ebenso hilfreich sind die historischen Notizen am Ende eines jeden Kapitels.

Das Buch ist eingeteilt in 6 Kapitel. Grundlage des gesamten Werkes ist das Haarsystem, welches zusammen mit dem Walshsystem im ersten Kapitel eingeführt wird. Hier werden u. a. auch die Ungleichungen von Khintchine, Burkholder, Fefferman und Hardy-Littlewood bewiesen. Ebenfalls in diesem Kapitel werden die Räume H^1 und BMO vorgestellt.

Kapitel 2 ist funktionalanalytischen Konzepten gewidmet. Es werden dort u. a. die bisher bekannten komplementären Teilräume von H^1 bestimmt. Als wichtiges banachraumtheoretisches Hilfsmittel wird fernerhin die Dekompositionsmethode von Pelczynski bewiesen, und es werden analytische Familien von Operatoren studiert.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit tiefen kombinatorischen Fragen im Zusammenhang

mit der „Carleson Packing Condition". Kapitel 4 gibt eine Isomorphieklassifizierung der martingalen H^1-Räume und untersucht Subsysteme des Haarsystems.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit isomorphen Invarianten von H^1. Hier wird u. a. gezeigt, dass H^1 die uniforme Approximationseigenschaft besitzt und dass BMO primär ist. Kapitel 6 schließlich diskutiert ausführlich atomare H^1-Räume und untersucht das Biorthogonalsystem von Carleson, welches sich in zahlreichen Fällen als unbedingte Basis herausstellt.

Viele der dargestellten Ergebnisse sind sehr tiefe Resultate der Analysis mit ungemein anspruchsvollen Beweisen, die man zum Teil zum ersten Mal in einem Lehrbuch findet. Es ist erstaunlich, wie gut es dem Verfasser gelingt, sie in lesbare Form zu bringen. Der Leser des Buches muss keine Spezialkenntnisse besitzen. Alles, was über die elementaren Grundlagen reeller und komplexer Analysis hinausgeht, wird hier explizit entwickelt.

Es ist dem Buch zu wünschen, dass es die Aufmerksamkeit erhält und ihm der Rang zugeordnet wird, den es verdient.

Paderborn W. Lusky

Teubner Studienbücher Wirtschaftsmathematik, hrsg. von Bernd Luderer

Klaus Neusser
Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften
2006. XVI, 264 S. Br. EUR 29,90
ISBN 978-3-8351-0117-3

Albrecht Irle/Claas Prelle
Übungsbuch Finanzmathematik
Leitfaden, Aufgaben und Lösungen zur Derivatbewertung
2007. 221 S. Br. EUR 24,90
ISBN 978-3-8351-0086-2

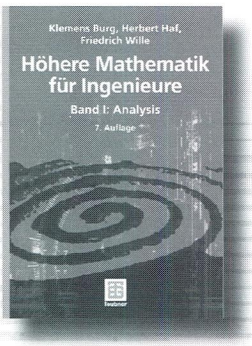
Heidrun Matthäus/
Wolf-Gert Matthäus
Mathematik für BWL-Bachelor
Schritt für Schritt mit ausführlichen Lösungen
2006. 318 S. Br. EUR 24,90
ISBN 978-3-8351-0099-2

Bernd Luderer/Uwe Würker
Einstieg in die Wirtschaftsmathematik
6., überarb. Aufl. 2005.
443 S. Br. EUR 24,90
ISBN 978-3-8351-0044-2

Stephan Dempe/
Heiner Schreier
Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
2006. 381 S. Br. EUR 34,90
ISBN 978-3-519-00448-6

Teubner
Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de

Mathematik in Beispiel, Theorie und Anwendung



Klemens Burg/Herbert Haf/
Friedrich Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure Band I

Analysis
7., überarb. u. erw. Aufl. 2006.
XVIII, 604 S. mit 230 Abb. Br.
EUR 39,90
ISBN 978-3-8351-0045-9

Inhalt

Grundlagen: Reelle Zahlen; Elementare Kombinatorik; Funktionen; Unendliche Folgen reeller Zahlen; Unendliche Reihen reeller Zahlen; Stetige Funktionen - Elementare Funktionen - Differentialrechnung einer reellen Variablen - Integralrechnung einer reellen Variablen - Folgen und Reihen von Funktionen - Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler - Integralrechnung mehrerer reeller Variabler

Burg/Haf/Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure Band II

Lineare Algebra
5., überarb. u. erw. Aufl. 2007.
XVIII, 415 S. Br. EUR 39,90
ISBN 978-3-8351-0111-1

Inhalt

Vektoren in der Ebene - Vektoren im dreidimensionalen Raum - Vektorräume - Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus - Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper - Vektorräume über beliebigen Körpern - Matrizenmultiplikation - Reguläre und inverse Matrizen - Determinanten - Spezielle Matrizen - Lineare Gleichungssysteme und Matrizen - Eigenwerte und Eigenvektoren - Die Jordansche Normalform - Matrix-Funktionen - Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen - Lineare Ausgleichsprobleme - Technische Strukturen - Roboter-Bewegungen

Burg/Haf/Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure Band III

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen
4., durchges. u. erw. Aufl.
2002. XIV, 437 S. Br. EUR 39,90
ISBN 978-3-519-32957-2

Inhalt

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Differentialgleichungen n-ter und Systeme 1. Ordnung - Ebene autonome Systeme - Lineare Differentialgleichungen - Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten - Potenzreihenansätze und Anwendungen - Rand- und Eigenwertprobleme - Distribution: Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs - Rechnen mit Distributionen - Anwendungen - Integraltransformationen: Fouriertransformation - Hilberttransformation - Diskrete und Schnelle Fouriertransformation - Laplacetransformation

Teubner Lehrbücher: einfach clever

Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de

Teubner

ISSN 0012-0456