106. Band Heft 4, Dezember 2004 D 20577

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

4 – 2004

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:

B. G. Teubner Verlag/GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:

Eva Brechtel-Wahl
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: eva.brechtel-wahl@gwv-fachverlage.de

Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 102,– (176,– sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Thomas Müntzer, Bad Langensalza

ISSN 0012-0456

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 106. Bd. 2004, Nr. 4

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

M. von Renteln: Dieter Gaier (1928–2002) in memoriam
V. Strassen: Komplexität und Geometrie bilinearer Abbildungen
G. Winkler: Don't Shed Tears over Breaks

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

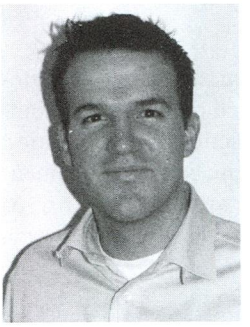
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 106. Bd. 2004, Nr. 4

Vorwort

In dem vorliegenden Heft 4 des Jahresberichts bieten wir Ihnen einen Übersichtsartikel von J.-H. Bruinier über Borcherds Produkte. Darin wird die Bedeutung der Borcherdsschen Methode der Produktdarstellung für die Theorie der automorphen Formen ausgehend von den klassischen Beispielen erläutert. Darüber hinaus finden Sie natürlich wie üblich eine Reihe von aktuellen Buchbesprechungen.

Mit diesem Heft verabschiedet sich das Herausgebergremium des Jahresberichts nach achtjähriger Tätigkeit von den Lesern. Unser Ziel war es, die Mathematik in ihrer ganzen Spannbreite den Lesern näher zu bringen, und wir hoffen, dass uns das gelungen ist. Gleichzeitig wünschen wir natürlich dem neuen Herausgeber K. Hulek für die Zukunft viel Erfolg.

A. Krieg



Infinite products in number theory and geometry

Jan Hendrik Bruinier

Abstract

- Keywords and Phrases: Infinite product, modular form, Hilbert modular surface, partition function, Green function, Eisenstein series, generating series, intersection number, Chow group
- Mathematics Subject Classification: 11F03, 11F27, 11F41, 14C17, 14C20, 11G18, 14G40

We give an introduction to the theory of Borcherds products and to some number theoretic and geometric applications. In particular, we discuss how the theory can be used to study the geometry of Hilbert modular surfaces.

Eingegangen: 20.11.2003

Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90,
D-50931 Köln, Germany. bruinier@math.uni-koeln.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Introduction

Infinite products play an important role in many branches of mathematics. In number theory, they for instance provide an elegant way of encoding and manipulating combinatorial identities. The product expansion of the generating function of the partition function is a well known example. On the other hand, infinite products are a fundamental tool in complex analysis to construct meromorphic functions with prescribed zeros and poles, the Weierstrass product theorem being a prominent example. In that way, they become interesting for the study of geometric problems.

In the first part of the present paper we will present some examples of particularly interesting infinite products, called Borcherds products, which are characterized by a striking symmetry property: They are modular forms for the orthogonal group of a suitable rational quadratic space of signature $(2, \ell)$. Although some very classical modular forms appear here, as for instance certain Eisenstein series or the j-function, most of these product expansions were only discovered rather recently by R. Borcherds [Bo1, Bo4].

We will then consider more systematically the properties of Borcherds products on Hilbert modular surfaces. They can be used to recover important classical results on the geometry of such surfaces. In addition, they provide a new approach to various arithmetic questions.

Hilbert modular surfaces can be realized as arithmetic quotients associated to certain rational orthogonal groups of signature $(2, 2)$. In particular, they are just very special instances of those Shimura varieties that can be obtained as quotients from orthogonal groups of signature $(2, \ell)$, the general setting of Borcherds' theory. However, we feel that focusing on such a special case facilitates the presentation of central ideas. Moreover, the geometry of Hilbert modular surfaces is particularly beautiful. Most of the results stated in sections 2–7 actually hold in greater generality.

The present paper is not intended to be a survey on Borcherds products. It only covers a small part of the many interesting aspects of the theory. For further expository articles, in particular for the connection to generalized Kac-Moody algebras, we refer to [Bo2], [Bo3], [Bo5], [Ko].

I would like to thank E. Freitag, W. Kohnen, S. Kudla, and U. Kühn for many stimulating discussions and valuable suggestions.

2 Infinite products and elliptic modular forms

Recall that an infinite product

$$(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)\ldots$$

is said to converge absolutely, if the underlying series

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

converges absolutely. With this definition, an absolutely convergent infinite product vanishes, if and only if one of its factors vanishes. So for instance the product

$$h(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

converges absolutely for any complex number q with $|q| < 1$ and does not vanish there. Its underlying series is the geometric series $\sum_{n\geq 1} q^n$.

This first example already has very interesting combinatorial and geometric properties. The function $1/h(q)$ is holomorphic for $|q| < 1$ and hence can be expanded in an infinite series

$$1/h(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + \dots.$$

It is easily verified that the function $p(n)$ is the so called partition function. It counts the number of ways a positive integer n can be written as a sum of positive integers. The number of summands is unrestricted, repetition is allowed, and the order of the summands is not taken into account. For instance there are 5 partitions of 4, namely 4, $3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$.

The arithmetic of partitions is quite involved and there are a number of unsolved questions about them (see e.g. [On]). One reason is that the partition function grows rather rapidly. This is not apparent from the first few values give above, but a quick computation (using e.g. Maple) shows that for instance $p(100) = 190\,569\,292$. In fact the celebrated Hardy-Rademacher-Ramanujan asymptotic states

$$(2.1) \quad p(n) \sim \frac{e^K\sqrt{n}}{4n\sqrt{3}}$$

as $n \to \infty$, where $K = \pi\sqrt{2/3}$ (c.f. [Ap] chapter 5). This follows from the fact that $1/h(q)$ is closely related to a (weakly holomorphic) modular form of weight $-1/2$. The Fourier coefficients of such modular forms satisfy similar asymptotics in general.

In a different direction, if we put $q = e^{2\pi i\tau}$ for τ in the upper complex half plane $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C};\ \Im(\tau) > 0\}$, we are lead to the discriminant function

$$(2.2) \quad \Delta(\tau) = q \cdot h(q)^{24} = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}.$$

Since the product converges (locally uniformly) absolutely, it defines a nowhere vanishing holomorphic function on $\mathbb{H}$. Moreover, Δ has a striking symmetry property with respect to the action of the modular group $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on $\mathbb{H}$ by Moebius transformations $\tau \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. It satisfies

$$\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{12}\Delta(\tau), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

(for a simple proof see [Ko]).

To put this in a suitable context, we recall some basic notions of the theory of modular functions (see e.g. [Sh], [Ma], [Ap] for more details). Let k be an integer, Γ a subgroup of finite index of $\Gamma(1) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, and χ an Abelian character of Γ. A function $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ is called a *weakly holomorphic modular form* (of weight k with respect to Γ and χ), if

(1) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \chi(\gamma)(c\tau+d)^k f(\tau)$ for all $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$,
(2) f is holomorphic on $\mathbb{H}$,
(3) f is meromorphic at the cusps of Γ.

We do not want to explain the last condition in too much detail. If $\Gamma = \Gamma(1)$ (which is all we need in this section), then any function f satisfying the first two conditions has a Fourier expansion

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) q^n,$$

because $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$. Now the third condition means that only finitely many $c(n)$ with $n < 0$ are non-zero. If actually all $c(n)$ with $n < 0$ (respectively $n \leq 0$) vanish, then f is called a *holomorphic modular form* (respectively *cusp form*) for $\Gamma(1)$. If Γ has only finite index in $\Gamma(1)$, one has to require similar conditions for finitely many $\Gamma(1)$-translates of f corresponding to the cusps of Γ, i.e., the Γ-orbits of $P^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \infty$.

We write W_k (respectively M_k, S_k) for the space of weakly holomorphic modular forms (respectively holomorphic modular forms, cusp forms) of weight k for $\Gamma(1)$ with trivial character. One can show that $M_k = \{0\}$ for $k < 0$ or k odd, $M_0 = \mathbb{C}$, and $M_2 = 0$.

The properties of Δ stated above can be summarized by saying that Δ is a cusp form of weight 12 for $\Gamma(1)$ with trivial character, i.e., an element of S_{12}.

Further examples of modular forms are provided by Eisenstein series. If k is an even integer, $k > 2$, we define the Eisenstein series of weight k for $\Gamma(1)$ by

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ \gcd(c,d)=1}} (c\tau + d)^{-k}.$$

By comparison with a suitable integral, one checks that E_k converges normally and defines a holomorphic function on $\mathbb{H}$. Consequently the transformation behavior of a modular form of weight k easily follows by reordering the summation. The Fourier expansion of E_k can be computed by means of the partial fraction expansion of the cotangens. One finds that

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

where B_k denotes the k-th Bernoulli number and $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ the usual divisor sum function. In particular E_k is a (non-zero) holomorphic modular form of weight k for $\Gamma(1)$. As a consequence we get the decomposition $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ for $k > 2$. The non-vanishing of Δ on $\mathbb{H}$ implies that we have an isomorphism

$$S_k \to M_{k-12}, \quad f \mapsto f/\Delta.$$

It can be deduced that the graded algebra $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$ of modular forms for $\Gamma(1)$ is a polynomial ring in E_4 and E_6.

To get a more geometric interpretation of modular forms for $\Gamma \subset \Gamma(1)$, one considers the modular curve associated with Γ, that is, the quotient $Y_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. The complex

structure of $\mathbb{H}$ induces a structure as a non-compact Riemann surface on Y_Γ. One obtains a compact Riemann surface X_Γ by adding finitely many points, namely the cusps of Γ. Every compact Riemann surface X has a natural structure as a projective algebraic variety over $\mathbb{C}$. The Zariski topology is given by taking for the closed sets the finite subsets of X together with X itself. The structure sheaf $\mathcal{O}$ is given by taking for the regular functions $\mathcal{O}(U)$ on an open subset $U \subset X$ all meromorphic functions on X, which are holomorphic on U.

The modular curves Y_Γ and X_Γ associated to certain families of "congruence subgroups" Γ can actually be defined over algebraic number fields and even over their rings of integers (see [Sh], [DeRa], [DI]). This is due to their moduli interpretation. For instance, the modular curve $\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}$ is the (coarse) moduli space of isomorphism classes of elliptic curves over $\mathbb{C}$. In fact, by the theory of the Weierstrass $\wp$-function, an elliptic curve over $\mathbb{C}$ is a torus, which in turn is given by a quotient $\mathbb{C}/L$, where $L \subset \mathbb{C}$ is a lattice. Two elliptic curves $\mathbb{C}/L$ and $\mathbb{C}/L'$ are isomorphic, if and only if $L = aL'$ for some $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. In particular every isomorphism class has a representative $\mathbb{C}/L_\tau$, where $L_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ and $\tau \in \mathbb{H}$. It is easily checked that two elliptic curves $\mathbb{C}/L_\tau$ and $\mathbb{C}/L_{\tau'}$ with $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ are isomorphic, if and only if τ is equivalent to τ' with respect to the action of $\Gamma(1)$ on $\mathbb{H}$ (this corresponds to a change of basis of the lattice). Hence the assignment $\tau \mapsto \mathbb{C}/L_\tau$ induces the identification of $\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}$ with the moduli space. The point is that the moduli problem makes sense not only over $\mathbb{C}$ but over any scheme over $\mathbb{Z}$, allowing to construct models over Dedekind rings.

We may regard Δ as a section of the line bundle of modular forms of weight 12 on $\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}$. In view of the moduli interpretation one checks that Δ assigns to the elliptic curve $\mathbb{C}/L_\tau$ its discriminant $\Delta(\tau)$.

A further classical modular form is the j-function:

$$j(\tau) = E_4^3(\tau)/\Delta(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \ldots.$$

Since Δ does not vanish on $\mathbb{H}$, the j-function is holomorphic on $\mathbb{H}$. However, because of the presence of the term q^{-1} in the Fourier expansion, it is only meromorphic at the cusp ∞. Hence $j \in W_0$. In terms of the moduli interpretation, j assigns to the elliptic curve $\mathbb{C}/L_\tau$ its j-invariant $j(\tau)$. In the theory of elliptic curves one shows that j classifies elliptic curves over an algebraically closed field up to isomorphism. Moreover, for every $z \in \mathbb{C}$ there is an elliptic curve with prescribed j-invariant z. In other words, j defines an analytic isomorphism

$$\Gamma(1)\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

It extends to an isomorphism $X_{\Gamma(1)} \to P^1(\mathbb{C})$ to the Riemann sphere $P^1(\mathbb{C})$.

What does j have to do with infinite products? There are different important infinite products involving j. Here we only present one of these. To this end it is convenient to define $J(\tau) = j(\tau) - 744 \in W_0$. We denote the Fourier expansion by $J(\tau) = \sum_{n \geq -1} c(n)q^n$ with coefficients $c(n) \in \mathbb{Z}$. In particular we have $c(-1) = 1$, and $c(0) = 0$. We consider the modular form of two variables

$$j(z_1) - j(z_2)$$

of weight 0 for the group $\Gamma(1) \times \Gamma(1)$. It vanishes at a point $(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, if and

only if $z_1 = Mz_2$ for some $M \in \Gamma(1)$, because of the injectivity of j. In other words, the divisor of $j(z_1) - j(z_2)$ is given by quadratic equations

(2.3) $\quad cz_1z_2 + dz_1 - az_2 - b = 0$

with integral coefficients and $ad - bc = 1$.

Theorem 2.1. *The modular form $j(z_1) - j(z_2)$ has the infinite product expansion*

(2.4) $\quad j(z_1) - j(z_2) = q_1^{-1} \prod_{\substack{m>0 \\ n\in\mathbb{Z}}} (1 - q_1^m q_2^n)^{c(mn)}.$

Here $q_j = e^{2\pi i z_j}$, and $c(n)$ is the n-th Fourier coefficient of $J(\tau)$. The product converges normally for $\Im(z_1)\Im(z_2) > 1$.

This beautiful identity was found in the 80's independently by Borcherds, Koike, Norton, and Zagier. It is the denominator identity of the monster Lie algebra, which is a generalized Kac-Moody algebra with an action of the Monster simple group. It is crucial in Borcherds' proof of the moonshine conjecture (see [Bo5] for an introduction and further references).

One may wonder why Theorem 2.1 had not been discovered earlier. It only involves classical modular functions that were well understood already at the end of the 19th century. One reason might be that the product only converges on a sub-domain of $\mathbb{H}^2$. This is due to the fact that the $c(n)$, being the coefficients of a *weakly* holomorphic modular form with a pole at the cusp ∞, grow rather rapidly:

(2.5) $\quad c(n) \sim \dfrac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}},$

as $n \to \infty$. This asymptotic is analogous to the one for the partition function (2.1). The restricted convergence of the product for $j(z_1) - j(z_2)$ implies that only part of the divisor can be read off directly from the product. More precisely, it only tells us the vanishing along those divisors of type (2.3) with $c = 0$.

One might ask, whether the product expansions of the discriminant function $\Delta(\tau)$ and the function $j(z_1) - j(z_2)$ have anything in common. This is in fact true. Both are particular examples of *Borcherds products*. These are certain meromorphic modular forms in ℓ variables, which have a particular product expansion, and arise as lifts of weakly holomorphic modular forms of weight $1 - \ell/2$ for $\Gamma(1)$. Their zeros and poles are explicitly given in terms of so-called Heegner divisors (also referred to in the literature as "rational quadratic divisors" or "special divisors").

In the next section we will make this informal definition more precise. Let us just remark here that $j(z_1) - j(z_2)$ can be viewed as the Borcherds lift of the weight 0 modular form $J(\tau)$, and $\Delta(\tau)$ as the Borcherds lift of the classical weight $1/2$ Jacobi theta function $12\theta(\tau) = 12\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$. It can be shown that the j-function and the Eisenstein series E_k, with $k = 4, 6, 8, 10, 14$ are also lifts of certain weakly holomorphic weight $1/2$ modular forms. For instance

$$E_4 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{c(n^2)},$$

where $c(n)$ denote the coefficients of the weight $1/2$ modular form (for $\Gamma_0(4)$ in the Kohnen plus-space)

$$f = q^{-3} + 4 - 240q + 26760q^4 - 85995q^5 + 1707264q^8 - 4096240q^9 + 44330496q^{12} + \ldots,$$

see [Bo1].

Finally, notice that Borcherds products naturally live on the hermitian symmetric space of type IV associated to the real orthogonal group $\mathrm{O}(2,\ell)$ of signature $(2,\ell)$. This hermitian space has complex dimension ℓ. They are constructed using a regularized theta lift for the dual reductive pair $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2,\ell))$. In small dimensions however, there are exceptional isomorphisms relating $\mathrm{O}(2,\ell)$ to other classical Lie groups. For instance $\mathrm{O}(2,1)$ is essentially isomorphic to $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, and $\mathrm{O}(2,2)$ to $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, which is implicitly used in the construction of the examples above. Moreover, $\mathrm{O}(2,3)$ is essentially isomorphic to the symplectic group $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ of genus 2, and $\mathrm{O}(2,4)$ to the hermitian symplectic group of genus 2. In view of these isomorphisms, also the Heegner divisors alluded to above become classically well known objects. For instance in the $\mathrm{O}(2,1)$ case, one gets Heegner points on modular or Shimura curves, justifying the terminology. In the $\mathrm{O}(2,2)$ case, one can obtain Hirzebruch-Zagier divisors on Hilbert modular surfaces, in the $\mathrm{O}(2,3)$ case Humbert surfaces on Siegel modular threefolds.

3 Borcherds products on Hilbert modular surfaces

We now want to generalize the $j(z_1) - j(z_2)$ example of the the previous section and study Borcherds' construction of infinite automorphic products (in two variables) in a more systematic way. From a geometric point of view, the underlying modular variety $\Gamma(1)^2\backslash\mathbb{H}^2$ in that example was not very exciting. By means of the j-function it is isomorphically mapped to the affine plane $\mathbb{C}^2$. If one wants to get more interesting varieties one has to replace the discrete subgroup $\Gamma(1) \times \Gamma(1) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ by more complicated groups. An important family of discrete subgroups is provided by Hilbert modular groups of real quadratic fields.

We first need to introduce some notation (see [Fr], [Ge2], [Go] for more details). Throughout we use $z = (z_1, z_2)$ as a variable on $\mathbb{H}^2$ and write (y_1, y_2) for its imaginary part. Let K be the real quadratic field of discriminant D. For simplicity we assume throughout that D is a prime (hence $D \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ and $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$). We write $\mathcal{O}_K$ for the ring of integers and $x \mapsto x'$ for the conjugation in K. The Hilbert modular group $\Gamma_K = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ associated with K can be viewed as a discrete subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ by means of the two embeddings of K into $\mathbb{R}$. In particular Γ_K acts on $\mathbb{H}^2$ by

$$(z_1, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \frac{a'z_2 + b'}{c'z_2 + d'} \right).$$

In the same way as with the modular curves Y_Γ of the previous section, we consider the quotient $Y_K = \Gamma_K\backslash\mathbb{H}^2$, which has a structure as a non-compact complex surface. It can be compactified by adding h_K points, namely the cusps of Γ_K, i.e., the Γ_K-orbits of $P^1(K)$. Here h_K is the class number of K. In contrast to the case of modular curves the

resulting normal complex space X_K is not regular. There are quotient singularities at the elliptic fixed points, and furthermore, the cusps are highly singular points. By the theory of Hironaka the singularities can be resolved [Hi], there exists a desingularization $\pi : \widetilde{X}_K \to X_K$, such that $\mathbf{D}_K := \pi^{-1}(X_K^{sing})$ is a divisor with normal crossings. The minimal resolution of singularities was constructed by Hirzebruch [Hz].

According to the theory of Baily-Borel, the complex spaces Y_K, X_K, and $\widetilde{X}_K$ all have natural structures as quasi-projective algebraic varieties over $\mathbf{C}$. Moreover, Y_K has a moduli interpretation as the (coarse) moduli space of isomorphism classes of Abelian surfaces with multiplication by $\mathcal{O}_K$ and a certain class of polarizations (see section 8). This can be used to construct integral models. The surfaces Y_K, X_K, and $\widetilde{X}_K$ are all referred to as *Hilbert modular surfaces* associated with K.

On such surfaces there exist distinguished divisors, called Hirzebruch-Zagier divisors. (As already mentioned, they play the role of the Heegner divisors in the informal definition of Borcherds products of the previous section.) For every vector (a, b, λ) of positive norm $ab - \lambda\lambda'$ in the lattice $\mathbf{Z}^2 \oplus \mathfrak{d}^{-1}$, the subset

$$(a, b, \lambda)^{\perp} = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{H}^2; \quad az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b = 0\}$$

defines an analytic divisor on $\mathbf{H}^2$. Here $\mathfrak{d}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{D}}\mathcal{O}_K$ is the inverse different of K. Observe the analogy with (2.3). Now let m be a positive integer. The sum

$$T(m) = \sum_{\substack{(a,b,\lambda)\in(\mathbf{Z}^2\oplus\mathfrak{d}^{-1})/\{\pm 1\} \\ ab-\lambda\lambda'=m/D}} (a, b, \lambda)^{\perp}$$

is a Γ_K-invariant analytic divisor on $\mathbf{H}^2$. It descends to an algebraic divisor on the quasi-projective variety Y_K, the *Hirzebruch-Zagier divisor* of discriminant m. Moreover, we obtain Hirzebruch-Zagier divisors on X_K by taking the closure of $T(m)$, and on $\widetilde{X}_K$ by taking the pullback with respect to the desingularization morphism.

One easily sees that $T(m) = \emptyset$, if and only if $\chi_D(m) = -1$, where χ_D is the quadratic character corresponding to K given by the Legendre symbol $\chi_D(x) = \left(\frac{D}{x}\right)$. If m is square-free and a norm of $\mathcal{O}_K$, then the normalization of $T(m)$ on X_K is isomorphic to the modular curve $X_0(m)$. If m is square-free and not a norm of $\mathcal{O}_K$ (but $\chi_D(m) = 1$), then the normalization of $T(m)$ is isomorphic to a Shimura curve associated to a certain order in the indefinite quaternion algebra $Q_m = \left(\frac{D,-m/D}{\mathbf{Q}}\right)$.

One can show that the Hirzebruch-Zagier divisors are actually defined over $\mathbf{Q}$. Moreover, they often have a moduli interpretation, which can be used to extend them to integral models. For instance, in the latter case, where the normalization of $T(m)$ is a Shimura curve, the points on $T(m)$ correspond to Abelian surfaces with quaternionic multiplication by a certain order of Q_m.

Let k be an integer. Recall that a meromorphic (respectively holomorphic) *Hilbert modular form* of weight k for the group Γ_K is a meromorphic (respectively holomorphic) function f on $\mathbf{H}^2$ satisfying the transformation law

$$(3.1) \quad f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(z_1, z_2)\right) = (cz_1 + d)^k (c'z_2 + d')^k f(z_1, z_2)$$

for all $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_K$. Notice that in contrast to the definition of modular forms for subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in the previous section, we do not have to require that f be meromorphic (respectively holomorphic) at the cusps. This is automatic by the Koecher principle.

We are now ready to explain Borcherds' lift in the case of Hilbert modular surfaces. Let us first describe the "input data" which is used to feed the lift. We denote by $W_k(D, \chi_D)$ the space of weakly holomorphic modular forms of weight k for the Hecke group

$$\Gamma_0(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); \quad c \equiv 0 \pmod{D} \right\} \tag{3.2}$$

with character χ_D (where $\chi_D\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \chi_D(d)$). Since $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(D)$, any such modular form f has a Fourier expansion of the form $f = \sum_{n \gg -\infty} c(n) q^n$. We let $W_k^+(D, \chi_D)$ be the subspace of those $f \in W_k(D, \chi_D)$, whose Fourier coefficients $c(n)$ satisfy the so-called *plus space condition*, i.e., $c(n) = 0$ whenever $\chi_D(n) = -1$. Moreover, we write $M_k^+(D, \chi_D)$ (respectively $S_k^+(D, \chi_D)$) for the subspace of holomorphic modular forms (respectively cusp forms) in $W_k^+(D, \chi_D)$. For even $k \geq 2$, Hecke proved that there is a unique normalized Eisenstein series $E_k(\tau)$ in $M_k^+(D, \chi_D)$, and

$$M_k^+(D, \chi_D) = S_k^+(D, \chi_D) \oplus \mathbb{C} E_k(\tau), \tag{3.3}$$

see [He], and section 7 here.

If $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) q^n \in \mathbb{C}((q))$ is a formal Laurent series, we put

$$\tilde{c}(n) = \begin{cases} c(n), & \text{if } n \not\equiv 0 \pmod{D}, \\ 2c(n), & \text{if } n \equiv 0 \pmod{D}. \end{cases}$$

Modular forms in the plus space $W_k^+(D, \chi_D)$ can also be realized as vector valued modular forms for the full modular group $\Gamma(1)$ transforming with a certain D-dimensional unitary representation (see [BB]). As a consequence, there is a bilinear pairing assigning to two modular forms $f \in W_k^+(D, \chi_D)$ and $g \in W_{k'}^+(D, \chi_D)$ a modular form $\langle f, g \rangle \in W_{k+k'}$ for the group $\Gamma(1)$. If $f = \sum_n c(n) q^n$ and $g = \sum_n b(n) q^n$, it can be described in terms of the Fourier expansions as follows:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{c}(m) b(Dn - m) q^n. \tag{3.4}$$

Notice that this pairing only depends on the transformation properties of modular forms in the plus space and naturally extends to non-holomorphic forms.

Theorem 3.1 (Borcherds). *Let $f = \sum_{n \gg -\infty} c(n) q^n$ be a weakly holomorphic modular form in $W_0^+(D, \chi_D)$ and assume that $\tilde{c}(n) \in \mathbb{Z}$ for all $n < 0$. Then there exists a meromorphic Hilbert modular form $\Psi(z_1, z_2, f)$ for Γ_K (with some multiplier system of finite order) such that:*

(i) *The weight of Ψ is equal to the constant term $c(0)$ of f.*
(ii) *The divisor $Z(f)$ of Ψ is determined by the principal part of f at the cusp ∞. It equals*

$$Z(f) = \sum_{n<0} \tilde{c}(n) T(-n).$$

(iii) *Let $W \subset \mathbb{H}^2$ be a Weyl chamber attached to f and put $N = \min\{n;\ c(n) \neq 0\}$. The function Ψ has the Borcherds product expansion*

$$\Psi(z_1, z_2, f) = q_1^{\rho} q_2^{\rho'} \prod_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ (\nu, W) > 0}} \left(1 - q_1^{\nu} q_2^{\nu'}\right)^{\tilde{c}(D\nu\nu')},$$

which converges normally for all (z_1, z_2) with $y_1 y_2 > |N|/D$ outside the set of poles. Here $\rho \in K$ is the Weyl vector corresponding to W and f, and $q_j^{\nu} = e^{2\pi i \nu z_j}$ for $\nu \in K$.

A few additional explanations regarding Weyl chambers are in order. For each $\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}$ of negative norm the subset

$$\lambda^{\perp} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2;\quad \lambda y_1 + \lambda' y_2 = 0\}$$

is a hyperplane of real codimension 1 in $\mathbb{H}^2$. Since f is meromorphic at the cusps, and by reduction theory, the union

$$S(f) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \lambda\lambda' < 0}} c(D\lambda\lambda')\lambda^{\perp}$$

has only finitely many Γ_K-orbits. It is invariant under the stabilizer in Γ_K of the cusp ∞. Its complement $\mathbb{H}^2 - S(f)$ decomposes into connected components, which are called the Weyl chambers attached to f. To such a Weyl chamber W (and f) one can associate the so-called Weyl vector $\rho \in K$, which we do not want to define here (see [BB] for its explicit computation in the present case, and [Bo1, Bo4] for more general facts). Moreover, if $\nu \in K$, then one writes $(\nu, W) > 0$, if $\lambda y_1 + \lambda' y_2 > 0$ for all $(z_1, z_2) \in W$.

If $\mathrm{div}(\Psi)$ is compact in Y_K, i.e., if the normalizations of the irreducible components are Shimura curves, then $S(f)$ is empty and there is just the one Weyl chamber $W = \mathbb{H}^2$. In this case $\rho = 0$, and the condition $(\nu, W) > 0$ becomes just the condition that ν be totally positive.

Theorem 3.1 is contained (in a slightly different formulation) in Theorem 13.3 of [Bo4] (to obtain the above form see [BB]). The idea of the proof is as follows.

First, we notice that by an elementary argument the Fourier coefficients of f are bounded by

$$(3.5) \quad c(n) = O\left(e^{4\pi\sqrt{|Nn|}}\right), \qquad n \to \infty,$$

see [BF] section 3. This implies the convergence of the product in the stated region. The estimate (3.5) is also a consequence of the (much more precise) Hardy-Rademacher-Ramanujan asymptotic for the coefficients of weakly holomorphic modular forms, the general theorem behind (2.1) and (2.5).

As already mentioned, the group $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\{\pm 1\}$ is isomorphic to the connected component of real orthogonal group $\mathrm{O}(2,2)$. The latter group and $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ form a dual reductive pair in the sense of Howe [Ho]. Thus we can construct Hilbert modular forms for Γ_K from modular forms on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ by integrating against a certain

kernel function, the Siegel theta function $\Theta_S(\tau; z_1, z_2)$ associated to the lattice $L = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathcal{O}_K$ of signature $(2,2)$. Here the Siegel theta function is a certain non-holomorphic modular form for $\Gamma_0(D)$ satisfying the plus-space condition in the variable τ, and a Γ_K-invariant function in the variable (z_1, z_2). This suggests that we look at the integral

$$\int_{\mathcal{F}} \langle f(\tau), \Theta_S(\tau; z_1, z_2)\rangle d\mu. \tag{3.6}$$

Here $\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H};\ |\tau| \geq 1,\ |u| \leq 1/2\}$ denotes the standard fundamental domain for the action of $\Gamma(1)$ on $\mathbb{H}$, and $d\mu = \frac{du\,dv}{v^2}$ is the invariant measure on $\mathbb{H}$ (with $\tau = u + iv$). Since f and the Siegel theta function are in weight 0, the integrand is $\Gamma(1)$-invariant, so that the integral makes formally sense. Unfortunately, because f grows exponentially as τ approaches the cusp ∞, it diverges wildly. However, Harvey and Moore discovered that it is possible to regularize the integral [HM]. Following their idea, Borcherds defines the regularized theta lift $\Phi(z_1, z_2, f)$ of f to be the constant term in the Laurent expansion at $s = 0$ of the meromorphic continuation in s of

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{F}_t} \langle f(\tau), \Theta_S(\tau; z_1, z_2)\rangle v^{-s} d\mu. \tag{3.7}$$

Here $\mathcal{F}_t = \{\tau \in \mathcal{F};\ |v| \leq t\}$ is the truncated fundamental domain. One can show that this regularized integral still makes sense even though (3.6) does not. It defines a Γ_K-invariant real analytic function on $\mathbb{H}^2 - \operatorname{supp}(Z(f))$ with a logarithmic singularity[1] along the divisor $-4Z(f)$.

Moreover, it can be shown that the limit in (3.7) exists and is holomorphic at $s = 0$, if the constant term $c(0)$ of f vanishes. It follows that $\Phi(z_1, z_2, f)$ is equal to

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{F}_t} \left(\langle f(\tau), \Theta_S(\tau; z_1, z_2)\rangle - \tilde{c}(0)v\right) d\mu + A\tilde{c}(0),$$

where A is the constant term in the Laurent expansion at $s = 0$ of $\lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{F}_t} v^{1-s} d\mu$. This could be taken as an alternative definition.

The Fourier expansion of $\Phi(z_1, z_2, f)$ can be computed explicitly by applying some partial Poisson summation on the theta kernel. It turns out that

$$\Phi(z_1, z_2, f) = -2\log\left|\Psi(z_1, z_2, f)^2 (16\pi^2 y_1 y_2)^{c(0)}\right| + 2c(0)(\log(8\pi) - \Gamma'(1)),$$

giving the meromorphic continuation, the divisor, and the transformation behavior of the infinite product $\Psi(z_1, z_2, f)$.

Notice that a weakly holomorphic modular form $f = \sum_n c(n) q^n$ in $W_k^+(D, \chi_D)$ of weight $k \leq 0$ is uniquely determined by its *principal part*

$$\sum_{n<0} c(n) q^n \in \mathbb{C}[q^{-1}].$$

[1] If X is a normal complex space, $D \subset X$ a Cartier divisor, and f a smooth function on $X - \operatorname{supp}(D)$, then f has a logarithmic singularity along D, if for any local equation g for D on an open subset $U \subset X$, the function $f - \log|g|$ is smooth on U.

For the difference of two elements of $W_k^+(D, \chi_D)$ with the same principal part is a holomorphic modular form of weight $k \leq 0$ with Nebentypus, hence vanishes identically. Moreover, the Galois group $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ acts on weakly holomorphic modular forms by mapping f to

$$f = \sum_n c(n)^\sigma q^n, \qquad \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}).$$

Here $c(n)^\sigma$ denotes the Galois conjugate of $c(n)$. This follows from the fact that the spaces $W_k(D, \chi_D)$ have bases of modular forms with integral rational Fourier coefficients (see [DeRa], [DI]). Consequently, if f has principal part in $\mathbb{Q}[q^{-1}]$, then all its Fourier coefficients are rational with bounded denominators. We may conclude that some power of any holomorphic Borcherds product has coprime integral rational Fourier coefficients and trivial multiplier system. This observation is crucial. By the q-expansion principle (see [Ge2], chapter X.3 Theorem 3.3), such a modular form corresponds to a section of the line bundle of Hilbert modular forms over $\mathbb{Z}$ on the moduli stack over $\mathbb{Z}$ representing the moduli problem "isomorphism classes of Abelian schemes with real multiplication by $\mathcal{O}_K$". Hence Borcherds products can be viewed as modular forms over $\mathbb{Z}$. In fact, they provide a powerful tool to study arithmetic intersection numbers on Hilbert modular surfaces, see [BBK] and section 9 here.

We conclude this section with an example for Theorem 3.1. We consider the Hilbert modular group Γ_K of the real quadratic field $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. The fundamental unit of K is $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \in \mathcal{O}_K$. Gundlach constructed a particular holomorphic Hilbert modular form $\Theta(z_1, z_2)$ of weight 5 for Γ_K as a product of 10 theta functions of weight $1/2$ [Gu]. He showed that the divisor of Θ is equal to $T(1)$ and used this fact to determine the graded algebra of Hilbert modular forms for Γ_K. From the construction one also finds that Θ has Fourier coefficients in $\mathbb{Z}$ with greatest common divisor 64.

One can recover Gundlach's function using the Borcherds lift: We need to look at the "input space" $W_0^+(5, \chi_5)$. Using some basic facts on modular forms for $\Gamma_0(5)$ due to Hecke one finds that there is a modular form $f_1 \in W_0^+(5, \chi_5)$ with Fourier expansion

$$f_1 = q^{-1} + 5 + 11\,q - 54\,q^4 + 55\,q^5 + 44\,q^6 - 395\,q^9 + 340\,q^{10} + 296\,q^{11} - 1836\,q^{14} + \ldots.$$

If we plug this into the Borcherds lift, we get a Hilbert modular form Ψ for Γ_K of weight 5 with divisor $T(1)$. Hence Ψ must be a constant multiple of Θ. From the Borcherds product expansion it follows that Ψ has coprime Fourier coefficients in $\mathbb{Z}$. Consequently the constant factor is $1/64$. If we compute the Weyl vector as in [BB], we obtain the product expansion

$$(3.8)\quad \frac{1}{64}\Theta(z_1, z_2) = q_1^{\varepsilon_0/\sqrt{5}} q_2^{(\varepsilon_0/\sqrt{5})'} \prod_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \varepsilon_0 \nu' - \varepsilon_0' \nu > 0}} \left(1 - q_1^\nu q_1^{\nu'}\right)^{\tilde{c}(5\nu\nu')},$$

where the $c(n)$ denote the Fourier coefficients of f_1.

4 Obstructions for constructing Borcherds products

Borcherds' theorem of the previous section provides a way of constructing many Hilbert modular forms with known divisor supported on Hirzebruch-Zagier divisors $T(m)$. It is natural to seek for a precise description of those linear combinations of Hirzebruch-Zagier divisors, which are divisors of Borcherds products. Since the divisor of a Borcherds product $\Psi(z_1, z_2, f)$ is determined by the principal part of the weakly holomorphic modular form f, which is used to construct it, it suffices to understand which Fourier polynomials $\sum_{n<0} c(n)q^n \in \mathbb{C}[q^{-1}]$ can occur as principal parts of elements of $W_0^+(D, \chi_D)$. A necessary condition is easily obtained. If $f \in W_k^+(D, \chi_D)$ with Fourier coefficients $c(n)$, and $g \in M_{2-k}^+(D, \chi_D)$ with Fourier coefficients $b(n)$, then the pairing $\langle f, g\rangle$ is a weakly holomorphic modular form of weight 2 for $\Gamma(1)$. Thus

$$\langle f, g\rangle d\tau$$

is a meromorphic differential on the Riemann sphere whose only pole is at the cusp ∞. By the residue theorem its residue has to vanish. But this residue is just the constant term in the Fourier expansion of $\langle f, g\rangle$. In view of (3.4) we find that

$$(4.1) \quad \sum_{n\leq 0} \tilde{c}(n)b(-n) = 0.$$

Using Serre duality for vector bundles on Riemann surfaces, Borcherds showed that this condition is essentially also sufficient (see [Bo6] and [BB] Theorem 6).

Theorem 4.1 *There exists a weakly holomorphic modular form $f \in W_k^+(D, \chi_D)$ with prescribed principal part $\sum_{n<0} c(n)q^n$ (where $c(n) = 0$ if $\chi_D(n) = -1$), if and only if*

$$\sum_{n<0} \tilde{c}(n)b(-n) = 0$$

for every cusp form $g = \sum_{m>0} b(m)q^m$ in $S_{2-k}^+(D, \chi_D)$.

This result shows that $S_2^+(D, \chi_D)$ is precisely the space of obstructions for constructing Borcherds products on Y_K with prescribed divisor. (In the same way $M_2^+(D, \chi_D)$ can be viewed as the space of obstructions for constructing Borcherds products with prescribed divisor and weight.) The dimension of this space can be computed by means of the Riemann-Roch theorem or the Selberg trace formula. In our case, where D is prime, this was already done by Hecke [He]. One finds that

$$\dim S_2^+(D, \chi_D) = \dim M_2^+(D, \chi_D) - 1 = \left[\frac{D-5}{24}\right].$$

In particular $S_2^+(D, \chi_D) = \{0\}$ for the primes $D = 5, 13, 17$. In these cases there are no obstructions, and for any $T(m)$ there is a Borcherds products product with divisor $T(m)$. For all other prime discriminants D there are obstructions. Then for instance $T(1)$ is not the divisor of a Borcherds product, since there is a normalized Hecke eigenform g in $S_2(D, \chi_D)$. Its first Fourier coefficient is 1, and the "real part" of g is an element of $S_2^+(D, \chi_D)$, whose first Fourier coefficient is equal to 1 as well (see [Ge2], chapter VI.4). Hence q^{-1} cannot be the principal part of a weakly holomorphic modular form in $W_0^+(D, \chi_D)$.

Let us look at Theorem 4.1 from a little different angle. Let $\mathbb{C}[q^{-1}]^+$ (respectively $\mathbb{C}[[q]]^+$) be the space of Fourier polynomials (respectively formal power series), whose coefficients satisfy the plus space condition. We define a non-degenerate bilinear pairing between these spaces by putting

$$\{f,g\} = \sum_{n\leq 0} \check{c}(n)b(-n)$$

for $f = \sum_{n\leq 0} c(n)q^n \in \mathbb{C}[q^{-1}]^+$ and $g = \sum_{m\geq 0} b(m)q^m \in \mathbb{C}[[q]]^+$. For $k \leq 0$ the space $W_k^+(D,\chi_D)$ is identified with a subspace of $\mathbb{C}[q^{-1}]^+$ by mapping a weakly holomorphic modular form with Fourier coefficients $c(n)$ to $\sum_{n\leq 0} c(n)q^n$. The space $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$ is identified with a subspace of $\mathbb{C}[[q]]^+$ by mapping a modular form to its q-expansion. Now Theorem 4.1 implies that the orthogonal complement of $S_{2-k}^+(D,\chi_D)$ with respect to the pairing $\{\cdot,\cdot\}$ is equal to $W_k^+(D,\chi_D) \oplus \mathbb{C}$. Using the splitting (3.3) of $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$ one concludes that the orthogonal complement of $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$ is precisely $W_k^+(D,\chi_D)$. Since the pairing is non-degenerate, and since $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$ has finite dimension, it follows by linear algebra that conversely $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$ is the orthogonal complement of $W_k^+(D,\chi_D)$. In other words:

Corollary 4.2. *A formal power series $\sum_{m\geq 0} b(m)q^m \in \mathbb{C}[[q]]^+$ is the q-expansion of a modular form in $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$, if and only if*

$$\sum_{n\leq 0} \check{c}(n)b(-n) = 0$$

for every $f = \sum_n c(n)q^n$ in $W_k^+(D,\chi_D)$.

Since the pairing $\{\cdot,\cdot\}$ is defined over $\mathbb{Q}$ with respect to the natural rational structures $\mathbb{Q}[q^{-1}]^+$ and $\mathbb{Q}[[q]]^+$, and since $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$ and $W_k^+(D,\chi_D)$ have bases of modular forms with integral coefficients, an analogous assertion holds for modular forms over $\mathbb{Q}$. Moreover, it suffices to check the condition in this corollary for every $f \in W_k^+(D,\chi_D)$ with integral coefficients.

If X is a regular projective algebraic variety, we write $\mathrm{CH}^1(X)$ for its first Chow group, i.e., the group of algebraic divisors on X modulo rational equivalence. Furthermore, we put $\mathrm{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Recall that $\mathrm{CH}^1(X)$ is isomorphic to the Picard group of X, the group of isomorphism classes of algebraic line bundles on X. The isomorphism is given by mapping a line bundle $\mathcal{L}$ to the class $\mathrm{c}_1(\mathcal{L})$ of the divisor of a rational section of $\mathcal{L}$. The Chow group $\mathrm{CH}^1(X)$ is an important invariant of X. It is finitely generated.

Meromorphic (respectively holomorphic) Hilbert modular forms can be interpreted as rational (respectively regular) sections of the sheaf $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ of modular forms, which can be defined as follows: If we write $p : \mathbb{H}^2 \to Y_K$ for the canonical projection, then the sections over an open subset $U \subset \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ are holomorphic functions on $p^{-1}(U)$, satisfying the transformation law (3.1). By the Koecher principle, this sheaf on Y_K extends to X_K. Moreover, we obtain a sheaf on $\widetilde{X}_K$, also denoted by $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, by taking the pullback with respect to the desingularization morphism. By the theory of Baily-Borel, there is a positive integer n_K such that $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ is an algebraic line bundle if $n_K|k$, and therefore defines an element of $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}_K)$. Notice that $\mathcal{M}_{nk}(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_k(\mathbb{C})^{\otimes n}$ for any posi-

tive integer n. If k is any rational number, we chose an integer n such that nk is a positive integer divisible by n_K and put $c_1(\mathcal{M}_k(\mathbb{C})) = \frac{1}{n} c_1(\mathcal{M}_{nk}(\mathbb{C})) \in \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$.

It is natural to study the positions of the Hirzebruch-Zagier divisors in $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)$. To this end we consider the generating series

$$A(\tau) = c_1(\mathcal{M}_{-1/2}(\mathbb{C})) + \sum_{m>0} T(m) q^m \in \mathbb{Q}[[q]]^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}. \tag{4.2}$$

Combining Theorem 3.1 and Corollary 4.2 one obtains the following striking application.

Theorem 4.3. *The Hirzebruch-Zagier divisors generate a subspace of* $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$ *of dimension* $\leq \dim(M_2^+(D, \chi_D))$. *The generating series* $A(\tau)$ *is a modular form in* $M_2^+(D, \chi_D)$ *with values in* $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$, *i.e., an element of* $M_2^+(D, \chi_D) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$.

In other words, if λ is a linear functional on $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$, then

$$\lambda\big(c_1(\mathcal{M}_{-1/2}(\mathbb{C}))\big) + \sum_{m>0} \lambda(T(m)) q^m \in M_2^+(D, \chi_D).$$

A typical linear functional one can take for λ is given by the intersection pairing with a divisor on $\widetilde{X}_K$. Theorem 4.3 was first proved by Hirzebruch and Zagier by computing intersection numbers on $\widetilde{X}_K$ of Hirzebruch-Zagier divisors with other such divisors and with the exceptional divisors coming from the resolution of the cusp singularities [HZ]. Their discovery triggered important investigations by several people, showing that more generally periods of certain special cycles in arithmetic quotients of orthogonal or unitary type can be viewed as the coefficients of Siegel modular forms. For instance, Oda considered cycles on quotients of $\mathrm{O}(2, \ell)$ given by embedded quotients of $\mathrm{O}(1, \ell)$ [Od1], and Kudla-Millson studied more general cycles on quotients of $\mathrm{O}(p, q)$ and $\mathrm{U}(p, q)$ using the Weil representation and theta functions with values in closed differential forms [KM1,KM2,KM3], see also [Fu] for the case of non-compact quotients. The relationship of the Kudla-Millson lift and Borcherds' regularized theta lift is clarified in [BF].

Using Borcherds products, Theorem 4.3 can be proved as follows (see [Bo6]). In view of Corollary 4.2 it suffices to show that

$$\tilde{c}(0) c_1(\mathcal{M}_{-1/2}(\mathbb{C})) + \sum_{n<0} \tilde{c}(n) T(-n) = 0 \in \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$$

for every $f = \sum_n c(n) q^n$ in $W_0^+(D, \chi_D)$ with integral Fourier coefficients. But this is an immediate consequence of Theorem 3.1: The Borcherds lift of f is a rational section of $\mathcal{M}_{c(0)}(\mathbb{C})$ with divisor $\sum_{n<0} \tilde{c}(n) T(-n)$. Notice that we have only used (i) and (ii) of Theorem 3.1. The product expansion (iii) is not required. Finally, we mention that this argument generalizes to Heegner divisors on quotients of $\mathrm{O}(2, \ell)$.

5 Converse theorems

By Theorem 4.1 of the previous section we know precisely which linear combinations of Hirzebruch-Zagier divisors occur as divisors of Borcherds products on Y_K. Here it is natural to ask, whether every Hilbert modular form on Y_K whose divisor is a linear combination of Hirzebruch-Zagier divisors, is a Borcherds product, i.e., in the image of the lift of Theorem 3.1. In this section we discuss this question in some detail. To answer it, we first simplify the problem. We extend the Borcherds lift to a larger space of "input modular forms", given by certain Maass wave forms, and answer the question for this extended lift. In that way we are led to automorphic Green functions associated with Hirzebruch-Zagier divisors.

Let k be an integer, Γ a subgroup of finite index of $\Gamma(1)$, and χ a character of Γ. A twice continuously differentiable function $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ is called a *weak Maass form* (of weight k with respect to Γ and χ), if

(1) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \chi(\gamma)(c\tau+d)^k f(\tau)$ for all $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$,
(2) f has polynomial growth at the cusps of Γ (in terms of local parameters),
(3) $\Delta_k f(\tau) = 0$.

Here

$$(5.1) \quad \Delta_k = -v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) + ikv\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

denotes the usual hyperbolic Laplace operator in weight k and $\tau = u + iv$.

So if we compare this with the definition of a weakly holomorphic modular form, we see that we simply replaced the condition that f be holomorphic on $\mathbb{H}$ by the weaker condition that f be annihilated by Δ_k, and the meromorphicity at the cusps by the corresponding growth condition. The third condition implies that f is actually real analytic. Because of the transformation behavior, it has a Fourier expansion involving besides the exponential function a second type of Whittaker function. (See [BF] section 3 for more details.)

There are two fundamental differential operators on modular forms for Γ, the Maass raising and lowering operators

$$R_k = 2i\frac{\partial}{\partial \tau} + kv^{-1} \qquad \text{and} \qquad L_k = -2iv^2\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}.$$

If f is a differentiable function on $\mathbb{H}$ satisfying the transformation law (1) above in weight k, then $L_k f$ transforms in weight $k-2$, and $R_k f$ in weight $k+2$. It can be shown that the assignment

$$f(\tau) \mapsto \xi_k(f)(\tau) := v^{k-2}\overline{L_k f(\tau)} = R_{-k}v^k\overline{f(\tau)}$$

defines an antilinear map ξ_k from weak Maass forms of weight k to weakly holomorphic modular forms of weight $2-k$. Its kernel is precisely the space of weakly holomorphic modular forms in weight k.

We write $N_k(D, \chi_D)$ for the space of weak Maass forms of weight k with respect to $\Gamma_0(D)$ and χ_D. Let us have a closer look at map $\xi_k : N_k(D, \chi_D) \to W_{2-k}(D, \chi_D)$. We de-

note by $\mathcal{N}_k(D,\chi_D)$ the inverse image of $S_{2-k}(D,\chi_D)$ under ξ_k, and its plus subspace by $\mathcal{N}_k^+(D,\chi_D)$. (Note that our notation is not consistent with the notation of [BF].)

Theorem 5.1. *We have the following exact sequence:*

$$0 \longrightarrow W_k^+(D,\chi_D) \longrightarrow \mathcal{N}_k^+(D,\chi_D) \xrightarrow{\xi_k} S_{2-k}^+(D,\chi_D) \longrightarrow 0.$$

This can be proved using Serre duality for the Dolbeault resolution of the structure sheaf on a modular curve (see [BF] Theorem 3.7) or by means of Hejhal-Poincaré series (see [Br2] chapter 1).

For every weak Maass form $f \in \mathcal{N}_k^+(D,\chi_D)$ there is a unique Fourier polynomial $P(f) = \sum_{n<0} c(n)q^n$ in $\mathbb{C}[q^{-1}]^+$ such that $f(\tau) - P(f)(\tau)$ is bounded as $v \to \infty$, uniformly in u. It is called the principal part of f. This generalizes the notion of the principal part of a weakly holomorphic modular form. One can show that every prescribed Fourier polynomial as above occurs as the principal part of a unique $f \in \mathcal{N}_k^+(D,\chi_D)$. This is a key fact, which suggests to study the Borcherds lift of weak Maass forms.

If $f \in \mathcal{N}_0^+(D,\chi_D)$, then we define its regularized theta lift $\Phi(z_1,z_2,f)$ by (3.7), in the same way as for weakly holomorphic modular forms. One can show that the regularized theta integral defines a Γ_K-invariant function on $\mathbb{H}^2$ with a logarithmic singularity along $-4Z(f)$, where

$$Z(f) = \sum_{n<0} \tilde{c}(n) T(-n),$$

and $\sum_{n<0} c(n)q^n$ denotes the principal part of f [Br2], [BF]. It is almost harmonic (outside the singularities) in the following sense. If $\Delta^{(1)}$ and $\Delta^{(2)}$ denote the $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariant hyperbolic Laplace operators on $\mathbb{H}^2$ in the first and second variable, then $\Delta^{(j)}\Phi(z_1,z_2,f) = \text{constant}$.

The Fourier expansion of $\Phi(z_1,z_2,f)$ can be computed explicitly. It can be used to determine the growth behavior at the boundary of Y_K in $\tilde{X}_K$. It turns out that the boundary singularities are of log and log-log type. More precisely, one can view $\frac{1}{4}\Phi(z_1,z_2,f)$ as a pre-log-log Green function for the divisor $Z(f)$ on $\tilde{X}_K$ in the sense of [BKK1] (see section 8 here, and [BBK] Proposition 2.15).

Moreover, one finds that $\Phi(z_1,z_2,f)$ can be split into a sum

$$\Phi(z_1,z_2,f) = -2\log|\Psi(z_1,z_2,f)|^2 + \xi(z_1,z_2,f), \tag{5.2}$$

where $\xi(z_1,z_2,f)$ is real analytic on the whole domain $\mathbb{H}^2$ and $\Psi(z_1,z_2,f)$ is a meromorphic function on $\mathbb{H}^2$ whose divisor equals $Z(f)$. If f is weakly holomorphic, the function $\xi(z_1,z_2,f)$ is simply equal to $2c(0)\big(\log(8\pi) - \Gamma'(1) - \log(16\pi^2 y_1 y_2)\big)$ and we are back in the case of Borcherds' original lift. However, if f is an honest weak Maass form, then ξ is a complicated function and Ψ far from being modular.

In any case, via the usual Poincaré-Lelong argument, the above splitting implies that the $(1,1)$ form

$$\Lambda_B(f) := \frac{1}{4} dd^c \Phi(z_1,z_2,f) = \frac{1}{4} dd^c \xi(z_1,z_2,f) \tag{5.3}$$

represents the Chern class of the divisor $Z(f)$ in the second cohomology $H^2(Y_K)$. One can further show that it is a square integrable harmonic representative. (It can also be regarded as a pre-log-log form on $\widetilde{X}_K$, representing the class of $T(m)$ on $\widetilde{X}_K$ in $H^2(\widetilde{X}_K)$.)

Using suitable L^p-estimates for the functions $\Phi(z_1, z_2, f)$, and results of Andreotti-Vesentini and Yau on (sub-) harmonic functions on complete Riemann manifolds that satisfy such integrability conditions, the following *weak converse theorem* for the Borcherds lift can be proved (see [Br2] chapter 5).

Theorem 5.2. *Let F be a meromorphic Hilbert modular form of weight r for Γ_K whose divisor* $\operatorname{div}(F) = \sum_{n<0} \tilde{c}(n) T(-n)$ *is a linear combination of Hirzebruch-Zagier divisors. Then*

$$-2\log|F(z_1,z_2)^2(16\pi^2 y_1 y_2)^r| = \Phi(z_1,z_2,f) + \text{constant},$$

where f is the unique weak Maass form in $\mathcal{N}_0^+(D,\chi_D)$ with principal part $\sum_{n<0} c(n)q^n$.

Corollary 5.3. *The assignment $Z(f) \mapsto \Lambda_B(f)$ defines a linear map from the subgroup $\mathrm{CH}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)$ of $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)$ generated by the Hirzebruch-Zagier divisors, to $\mathcal{H}^{1,1}(Y_K)$, the space of square integrable harmonic $(1,1)$-forms on Y_K.*

Summing up, we get the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N}_0^+(D,\chi_D) & \longrightarrow & \mathcal{N}_0^+(D,\chi_D)/W_0^+(D,\chi_D) & \xrightarrow[\xi_0]{\sim} & S_2^+(D,\chi_D)\,. \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Z}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{1,1}(Y_K) \end{array} \tag{5.4}$$

Here $\mathrm{Z}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)$ denotes the subgroup of the divisor group $\mathrm{Z}^1(\widetilde{X}_K)$ generated by the $T(m)$ ($m \in \mathbb{N}$). The left vertical arrow is defined by $f \mapsto Z(f) - \frac{c(0)}{k_G}\operatorname{div} G$, where $c(0)$ denotes the constant term of f, and G a fixed meromorphic Borcherds product of weight k_G. The vertical arrow in the middle is given by $f \mapsto Z(f) - c(0)\mathrm{c}_1(\mathcal{M}_1(\mathbb{C}))$.

In particular, the above diagram gives rise to a linear map $S_2^+(D,\chi_D) \to \mathcal{H}^{1,1}(Y_K)$. It can be explicitly described in terms of the Fourier expansions. One finds that the image is in the subspace of $\mathcal{H}^{1,1}(Y_K)$ given by forms which are symmetric with respect to the interchange of the coordinates z_1, z_2. It is known that this subspace is isomorphic to $\mathbb{C}\Omega \oplus S_2(\Gamma_K)$, where

$$\Omega = \frac{dx_1 dy_1}{4\pi y_1^2} + \frac{dx_2 dy_2}{4\pi y_2^2} \tag{5.5}$$

is the symmetric invariant Kähler form on $\mathbb{H}^2$, and $S_2(\Gamma_K)$ denotes the space of Hilbert cusp forms of weight 2 for Γ_K. Consequently, we get a linear map $S_2^+(D,\chi_D) \to S_2(\Gamma_K)$.

To answer the surjectivity question for the Borcherds lift raised at the beginning of this section, it now suffices to show that this map is injective. This can for instance be deduced by means of the Fourier expansion of the image. We obtain the following *strong converse theorem* for the Borcherds lift (see [Br1], [Br2] chapter 5).

Theorem 5.4. *Let F be a meromorphic Hilbert modular form for Γ_K whose divisor $\operatorname{div}(F) = \sum_{n<0} \tilde{c}(n)T(-n)$ is given by Hirzebruch-Zagier divisors. Then there is a weakly holomorphic modular form $f \in W_0^+(D, \chi_D)$ with principal part $\sum_{n<0} c(n)q^n$, and, up to a constant multiple, F is equal to the Borcherds lift of f in the sense of Theorem 3.1.*

As a corollary it can be deduced that the dimension of $\mathrm{CH}^1_{HZ}(\tilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$ is equal to the dimension of $M_2^+(D, \chi_D)$ complementing Theorem 4.3. It is not hard to see that our map $S_2^+(D, \chi_D) \to S_2(\Gamma_K)$ coincides with the celebrated Doi-Naganuma lift [DN], [Na], [Za]. The above construction can be viewed as a new approach to it.

The weak converse theorem is proved in much greater generality in [Br2]. Combining the argument of [Br2] with techniques of [BF] it could probably be extended to hold in full generality for $\mathrm{O}(2, \ell)$. However, for the strong converse theorem the situation seems far more complicated. It is proved in [Br2] for modular forms on $\Gamma(L) \subset \mathrm{O}(2, \ell)$, where $\Gamma(L)$ denotes the discriminant kernel of the orthogonal group of an even lattice L of signature $(2, \ell)$ that splits two hyperbolic planes over $\mathbb{Z}$. For example, if we go to congruence subgroups of the Hilbert modular group Γ_K, it is not clear whether the analogue of Theorem 5.4 holds or not.

6 Automorphic Green functions

In this section we look at the regularized theta lifts of weak Maass forms from a different perspective. By the discussion of the previous section, for every positive integer m there exists a unique weak Maass form $f_m \in \mathcal{M}_0^+(D, \chi_D)$ whose principal part is equal to q^{-m} if $m \not\equiv 0 \pmod{D}$, and equal to $\frac{1}{2}q^{-m}$ if $m \equiv 0 \pmod{D}$. The lift

$$\phi_m(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\Phi(z_1, z_2, f_m)$$

of f_m is a real analytic function on Y_K with a logarithmic singularity along $-2T(m)$.

Here we present a different, more naive, construction of $\phi_m(z_1, z_2)$. For details see [Br1]. The idea is to construct $\phi_m(z_1, z_2)$ directly as a Poincaré series by summing over the logarithms of the defining equations of $T(m)$. We consider the sum

$$(6.1) \qquad \sum_{\substack{(a,b,\lambda)\in\mathbb{Z}^2\oplus\mathfrak{d}^{-1} \\ ab-\lambda\lambda'=m/D}} \log\left|\frac{az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b}{az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b}\right|.$$

The denominators of the summands ensure that this function has a logarithmic singularity along $-2T(m)$ in the same way as $\phi_m(z_1, z_2)$. The enumerators are smooth on the whole $\mathbb{H}^2$. They are included to make the sum formally Γ_K-invariant. Unfortunately, the sum diverges. However, it can be regularized in the following way. If we put $Q_0(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, we may rewrite the summands as

$$\log\left|\frac{az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b}{az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b}\right| = Q_0\left(1 + \frac{|az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2}{2y_1 y_2 m/D}\right).$$

Now we replace Q_0 by the 1-parameter family Q_{s-1} of Legendre functions of the second kind (cf. [AbSt] §8), defined by

$$(6.2)\quad Q_{s-1}(z) = \int_0^\infty (z + \sqrt{z^2-1}\cosh u)^{-s} du.$$

Here $z > 1$ and $s \in \mathbb{C}$ with $\Re(s) > 0$. If we insert $s = 1$, we get back the above Q_0. Hence we consider

$$(6.3)\quad \Phi_m(z_1, z_2, s) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z}\\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ ab-N(\lambda)=m/D}} Q_{s-1}\left(1 + \frac{|az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2}{2y_1y_2m/D}\right).$$

It is easily seen that this series converges normally for $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 - T(m)$ and $\Re(s) > 1$ and therefore defines a Γ_K-invariant function, which has logarithmic growth along $-2T(m)$. It is an eigenfunction of the hyperbolic Laplacians $\Delta^{(j)}$ with eigenvalue $s(s-1)$, because of the differential equation satisfied by Q_{s-1}. Notice that for $D = m = 1$ the function $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ is simply the classical resolvent kernel for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (cf. [Hej], [Ni]). One can compute the Fourier expansion of $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ explicitly and use it to obtain a meromorphic continuation to $s \in \mathbb{C}$. At $s = 1$ there is a simple pole, reflecting the divergence of the formal sum (6.1). We define the regularization $\Phi_m(z_1, z_2)$ of (6.1) to be the constant term in the Laurent expansion of $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ at $s = 1$.

It turns out that $\Phi_m(z_1, z_2)$ is, up to an additive constant L_m, equal to the function $\phi_m(z_1, z_2)$ above (see [Br2] Proposition 2.11 and Theorem 2.14). Here the constant L_m is quite interesting, since it is given by the derivative of the m-th coefficient of a certain Eisenstein series $E_2(\tau, s)$ of weight 2 for $\Gamma_0(D)$ and χ_D [BK], [BBK]. We will come back to this in section 7.

One may use the Fourier expansion of $\Phi_m(z_1, z_2)$ and identities for certain finite exponential sums of [Za] to obtain a different independent proof of Theorem 3.1.

The following integral formula is fundamental (see [BK] Theorem 4.7, [BBK]). It justifies why $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ (and also $\Phi_m(z_1, z_2)$) is called an *automorphic Green function* for the divisor $T(m)$.

Theorem 6.1. *Let $h : Y_K \to \mathbb{C}$ be a bounded eigenfunction of the Laplacian $\Delta^{(1)}$ (or $\Delta^{(2)}$) with eigenvalue λ. Then for $s \in \mathbb{C}$ with $\Re(s) > 1$ we have*

$$\int_{\Gamma_K\backslash\mathbb{H}^2} \Phi_m(z_1, z_2, s) h(z_1, z_2)\, \Omega^2 = \frac{1}{s(s-1) - \lambda} \int_{T(m)} h(z_1, z_2)\, \Omega.$$

Here Ω is defined by (5.5) *so that Ω^2 is an invariant volume form on Y_K.*

Such automorphic Green functions are constructed in greater generality for $\mathrm{O}(2, \ell)$ in [Br2] using the regularized theta lift of Hejhal-Poincaré series, and independently in [OT] from the point of view of spherical functions on real Lie groups.

7 Integrals of automorphic Green functions

It is well known that the volume of Y_K is given by $\mathrm{vol}_\Omega(Y_K) = \int_{Y_K} \Omega^2 = \zeta_K(-1)$, where $\zeta_K(s)$ denotes the Dedekind zeta function of K. The volume of a divisor C on Y_K is defined as the integral $\mathrm{vol}_\Omega(C) = \int_C \Omega$. One can show that the integral is finite, see e.g. [Br3]. If C is effective, then its volume is positive.

It is a well known fact that the volumes of Hirzebruch-Zagier divisors are given by the Fourier coefficients of the unique normalized Eisenstein series in $M_2^+(D, \chi_D)$ (see [Fra], [Ha], and [Ge2] chapter V.5). Let us recall the definition of that Eisenstein series. In weight k there are the two non-holomorphic Eisenstein series

$$E_k^\infty(\tau, s) = \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z} \\ c\equiv 0(D)}} \chi_D(d) \frac{1}{(c\tau+d)^k} \frac{y^s}{|c\tau+d|^{2s}},$$

$$E_k^0(\tau, s) = \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \chi_D(c) \frac{1}{(c\tau+d)^k} \frac{y^s}{|c\tau+d|^{2s}}$$

for $\Gamma_0(D)$ with character χ_D, the former corresponding to the cusp ∞ of $\Gamma_0(D)$, the latter to the cusp 0. (By our assumption that D be prime, these are the only cusps of $\Gamma_0(D)$.) They converge for $\Re(s) > 1 - k/2$ and have a meromorphic continuation in s to the full complex plane. If $k \geq 2$, the special values $E_k^\infty(\tau, 0)$ and $E_k^0(\tau, 0)$ are holomorphic in τ and define elements of $M_k(D, \chi_D)$. One can show that the linear combination

$$E_k(\tau, s) = \frac{1}{2L(k+2s, \chi_D)} \left(D^s E_k^\infty(\tau, s) + D^{1/2-k-s} E_k^0(\tau, s) \right)$$

satisfies the plus space condition. (This follows most easily from Lemma 3 of [BB].) Here $L(s, \chi_D)$ denotes the L-series associated with the Dirichlet character χ_D. In particular we have $E_k(\tau, 0) \in M_k^+(D, \chi_D)$. The Fourier expansion of $E_k(\tau, s)$ has the form

$$E_k(\tau, s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C(n, s) \mathcal{W}_s(4\pi n v) e^{2\pi i n u}, \tag{7.1}$$

where the $C(n, s)$ are complex coefficients independent of v; and $\mathcal{W}_s(v)$ is a certain Whittaker function, which we normalize as in [BK] (3.2). The precise normalization is not important for our purposes here, we only need that it is a universal function for all n of the same sign. The coefficients $C(n, s)$ are computed for instance in [BK] section 5, Example 2. Here we only state the special value

$$E_k(\tau, 0) = 1 + \sum_{n\geq 1} C(n, 0) q^n = 1 + \frac{2}{L(1-k, \chi_D)} \sum_{n\geq 1} \sum_{d|n} d^{k-1} (\chi_D(d) + \chi_D(n/d)) q^n, \tag{7.2}$$

which is obtained in the standard way (see [He], Werke p. 818) using the functional equation of $L(s, \chi_D)$.

Theorem 7.1. *We have*

$$E_2(\tau, 0) = 1 - \frac{2}{\mathrm{vol}_\Omega(Y_K)} \sum_{m\geq 1} \mathrm{vol}_\Omega(T(m)) q^m.$$

Similar identities hold in much greater generality for special cycles on arithmetic quotients of $O(p,q)$ and $U(p,q)$, see e.g. [Ge1], [Ku4], [Ku2], [Od2]. (Observe that our normalization of $\mathrm{vol}_\Omega(T(m))$ equals twice the volume of $T(m)$ in [BBK].)

Let us briefly indicate, how Theorem 7.1 can be deduced from the properties of the automorphic Green functions $\Phi_m(z_1,z_2,s)$. For instance, from the description as a regularized theta lift it follows that the residue at $s=1$ of $\Phi_m(z_1,z_2,s)$ is equal to the constant coefficient $a_m(0)$ of the weak Maass form $f_m \in \mathcal{N}_0^+(D,\chi_D)$ defined at the beginning of section 6. By means of the relationship of the spaces $\mathcal{N}_k^+(D,\chi_D)$ and $M_{2-k}^+(D,\chi_D)$, which is also implicit in (5.1), one finds that $a_m(0) = -\frac{1}{2}C(m,0)$ (see [BF] Proposition 3.5). Therefore we have

$$\Phi_m(z_1,z_2) = \lim_{s\to 1}\left(\Phi_m(z_1,z_2,s) + \frac{C(m,0)}{2(s-1)}\right).$$

Using growth estimates for $\Phi_m(z_1,z_2,s)$, which can be deduced from the constant coefficients of the Fourier expansions, we obtain:

Proposition 7.2. *The function $\Phi_m(z_1,z_2)$ belongs to $L^p(Y_K,\Omega^2)$ for any $p<2$, and*

$$\int_{Y_K}\Phi_m(z_1,z_2)\,\Omega^2 = \lim_{s\to 1}\int_{Y_K}\left(\Phi_m(z_1,z_2,s) + \frac{C(m,0)}{2(s-1)}\right)\Omega^2.$$

If we apply Theorem 6.1 for the constant function $h=1$, we may compute the integral. It is equal to

$$(7.3)\quad \frac{1}{s(s-1)}\int_{T(m)}\Omega + \frac{C(m,0)}{2(s-1)}\int_{Y_K}\Omega^2 = \frac{1}{(s-1)}\left(\frac{\mathrm{vol}_\Omega(T(m))}{s} + \frac{C(m,0)}{2}\mathrm{vol}_\Omega(Y_K)\right).$$

Since the limit $s\to 1$ exists, the quantity in parenthesis on the right hand side has to vanish at $s=1$. This yields the assertion of Theorem 7.1.

So far we have essentially exploited the existence of the integral $\int_{Y_K}\Phi_m(z_1,z_2)\,\Omega^2$, which means that the residue in the Laurent expansion of (7.3) at $s=1$ vanishes. We may actually compute the constant term of that expansion, that is, the value of the integral. It is equal to $-\mathrm{vol}_\Omega(T(m))$.

One can further improve this result by observing that the full coefficient $C(m,s)$ as a function of s occurs in the constant term of $\Phi_m(z_1,z_2,s)$. More precisely, if we define

$$(7.4)\quad G_m(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\left(\Phi_m(z_1,z_2,s) + B(s)\zeta(2s-1)C(m,s-1)\right),$$

with

$$B(s) = \frac{(16\pi)^{s-1}\Gamma(s-1/2)s}{\Gamma(1/2)(2s-1)},$$

then one can show that $G_m(z_1,z_2) = \frac{1}{4}\Phi(z_1,z_2,f_m) + \frac{1}{2}a_m(0)(\Gamma'(1)-\log(8\pi))$ (which is essentially the calculation of the constant L_m on page 20). This means in particular that if F is the Borcherds lift of a weakly holomorphic modular form f with coefficients $a(n)$, then its *Petersson metric* is given by

$$(7.5)\quad \log\|F(z_1,z_2)\|_{Pet} := \log\Big(|F(z_1,z_2)|(16\pi^2 y_1 y_2)^{a(0)/2}\Big) = -\sum_{n<0}\tilde{a}(n)G_{-n}(z_1,z_2).$$

The latter identity can be viewed as a generalization of the Kronecker limit formula expressing the logarithm of the absolute value of the discriminant function (2.2) as the constant term in the Laurent expansion at $s=1$ of the non-holomorphic Eisenstein series of weight 0 for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (see [BK] (4.14)). Notice that the constant $B(s)$ in (7.4) does not depend on m. It changes if the normalization of the Whittaker function $\mathcal{W}_s(v)$ is varied. Arguing as above we find that (see [BK] Theorem 4.10)

$$\int_{Y_K} G_m(z_1,z_2)\Omega^2 = -\frac{\mathrm{vol}_\Omega(T(m))}{2}\big(C'(m,0)/C(m,0) + \log(4\pi) - \Gamma'(1)\big).$$

If we insert the explicit formula for $C(m,s)$, we get

$$(7.6)\quad \int_{Y_K} G_m(z_1,z_2)\Omega^2 = -\mathrm{vol}_\Omega(T(m))\left(\frac{L'(-1,\chi_D)}{L(-1,\chi_D)} + \frac{1}{2} - \frac{\sigma_m'(-1)}{\sigma_m(-1)} + \frac{1}{2}\log(D)\right),$$

where

$$(7.7)\quad \sigma_m(s) = m^{(1-s)/2}\sum_{d|m} d^s(\chi_D(d) + \chi_D(m/d)).$$

In particular, in view of (7.5), the integral over the logarithm of the Petersson metric of any Borcherds product can be computed explicitly (see also [Ku4]). For example, if $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, we obtain for the Gundlach theta function

$$\int_{Y_K} \log\Big(2^{-6}|\Theta(z_1,z_2)|(16\pi^2 y_1 y_2)^{5/2}\Big)\Omega^2 = -\zeta(-1)\left(2\frac{L'(-1,\chi_D)}{L(-1,\chi_D)} + 1 + \log(5)\right).$$

Such integrals play a fundamental role in the Arakelov intersection theory of Hirzebruch-Zagier divisors. We will come back to that in the section 9.

The integral of the logarithm of the Petersson metric of a Borcherds product was first calculated by Kudla in [Ku4] using a different approach based on the Siegel-Weil formula. We recall that the quantity $\Phi(z_1,z_2,f)$ we want to integrate is given by the theta integral (3.7) of a weakly holomorphic modular form f. Now the idea is to interchange the (z_1,z_2)-integration with the regularized integration over τ and to compute

$$(7.8)\quad \int_{\mathcal{F}}\left\langle f(\tau), \int_{Y_K}\Theta_S(\tau;z_1,z_2)d\mu_z\right\rangle d\mu_\tau,$$

where $d\mu_z$ denotes the invariant measure on Y_K. (Notice that this needs a careful justification.) The inner integral over the Siegel theta function can be determined by means of the Siegel-Weil formula. It yields an Eisenstein series of weight 0 for $\Gamma_0(D)$, which can be written in terms of the lowering operator and our Eisenstein series (7.1) of weight 2 as $\frac{1}{s-1}L_2E_2(\tau,s)$. The integrand for the remaining regularized integral over τ is now essentially $\frac{1}{s-1}d(\langle f(\tau),E_2(\tau,s)\rangle d\tau)$ at $s=1$, so that we may use Stoke's theorem to compute it. The derivative of $E_2(\tau,s)$ occurs because of the factor $\frac{1}{s-1}$.

We conclude this section by giving a characterization of the automorphic Green function $\Phi_m(z_1,z_2)$. It can be proved in a similar way as Theorem 5.2.

Proposition 7.3. *Let f be a smooth function on $Y_K - T(m)$ with the properties:*

(i) *f has a logarithmic singularity along $T(m)$,*
(ii) $(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)})\, f =$ *constant,*
(iii) $f \in L^{1+\varepsilon}(Y_K, \Omega^2)$ *for some* $\varepsilon > 0$,
(iv) $\int_{Y_K} f(z_1, z_2)\, \Omega^2 = \frac{1}{2}\mathrm{vol}_\Omega(T(m))$.

Then $f(z_1, z_2) = -\frac{1}{2}\Phi_m(z_1, z_2)$.

8 Arithmetic of Hirzebruch-Zagier divisors

In their paper on the intersection of modular correspondences, Gross and Keating interpreted classical results of Hurwitz and Kronecker by the observation that the intersection number of two modular correspondences on $Y_{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}} = \Gamma(1)^2\backslash\mathbb{H}^2$ is given by the coefficients of the classical Siegel Eisenstein series $E^{(2)}(Z, s)$ of weight 2 and genus 2 at $s = 0$. Their main result was that the arithmetic intersection numbers of three such modular correspondences on the regular model Spec $\mathbb{Z}[j, j']$ of $Y_{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}}$ is given by the coefficients of the derivative of the Siegel Eisenstein series $E^{(3)}(Z, s)$ of weight 2 and genus 3 at $s = 0$ [GK]. Observe that $Y_{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}}$ can be viewed as the "degenerate" Hilbert modular surface with discriminant $D = 1$ and the modular correspondences as Hirzebruch-Zagier divisors in this case.

Kudla proved that the arithmetic intersection numbers in the sense of Arakelov geometry of certain arithmetic special divisors on a regular model of a Shimura curve are dictated by the coefficients of the derivative of a Siegel Eisenstein series of weight 2 and genus 2 at $s = 0$ [Ku1]. (So Kudla considers an arithmetic surfaces, rather than an arithmetic 3-fold as in the case of Gross and Keating. This explains the different genus.) Here the arithmetic divisors are pairs consisting of a special divisor on the regular model and a certain Green function for the induced divisor on the corresponding complex variety, fitting in the setup of arithmetic intersection theory as in [SABK].

In further works Kudla, Rapoport, and Yang developed an extensive program relating arithmetic special divisors on Shimura varieties of type $\mathrm{O}(2, \ell)$ and their arithmetic intersection theory to automorphic forms, in particular to the coefficients of the derivatives of Siegel Eisenstein series. Most of this is conjectural, but in important special cases these conjectures are meanwhile proved. (See e.g. [Ku6] for the $\mathrm{O}(2, 1)$ case of Shimura curves, [KRY] for the $\mathrm{O}(2, 0)$ case of CM elliptic curves, [KR] for partial results in the $\mathrm{O}(2, 3)$ case of Siegel modular threefolds, and [Ku5] for an overview.) Notice that $Y_{\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}}$ can be described in terms of $\mathrm{O}(2, 2)$.

One conclusion of this general picture is that the geometric results over $\mathbb{C}$ of Hirzebruch and Zagier (as e.g. Theorems 4.3 and 7.1) and their generalizations to $\mathrm{O}(2, \ell)$ should have arithmetic analogues over $\mathbb{Z}$. Here the classical intersection theory has to be replaced by Arakelov intersection theory.

In this section we discuss, how Borcherds products can be used to obtain new results in that direction. We begin by recalling some facts on the arithmetic of Hilbert modular surfaces.

In section 2 we briefly discussed that modular curves have a moduli interpretation as a moduli space for isomorphism classes of elliptic curves with additional structure. The same is true for Hilbert modular surfaces, which is the starting point for arithmetic investigations. More precisely, Y_K parametrizes isomorphism classes of triples (A, ι, ψ), where A is an abelian surface over $\mathbf{C}$, ι is an $\mathcal{O}_K$-multiplication, that is, a ring homomorphism $\mathcal{O}_K \to \mathrm{End}(A)$, and ψ is a $\mathfrak{d}^{-1}$-polarization, that is, an isomorphism of $\mathcal{O}_K$-modules $\mathfrak{d}^{-1} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(A, A^\vee)^{\mathrm{sym}}$ from the inverse different $\mathfrak{d}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{D}}\mathcal{O}_K$ to the module of $\mathcal{O}_K$-linear symmetric homomorphisms, taking the totally positive elements of $\mathfrak{d}^{-1}$ to $\mathcal{O}_K$-linear polarizations (see [Go] Chapter 2).

The moduli description now makes sense over any scheme S over $\mathbf{Z}$. (Here one has to require that ψ fulfill an extra technical condition called the Deligne-Pappas condition, see [DePa]. That condition is automatically fulfilled in characteristic 0.) Due to the work of Rapoport, Deligne, and Pappas it is known that the moduli problem "Abelian surfaces over S with $\mathcal{O}_K$-multiplication and $\mathfrak{d}^{-1}$-polarization with Deligne-Pappas condition" is represented by a regular algebraic stack $\mathcal{H}$, which is flat and of relative dimension two over Spec $\mathbf{Z}$. It is smooth over Spec $\mathbf{Z}[1/D]$, and the fiber of $\mathcal{H}$ above D is smooth outside a closed subset of codimension 2.

The corresponding complex variety $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ is isomorphic to Y_K. The isomorphism is obtained by associating to $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{H}^2$ the abelian surface $A_z = \mathbf{C}^2/\Lambda_z$ over $\mathbf{C}$ given by the lattice

$$\Lambda_z = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha z_1 + \beta \\ \alpha' z_2 + \beta' \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2; \quad \alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \right\} \subset \mathbf{C}^2,$$

together with the $\mathcal{O}_K$-multiplication ι induced by the natural action $\iota(\nu) = \left(\begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu' \end{pmatrix}\right)$ of $\mathcal{O}_K$ on $\mathbf{C}^2$, and a certain $\mathfrak{d}^{-1}$-polarization.

For $k \in \mathbf{Z}$ sufficiently divisible there exists a line bundle $\mathcal{M}_k$ on $\mathcal{H}$ (the k-th power of the pull-back along the zero section of the determinant of the relative cotangent bundle of the universal family over $\mathcal{H}$) such that the induced bundle on $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ can be identified with the line bundle $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ of Hilbert modular forms of weight k for Γ_K of the previous sections. By the q-expansion principle and the Koecher principle, the global sections of $\mathcal{M}_k$ can be identified with Hilbert modular forms of weight k for Γ_K with integral rational Fourier coefficients. There exists an arithmetic Baily-Borel compactification $\overline{\mathcal{H}}$ of the coarse moduli space corresponding to $\mathcal{H}$, which can be described as

$$(8.1) \quad \overline{\mathcal{H}} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_k H^0(\mathcal{H}, \mathcal{M}_k) \right).$$

The scheme $\overline{\mathcal{H}}$ is normal, projective, and flat over Spec $\mathbf{Z}$ (see [Ch], p. 549), and $\overline{\mathcal{H}}(\mathbf{C}) \cong X_K$. Furthermore, its fibers over Spec $\mathbf{Z}$ are irreducible (see [DePa], p. 65). By construction, the bundle $\mathcal{M}_k$ extends to $\overline{\mathcal{H}}$.

Throughout the rest of this paper we will make the following

Assumption 8.1. *There exists a desingularization $\pi : \widetilde{\mathcal{X}}_K \to \overline{\mathcal{H}}$ by a regular scheme $\widetilde{\mathcal{X}}_K$, which is projective and flat over $\mathbf{Z}$, such that the regular locus $\overline{\mathcal{H}}^{reg}$ is fiber-wise dense in $\widetilde{\mathcal{X}}_K$, and such that the induced morphism $\widetilde{\mathcal{X}}_K(\mathbf{C}) \to X_K$ is a desingularization as in the previous sections $\widetilde{X}_K$.*

This assumption simplifies the exposition (it might actually be too optimistic). Notice that the singularities of $\overline{\mathcal{H}}$ at the boundary can be resolved by considering a suitable toroidal compactification of $\mathcal{H}$. So only the singularities corresponding to elliptic fixed points would need to be resolved. If one wants to obtain unconditional results one can impose an additional level structure in order to get a fine moduli problem and work with a suitable toroidal compactification of the corresponding moduli scheme (as is done in [BBK]). Unfortunately, in that way one only gets a regular scheme $\widetilde{\mathcal{H}}(N)$ which is projective and flat over $\mathbf{Z}[\zeta_N, 1/N]$, where ζ_N denotes a primitive N-th root of unity and $N \geq 3$ the level.

We define the line bundle of modular forms of weight k on $\widetilde{\mathcal{X}}_K$ as the pullback $\pi^*(\mathcal{M}_k)$. For simplicity we will also denote it by $\mathcal{M}_k$.

It can be shown that the Hirzebruch-Zagier divisors on X_K are defined over $\mathbf{Q}$, that is, $T(m)$ is obtained by base change from a divisor on the generic fiber $\overline{\mathcal{H}} \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ of $\overline{\mathcal{H}}$. We define the Hirzebruch-Zagier divisor $T(m)$ on the generic fiber $\widetilde{\mathcal{X}}_K \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ as the pullback of $T(m)$ on $\overline{\mathcal{H}} \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Moreover, we define the Hirzebruch-Zagier divisor $\mathcal{T}(m)$ on $\widetilde{\mathcal{X}}_K$ as the Zariski closure of $T(m)$.

We now briefly recall some basic properties of arithmetic Chow rings (see e.g. [SABK]). Since Y_K is non-compact, the natural metrics on automorphic vector bundles have singularities at the boundary [Mu], [BKK2]. Therefore we need to work with the extended arithmetic Chow ring $\widehat{\mathrm{CH}}^*(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ constructed in [BKK1]. In this ring the Green objects satisfy beside the usual logarithmic additional log-log growth conditions.

Let $\mathcal{X}$ be an arithmetic variety over $\mathbf{Z}$, i.e., a regular scheme, which is projective and flat over $\mathbf{Z}$. Moreover, let $\mathbf{D}$ be a fixed normal crossing divisor on the complex variety $\mathcal{X}(\mathbf{C})$, which is stable under complex conjugation. An arithmetic divisor on $\mathcal{X}$ (in the sense of [BKK1]) is a pair

$$(y, \mathfrak{g}_y),$$

where y is a divisor on the scheme $\mathcal{X}$ and $\mathfrak{g}_y$ is a pre-log-log Green object for the induced divisor $y(\mathbf{C})$ on $\mathcal{X}(\mathbf{C})$. In particular, a pair (y, g_y) where g_y is a *pre-log-log Green function* for y, determines an arithmetic divisor. This essentially means that g_y is a smooth function on $\mathcal{X}(\mathbf{C}) - (y(\mathbf{C}) \cup \mathbf{D})$, invariant under complex conjugation, with logarithmic singularities along the irreducible components of $y(\mathbf{C})$ and pre-log-log singularities along $\mathbf{D}$ such that the $\partial\bar{\partial}$-equation of currents holds:

$$-2\partial\bar{\partial}[g] = [-2\partial\bar{\partial}g] - \delta_y.$$

Here $[\cdot]$ denotes the current associated to a differential form and δ_y the Dirac current for y normalized as in [BKK1] and [BBK]. A differential form α is called pre-log singular (pre-log-log singular), if α, $\partial\alpha$, $\bar{\partial}\alpha$, and $\partial\bar{\partial}\alpha$ have only logarithmic growth (respectively log-log growth). We write $\widehat{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ for the free abelian group generated by the arithmetic divisors on $\mathcal{X}$. Here $\mathcal{D}_{\mathrm{pre}}$ stands for the Deligne algebra with pre-log-log forms along $\mathbf{D}$, which is needed for the precise description of Green objects in [BKK1]. Moreover, we write $\widehat{\mathrm{Rat}}^1(\mathcal{X})$ for the subgroup of $\widehat{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ given by arithmetic divisors of the form $(\mathrm{div}(f), -\log|f|)$, where f is a rational function on $\mathcal{X}$ and $|f|$ the absolute va-

lue of the induced function on $\mathcal{X}(\mathbb{C})$. The first *arithmetic Chow group* of $\mathcal{X}$ with log-log growth along $\mathbf{D}$ is defined by

$$\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}) = \hat{\mathrm{Z}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}) / \widehat{\mathrm{Rat}}^1(\mathcal{X}).$$

More generally, in [BKK1] arithmetic Chow groups $\widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ of codimension p arithmetic cycles with log-log growth along $\mathbf{D}$ are defined. There exists an arithmetic intersection product

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^q(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}},$$

and

$$\widehat{\mathrm{CH}}^*(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{\mathrm{CH}}^p(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

equipped with this product has the structure of a commutative associative ring.

For instance, if $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$, then the closed points of $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$ can be identified with the primes of $\mathbb{Z}$. An arithmetic divisor is a pair $(\sum_p n_p p,\ g)$ consisting of a finite formal $\mathbb{Z}$-linear combination of primes p and a real number g. The elements of $\widehat{\mathrm{Rat}}^1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z})$ are the pairs of the form $(\sum_{p|N} \mathrm{ord}_p(N)p,\ -\log|N|)$ for $N \in \mathbb{Q}$. This implies that

$$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\sum n_p p,\ g\right) \mapsto g + \sum n_p \log(p)$$

is an isomorphism. It is common to identify $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ with $\mathbb{R}$.

There also is an arithmetic analogue of the Picard group: The *arithmetic Picard group* $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ is the group of isomorphism classes of pre-log singular hermitian line bundles on $\mathcal{X}$. Here a pre-log singular hermitian line bundle is a pair $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ consisting of a line bundle $\mathcal{L}$ on $\mathcal{X}$, and a smooth hermitian metric $\|\cdot\|$ on the induced complex line bundle on $\mathcal{X}(\mathbb{C}) - \mathbf{D}$, invariant under complex conjugation, and such that $-\log\|s\|$ has logarithmic singularities along $\mathrm{div}(s)(\mathbb{C})$ and pre-log-log singularities along $\mathbf{D}$ for any rational section s of $\mathcal{L}$. If $\overline{\mathcal{L}}$ is a pre-log singular hermitian line bundle and s a rational section of $\mathcal{L}$, then, essentially by the Poincaré-Lelong lemma,

$$\hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) = (\mathrm{div}(s), -\log\|s\|)$$

defines a class in $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$, which is independent of the choice of s. It is called the first arithmetic Chern class of $\overline{\mathcal{L}}$. The assignment $\overline{\mathcal{L}} \mapsto \hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$ actually induces an isomorphism

$$\hat{c}_1 : \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}}).$$

We now consider the arithmetic Chow ring $\widehat{\mathrm{CH}}^*(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$ of the model $\widetilde{\mathcal{X}}_K$ of our Hilbert modular surface, where we take for $\mathbf{D}$ the normal crossing divisor $\mathbf{D}_K = \pi^{-1}(X_K^{sing})$. For details we refer to [BBK]. The Green functions of section 6 turn out to be particularly nice, because they fit into the arithmetic Chow theory of $\widetilde{\mathcal{X}}_K$.

Theorem 8.2. *The pair*

$$\widehat{\mathcal{T}}(m) = (\mathcal{T}(m), G_m)$$

defines an element of $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$, *called the arithmetic Hirzebruch-Zagier divisor of discriminant m. Here* G_m *is the automorphic Green function defined by* (7.4).

Notice that G_m always has log-log singularities along $\mathbf{D}_K$, even if $T(m)$ is disjoint to $\mathbf{D}_K$. So G_m does not define a Green function for $T(m)$ in the classical arithmetic Chow theory due to Gillet and Soulé. We therefore really need the extension of [BKK1]. Observe that the arithmetic divisors of Theorem 8.2 slightly differ from those considered by Kudla, Rapoport, and Yang. For instance, they often contain boundary components (which is possible since Y_K is non-compact), and are built with different Green functions.

Moreover, we obtain an element of $\widehat{\mathrm{Pic}}(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$, by equipping the line bundle of modular forms with the *Petersson metric*. Recall that if $F \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})(U)$ is a rational section over an open subset $U \subset Y_K$, then its Petersson metric is given by

$$\|F(z_1, z_2)\|^2_{\mathrm{Pet}} = |F(z_1, z_2)|^2 (16\pi^2 y_1 y_2)^k.$$

This defines a pre-log singular hermitian metric on $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ (with respect to $\mathbf{D}_K$). We denote the corresponding pre-log singular hermitian line bundle by $\overline{\mathcal{M}}_k = (\mathcal{M}_k, \|\cdot\|^2_{\mathrm{Pet}})$. (That the Petersson metric has singularities at the boundary is easily seen: For instance, if $z = (z_1, z_2)$ approaches the cusp ∞ of Y_K, then $y_1 y_2 \to \infty$ by construction of the Baily-Borel topology. At the elliptic fixed points it is continuous, but the derivatives do have singularities.)

A central idea in [BBK] is to connect the arithmetic of Borcherds products and the properties of the automorphic Green functions G_m to derive information on $\widehat{\mathrm{CH}}^1_{HZ}(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$, the subspace of $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$ spanned by the arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors.

Theorem 8.3. *Recall Assumption 8.1. The map* $\mathrm{Z}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K) \to \widehat{\mathrm{Z}}^1_{HZ}(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ *defined by* $T(m) \mapsto \widehat{T}(m)$ *induces an isomorphism*

$$\mathrm{CH}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^1_{HZ}(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}},$$

taking $\mathrm{c}_1(\mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$ *to* $\widehat{\mathrm{c}}_1(\mathcal{M}_k)$.

Sketch of the proof. We have to show that if there is a relation in $\mathrm{Z}^1(\widetilde{X}_K)$ among the $T(m)$, we can lift it to a relation in $\widehat{\mathrm{Z}}^1(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$, and that every relation among arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors arises in that way (up to torsion).

So suppose that F is a rational function on $\widetilde{X}_K$ with divisor $\sum_{n<0} \tilde{c}(n) T(-n)$. Then by the strong converse theorem (Theorem 5.4), we may assume that F is a Borcherds product, that is, the lift of a weakly holomorphic modular form $f \in W_0^+(D, \chi_D)$ with Fourier expansion $\sum_n c(n) q^n$ as in Theorem 3.1. It can be shown that any meromorphic Borcherds product is the quotient of two holomorphic ones ([BBK] Proposition 4.5). Therefore we may write $F = F_1/F_2$, where F_1, F_2 are holomorphic Borcherds products of the same weight. But then the Borcherds product expansion (Theorem 3.1 (iii)) implies that a positive power of F_j has integral rational Fourier coefficients. Without loss of generality we may assume that already the F_j have integral rational Fourier coefficients. According to the q-expansion principle F_j defines a section $\mathcal{F}_j$ of $\mathcal{M}_k$ on the

model $\widetilde{\mathcal{X}}_K$. Hence the quotient of these sections is a rational function on $\widetilde{\mathcal{X}}_K$ that specializes to F on the generic fiber.

We claim that the divisor of $\mathcal{F}_j$ on $\widetilde{\mathcal{X}}_K$ is horizontal. To see this, we notice that by work of Rapoport, Deligne, and Pappas, the geometric fibers of $\mathcal{H}$ are irreducible (see [Ra], [DePa]). It follows by Assumption 8.1, that the same holds for the geometric fibers of $\widetilde{\mathcal{X}}_K$. Suppose that $\operatorname{div}(\mathcal{F}_j)$ contains a vertical component above a prime p. Then, because of the irreducibility of the fibers, $\operatorname{div}(\mathcal{F}_j)$ contains the full fiber above p. By the q-expansion principle, this implies that all Fourier coefficients of F_j are divisible by p. But the Borcherds product expansion of F_j shows that the coefficients are coprime (in fact, the coefficient corresponding to the Weyl vector $\rho(F_j)$ is 1), and therefore a contradiction.

Thus the divisor of $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$ is horizontal and equal to $\sum_{n<0} \tilde{c}(n)\mathcal{T}(-n)$. In view of (7.5) we may conclude that

$$\sum_{n<0} \tilde{c}(n)\widehat{\mathcal{T}}(-n) = (\operatorname{div}(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2), -\log|F|) = 0 \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}.$$

Conversely, every relation among arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors obviously specializes to a relation on the generic fiber. □

As a corollary we see that $\dim(\widehat{\mathrm{CH}}^1_{HZ}(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}) = \dim(\mathrm{CH}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}) = [\frac{D+19}{24}]$. Moreover, diagram (5.4) has an arithmetic analogue, where one has to replace $Z^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)$ by $\widehat{Z}^1_{HZ}(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})$ and $\mathrm{CH}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$ by $\widehat{\mathrm{CH}}^1_{HZ}(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$. Finally, in view of Theorem 4.3, one obtains the following arithmetic Hirzebruch-Zagier theorem (cf. [BBK] Theorem 6.2):

Theorem 8.4. *The arithmetic generating series*

$$\widehat{A}(\tau) = \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_{-1/2}) + \sum_{m>0} \widehat{\mathcal{T}}(m)q^m \tag{8.2}$$

is a holomorphic modular form in $M_2^+(D, \chi_D)$ with values in $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$, i.e., an element of $M_2^+(D, \chi_D) \otimes_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$.

9 Arithmetic intersection numbers

The first Chern form of the line bundle $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ equipped with the Petersson metric is equal to

$$c_1(\mathcal{M}_k(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\mathrm{Pet}}) = 2\pi i k \cdot \Omega,$$

where Ω denotes the Kähler form (5.5). Consequently, $\mathrm{vol}_\Omega(Y_K) = \zeta_K(-1)$ can also be regarded as the geometric self intersection number $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})^2$ of the line bundle of modular forms of weight 1. Moreover, Theorem 7.1 can be rephrased by saying that the intersection of the geometric generating series (4.2) and $c_1(\mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$ is given by

$$A(\tau) \cdot c_1(\mathcal{M}_k(\mathbb{C})) = -\frac{k}{2}\zeta_K(-1) \cdot E_2(\tau, 0),$$

where $E_2(\tau, 0) \in M_2^+(D, \chi_D)$ is the Eisenstein series (7.2).

In view of this result it is natural to ask, what the intersection of the arithmetic generating series (8.2) with the class $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k)^2 \in \widehat{\mathrm{CH}}^2(\widetilde{\mathcal{X}}_K, \mathcal{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$ is.

Theorem 9.1. *Recall Assumption 8.1. We have the following identities of arithmetic intersection numbers:*

$$\widehat{A}(\tau)\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k)^2 = \frac{k^2}{2}\zeta_K(-1)\left(\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)}+\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log(D)\right)\cdot E_2(\tau,0), \tag{9.1}$$

where $E_2(\tau,0)$ denotes the Eisenstein series defined in (7.2). *In particular, the arithmetic self intersection number of $\overline{\mathcal{M}}_k$ is given by:*

$$\overline{\mathcal{M}}_k^3 = -k^3\zeta_K(-1)\left(\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)}+\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log(D)\right). \tag{9.2}$$

Let us briefly indicate how Theorem 9.1 can be proved (see [BBK] Theorem 6.4 for details). For simplicity we assume that $M_2^+(D,\chi_D) = \mathbb{C}E_2(\tau,0)$ (that is $D = 5$, 13, or 17). In this case, regarding Theorem 8.4, we only have to determine the constant term of $\widehat{A}(\tau)\cdot\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k)^2$, that is, essentially the arithmetic self intersection number of $\overline{\mathcal{M}}_k$. The hypothesis on $M_2^+(D,\chi_D)$ implies in particular that G_m is the logarithm of the Petersson metric of a holomorphic Borcherds product with divisor $T(m)$ for any m.

Let p be any prime that is split in $\mathcal{O}_K$ (that is $\chi_D(p) = 1$). It can be shown that there exist infinitely many m_2 and infinitely many m_3, such that $\chi_D(m_j) = 1$, $T(m_2)$ is disjoint to the boundary, and such that all possible intersections of $T(p)$, $T(m_2)$, $T(m_3)$ on X_K are proper.

Let F_1, F_2, F_3 be the Borcherds products on X_K with divisors $T(p)$, $T(m_2)$, $T(m_3)$, respectively. By the bilinearity of the arithmetic intersection pairing we may assume that these Borcherds products are integral, i.e., have trivial multiplier system and integral rational Fourier coefficients. We may further assume that they all have the same (sufficiently divisible) weight k. Thus they define sections of $\mathcal{M}_k$. The definition of the arithmetic self intersection number then says:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}_k^3 &= \widehat{\deg}\big(h_*\big(\mathrm{div}(F_1)\cdot\mathrm{div}(F_2)\cdot\mathrm{div}(F_3)\big)\big)\\ &\quad+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\widetilde{X}_K(\mathbb{C})}(-\log\|F_1\|_{\mathrm{Pet}})*(-\log\|F_2\|_{\mathrm{Pet}})*(-\log\|F_3\|_{\mathrm{Pet}}).\end{aligned} \tag{9.3}$$

Here the integral is over the star product of the Green functions corresponding to the sections F_j of $\overline{\mathcal{M}}_k$. It describes the intersection at the Archimedian place. Moreover, $h:\widetilde{\mathcal{X}}_K\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ denotes the structure morphism. The first summand is the intersection at the finite places.

Using growth estimates for certain boundary terms, one finds that the integral in (9.3) is equal to

$$k^2\int\limits_{\widetilde{X}_K} G_p\,\Omega^2 + k\int\limits_{T(p)'} -\log\|F_2\|_{\mathrm{Pet}}\,\Omega + \int\limits_{T(p)'\cap\mathrm{div}(F_2)'} -\log\|F_3\|_{\mathrm{Pet}},$$

where $T(p)'$ denotes the strict transform of the divisor $T(p)$ in $\widetilde{X}_K$ ([BBK] Theorem 3.13). The integral of G_p was computed in (7.6).

There is a birational morphism φ from the modular curve $X_0(p)$ onto $T(p)$ (which extends to integral models over $\mathbb{Z}[1/p]$). This fact can be used to interpret the sum of the latter two integrals as a star product on the modular curve $X_0(p)$, where it can be evaluated by means of the results of [Kü2] or [Bost].

The finite intersection can also be reduced to a finite intersection on the minimal regular model of $X_0(p)$ by applying the projection formula for the morphism φ.

It turns out that the finite contribution and the Archimedian contribution fit together rather nicely and yield the desired result up to contributions from the fiber above p. But now we can vary p, that is, take different Borcherds products for the F_j, to get the precise formula for $\overline{\mathcal{M}}_k^3$.

In the general case, one can argue similarly, since it can be proved that $\mathrm{CH}^1_{HZ}(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$ is already generated by Hirzebruch-Zagier divisors $T(p)$ of prime discriminant p (with $\chi_D(p) = 1$), see [BBK] section 4.2.

Formula (9.2) provides evidence for a conjecture of Kramer, based on results obtained in [Kr] and [Kü1], saying that the arithmetic volume of an arithmetic variety as $\widetilde{\mathcal{X}}_K$ is essentially the derivative of the zeta value for the geometric volume of $\widetilde{\mathcal{X}}_K(\mathbb{C})$. In the same way, it provides further evidence for the conjecture of Kudla on the constant term of the derivative of certain Eisenstein series [Ku2], [Ku3], [Ku5], and the conjecture of Maillot and Roessler on special values of logarithmic derivatives of Artin L-functions [MaRo].

It would be very interesting to find a more conceptual explanation for the fact that the geometric intersection $A(\tau) \cdot \mathrm{c}_1(\mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$ is proportional to $\widehat{A}(\tau) \cdot \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{M}}_k)^2$.

We may apply Theorem 9.1 and (7.6) to compute the Faltings height of $\mathcal{T}(m)$ with respect to $\overline{\mathcal{M}}_k$ (as defined in [BKK1] and [BBK] section 1). We find:

Theorem 9.2. *Recall Assumption 8.1. If $T(m)$ is a Hirzebruch-Zagier divisor which is disjoint to the boundary of X_K, then the Faltings height of its model $\mathcal{T}(m) \in \mathrm{Z}^1(\widetilde{\mathcal{X}}_K)$ is given by*

$$\mathrm{ht}_{\overline{\mathcal{M}}_k}(\mathcal{T}(m)) = -2k^2 \operatorname{vol}_\Omega(T(m)) \left(\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_m'(-1)}{\sigma_m(-1)} \right).$$

Here $\sigma_m(s)$ is the generalized divisor sum defined in (7.7).

We conclude by noticing that Assumption 8.1 can be avoided in the above theorems by introducing a level structure to rigidify the moduli problem. For instance, in [BBK] the full level N-structure is used (where N is an arbitrary integer ≥ 3). Then the moduli problem is represented by an arithmetic variety over $\mathbb{Z}[\zeta_N, 1/N]$. However, since N is inverted in the base, one only gets arithmetic intersection numbers in $\mathbb{R}_N = \mathbb{R} / \langle \sum_{p|N} \mathbb{Q} \cdot \log(p) \rangle$.

References

[AbSt] *M. Abramowitz and I. Stegun*, Pocketbook of Mathematical Functions, Verlag Harri Deutsch, Thun (1984).

[Ap] *T. M. Apostol*, Modular functions and Dirichlet series in Number Theory, Graduate Texts in Mathematics **41**, Springer-Verlag, New York (1990).

[Bo1] *R. E. Borcherds*, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products, Invent. Math. **120** (1995),161–213.

[Bo2] *R. E. Borcherds*, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)^+$ and generalized Kac-Moody algebras, Proceedings of the ICM 1994, Birkhäuser, Basel (1995), 744–752.

[Bo3] *R. E. Borcherds*, Automorphic forms and Lie algebras, Current Developments in mathematics 1996, International Press (1998).

[Bo4] *R. E. Borcherds*, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[Bo5] *R. E. Borcherds*, What is moonshine?, Proceedings of the International congress of Mathematicians, Doc. Math., Extra Vol. I (1998), 607–615.

[Bo6] *R. E. Borcherds*, The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions, Duke Math. J. **97** (1999), 219–233.

[Bost] *J.-B. Bost*, Intersection theory on arithmetic surfaces and L_1^2-metrics, letter (1998).

[Br1] *J. H. Bruinier*, Borcherds products and Chern classes of Hirzebruch-Zagier divisors, Invent. math. **138** (1999), 51–83.

[Br2] *J. H. Bruinier*, Borcherds products on $O(2, l)$ and Chern classes of Heegner divisors, Lect. Notes Math. **1780**, Springer-Verlag, Berlin (2002).

[Br3] *J. H. Bruinier*, Two applications of the curve lemma for orthogonal groups, preprint (2003), to appear in Math. Nachr. http://arxiv.org/abs/math.NT/0301102

[BB] *J. H. Bruinier and M. Bundschuh*, On Borcherds products associated with lattices of prime discriminant, Ramanujan J. **7** (2003), 49–61.

[BF] *J. H. Bruinier and J. Funke*, On two geometric theta lifts, preprint (2003), to appear in Duke Math. Journal. http://arxiv.org/abs/math.NT/0212286

[BK] *J. H. Bruinier and U. Kühn*, Integrals of automorphic Green's functions associated to Heegner divisors, Int. Math. Res. Not. **2003:31** (2003), 1687–1729.

[BBK] *J. H. Bruinier, J. Burgos, and U. Kühn*, Borcherds products and arithmetic intersection theory on Hilbert modular surfaces, preprint (2003). http://arxiv.org/abs/math.NT/0310201

[BKK1] *J. Burgos, J. Kramer, and U. Kühn*, Cohomological Arithmetic Chow groups, preprint (2003). http://arXiv.org/math.AG/0404122

[BKK2] *J. Burgos, J. Kramer, and U. Kühn*, Arithmetic characteristic classes of automorphic vector bundles, in preparation.

[Ch] *C.-L. Chai*, Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli spaces, Ann. Math. **131** (1990), 541–554.

[DePa] *P. Deligne and G. Pappas*, Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant, Compos. Math. **90** (1994), 59–79.

[DeRa] *P. Deligne and M. Rapoport*, Les schémas de modules de courbes elliptiques. In: Modular Functions of One Variable II, Lecture Notes in Math. **349**, Springer-Verlag, Berlin (1973), 143–316.

[DI] *F. Diamond and J. Im*, Modular forms and modular curves, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings **17** (1995), 39–133.

[DN] *K. Doi and H. Naganuma*, On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. Math. **9** (1969), 1–14.

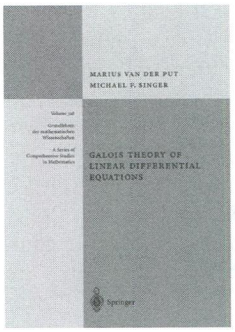
[Fra] *H.-G. Franke*, Kurven in Hilbertschen Modulflächen und Humbertsche Flächen im Siegelraum, Bonner Math. Schriften **104** (1978).

[Fr] *E. Freitag*, Hilbert Modular Forms, Springer-Verlag, Berlin (1990).

[Fu] *J. Funke*, Heegner divisors and nonholomorphic modular forms, Compos. Math. **133** (2002), 289–321.

[Ge1] *G. van der Geer*, On the geometry of a Siegel modular threefold, Math. Ann. **260** (1982), 317–350.
[Ge2] *G. van der Geer*, Hilbert Modular Surfaces, Springer-Verlag, Berlin (1988).
[Go] *E. Z. Goren*, Lectures on Hilbert Modular Varieties and Modular Forms, CRM Monograph Series **14**, American Mathematical Society, Providence (2002).
[GN] *V. Gritsenko and V. Nikulin*, Automorphic forms and Lorentzian Kac-Moody algebras. Part II, Intern. J. of Math. **9** (1998), 201–275.
[GK] *B. H. Gross and K. Keating*, On the intersection of modular correspondences, Invent. math. **112** (1993), 225–245.
[Gu] *K.-B. Gundlach*, Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Math. Annalen **152** (1963), 226–256.
[HM] *J. Harvey and G. Moore*, Algebras, BPS states, and strings, Nuclear Phys. B **463** (1996), no. 2–3, 315–368.
[Ha] *W. Hausmann*, Kurven auf Hilbertschen Modulflächen, Bonner Math. Schriften **123** (1980).
[He] *E. Hecke*, Analytische Arithmetik der positiv definiten quadratischen Formen, Kgl. Danske Vid. Selskab. Math. fys. Med. XIII **12** (1940). Werke, 789–918.
[Hej] *D. A. Hejhal*, The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbb{R})$, Lect. Notes Math. **1001**, Springer-Verlag, Berlin (1983).
[Hi] *H. Hironaka*, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II, Ann. Math. **79** (1964), 109–203 , 205–326.
[Hz] *F. Hirzebruch*, The Hilbert modular group, resolution of the singularities at the cusps and related problems. Sem. Bourbaki 1970/71, Lect. Notes Math. **244** (1971), 275–288.
[HZ] *F. Hirzebruch and D. Zagier*, Intersection Numbers of Curves on Hilbert Modular Surfaces and Modular Forms of Nebentypus, Invent. Math. **36** (1976), 57–113.
[Ho] *R. Howe*, θ-series and invariant theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **33**, part 1, American Mathematical Society (1979), 275–285.
[Ko] *W. Kohnen*, A very simple proof for the q-product expansion of the Δ-function, preprint (2002), to appear in Ramanujan J.
[Kon] *M. Kontsevich*, Product formulas for modular forms on $O(2, n)$, Séminaire Bourbaki **821** (1996).
[Kr] *J. Kramer*, An arithmetic theory of Siegel-Jacobi forms, Habilitationsschrift, ETH Zürich (1992).
[Ku1] *S. Kudla*, Central derivatives of Eisenstein series and height pairings, Ann. Math. **146** (1997), 545–646.
[Ku2] *S. Kudla*, Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles, Sem. Bourbaki **876** (1999-2000).
[Ku3] *S. Kudla*, Derivatives of Eisenstein series and arithmetic geometry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 173–183, Higher Ed. Press, Beijing (2002).
[Ku4] *S. Kudla*, Integrals of Borcherds forms, Compos. Math. **137** (2003), 293–349.
[Ku5] *S. Kudla*, Special cycles and derivatives of Eisenstein series, Proceeding of the MSRI workshop on special values of Rankin L-series, to appear. http://arxiv.org/math.NT/0308295
[Ku6] *S. Kudla*, Modular forms and arithmetic geometry, preprint, Harvard (2002).
[KM1] *S. Kudla and J. Millson*, The theta correspondence and harmonic forms I, Math. Ann. **274**, (1986), 353–378.
[KM2] *S. Kudla and J. Millson*, The theta correspondence and harmonic forms II, Math. Ann. **277**, (1987), 267–314.
[KM3] *S. Kudla and J. Millson*, Intersection numbers of cycles on locally symmetric spaces and Fourier coefficients of holomorphic modular forms in several complex variables, IHES Publi. Math. **71** (1990), 121–172.
[KR] *S. Kudla and M. Rapoport*, Cycles on Siegel threefolds and derivatives of Eisenstein series, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **33** (2000), 695–756.
[KRY] *S. Kudla, M. Rapoport, T. Yang*, On the derivative of an Eisenstein series of weight one, Int. Math. Res. Not. **1999:7** (1999), 347–385.

[Kü1] *U. Kühn*, Über die arithmetischen Selbstschnittzahlen zu Modulkurven und Hilbertschen Modulflächen, Dissertation, Humboldt-Universität Berlin (1999).
[Kü2] *U. Kühn*, Generalized arithmetic intersection numbers, J. Reine Angew. Math. **534** (2001), 209–236.
[Ma] *H. Maass*, Modular functions of one complex variable, Spinger-Verlag, Berlin (1983).
[MaRo] *V. Maillot and D. Roessler*, Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entier négatifs, Math. Res. Lett. **9** (2002), 715–724.
[Mu] *D. Mumford*, Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case, Invent. Math. **42** (1977), 239–272.
[Na] *H. Naganuma*, On the coincidence of two Dirichlet series associated with cusp forms of Hecke's "Neben"-type and Hilbert modular forms over a real quadratic field, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 547–555.
[Ni] *D. Niebur*, A class of nonanalytic automorphic functions, Nagoya Math. J. **52** (1973), 133–145.
[Od1] *T. Oda*, On Modular Forms Associated with Indefinite Quadratic Forms of Signature $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1977), 97–144.
[Od2] *T. Oda*, A note on a geometric version of the Siegel formula for quadratic forms of signature $(2, 2k)$, Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A No. **20** (1984), 13–24.
[OT] *T. Oda and M. Tsuzuki*, Automorphic Green functions associated with the secondary spherical functions, preprint, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.
[On] *K. Ono*, The Web of Modularity: Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and q-series, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **102**, American Mathematical Society, Providence (2004).
[Ra] *M. Rapoport*, Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal, Compos. Math. **36** (1978), 255–335.
[Sh] *G. Shimura*, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press, Princeton (1971).
[SABK] *C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol, and J. Kramer*, Lectures on Arakelov Geometry, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **33**, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
[Za] *D. Zagier*, Modular Forms Associated to Real Quadratic Fields, Invent. Math. **30** (1975), 1–46.



M. Van der Put, M. F. Singer
Galois Theory of Linear Differential Equations
Grundlehren 328

Berlin u. a., Springer, 2003, 456 S., € 89,95

Let me begin with my overall impression, in two words: at last! At last, a thorough exposition, including most of the facets it presents nowadays, of this beautiful analogue of the Galois theory of field extensions, initiated by Liouville on the footsteps of Galois, enriched by Lie's introduction of infinitesimal groups, turned into a theory by Picard and Vessiot, and forgotten for half a century until Kolchin gave it its "modern" form in a fundamental 1948 article ([Ko], 87–128). The theory consists, in short, of replacing polynomials over a field K by linear differential operators over a differential field (K, ∂), splitting fields by Picard-Vessiot differential extensions, and finite groups by linear algebraic groups: you then still get a Galois dictionary. When K is a global object such as $\mathbf{C}(z)$, you can localize at one of the singular points of the differential equation, say 0, and get an array of analogues of the inertia groups: the formal differential group after base extension to the field of formal powers series $\mathbf{C}((z))$, or stopping half-way in the completion, the local analytic differential group over the field of convergent powers series $\mathbf{C}(\{z\})$. All this, and much more, will here be found.

This laudative introduction does not mean that I praise everything in the book, and I give some hopefully constructive criticisms below. It does not mean either that our authors's predecessors must be forgotten: Kaplansky's book [Ka] played a crucial role in publicizing Kolchin's Picard-Vessiot theory (and the Zariski topology). It did lack foundational material on Picard-Vessiot extensions, but this is remedied by Magid's monograph [M]. Several articles (see in particular [S], [Be], [Le]) also helped, and in spite of their inaccessible language or distribution, we can further mention lecture notes such as [P] or [La]. Finally, a special notice should be made of Kolchin's two books and of his collected works [Ko], which go beyond the (linear) Picard-Vessiot theory. In fact, non-linear differential Galois theory is still under construction, with new view-points provided by current work of Umemura, Pillay, Malgrange, and a synthesis is clearly required. Wisely for a Grundlehren volume, the book under review, which we now analyse in a more details, restricts to the linear case.

Chapter 1 gives a self-contained presentation of the foundational material on Picard-Vessiot extensions and of the Galois correspondance, all in 30-odd pages: a real treat. One difficulty in this type of exposition is the choice one has to make between the various interpretations of a linear differential equation: an element of the ring of differential operators $K[\partial]$, a differential system, a module over $K[\partial]$ (all these are presented, together with their relationships, in Chapter 2), or the localization at the generic point of a vector bundle with connection (which will appear in Chapter 6). Chapter 2 also introduces the constructions of linear algebra in the differential context, leading to the language of tannakian categories, and to the first example (here between differential equations and representations of groups) of the numerous equivalences of categories to be met in the book. The usefulness of this approach is well conveyed by the one-line proof it provides (p. 56, ℓ. 1) that the fixed field under a normal subgroup is a Picard-Vessiot extension. Chapter 3 concerns the local theory over a field $\hat{K}$ of type $\mathbf{C}((z))$, with the classical dichotomy between regular and irregular singularities: in the second case, determining factors, here called eigenvalues, produce the exponential torus, a subgroup of the formal

Galois group which is in general not covered by the formal monodromy. This leads to an equivalence of categories between differential equations over $\hat{K}$ and a category Gr_1 made of down-to-earth triples. Chapter 4 goes global, and describes general methods for computing differential Galois groups, which are supported by ingenious (and often efficient) algorithms; this is probably their first appearance in book form. It is interesting to note that just as in the study of ℓ-adic representations, Jordan's theorem on finite subgroups of GL_n plays an important role; further links with classical Galois groups are given at the end of this chapter.

For most of the rest of the book, the constant field is $\mathbf{C}$, allowing for an analytic description of the Galois group. Thus, Chapters 5 and 6 study regular singular systems over the Riemann sphere, and their re-interpretation, using GAGA, as local systems over the complement of the singular locus , or equivalently, as representations of its fundamental group (cf. §§ 6.2 and 6.4); here, the monodromy group is Zariski dense in the Galois group. The various forms of the Riemann-Hilbert problem are clearly stated, leading to Bolibrukh's negative (and sometimes positive) solution if one searches for a connection with logarithmic singularities on a trivial bundle. Chapters 7, 8, and 9 concern the much more difficult case of irregular singularities, with the study of asymptotic expansions and the Stokes phenomenon, their refined Gevrey versions and multisummation, yielding Stokes matrices and Ramis's theorem, according to which the local analytic Galois group is topologically generated by the modromy, the exponential torus, and the Stokes group. Differential equations over $\mathbf{C}(\{z\})$ are classified in terms of the Stokes sheaf; and the category they form is shown to be equivalent to a refined version Gr_2 of Gr_1, which is still easy to describe. The inverse problem of differential Galois theory is the subject of Chapter 11, in both local and global contexts, and from both theoretical and constructive points of view. Chapter 12 offers tentative approaches to moduli spaces of differential equations. Finally, Chapter 13 describes the work of Matzat and the first author on iterative differential equations over fields of finite characteristic, and their applications to p-adic differential equations.

Needless to say, a book with such a large scope cannot maintain a homogeneous level, and although its basic results require only standard notions from multilinear or commutative algebra, further prerequisites are needed in its more advanced parts. Fortunately, the authors have added three useful appendices to come to the rescue. They respectively deal with algebraic geometry, including a short course on linear algebraic groups; tannakian categories, pedagogically introduced by Galois categories and affine group schemes; and sheaf cohomology. (A last appendix concerns the Picard-Vessiot theory of linear partial differential equations.)

Now for the criticisms. The book is not free of misprints, and I'll here give only a sample: on p. 31, ℓ. 1-, read $C[G]$, or $\mathcal{O}(G)$, instead of $\mathcal{O}[G]$; complete the sentence on p. 220, $\ell\ell$. 17-20; add "are invertible" on p. 249, ℓ. 15-; on p. 340, ℓ. 18, read "reducible" instead of "irreducible"; erase "non" on p. 341, ℓ. 17, ... But on the content itself, I think the book would have gained from the following additions:

– examples of how to compute the Galois groups of some classical families of differential equations (for instance, rigidity deserved more than the passing remark at the end of §5.1; more could have been said on Lie algebraic methods, as in the work of N. Katz, or on the general algorithm of Compoint and Singer in the reductive case);

– a better presented index: e.g., the word "defect" has two completely different meanings in the book (p. 177, and p. 275), while the index lists only one.

– a more thorough bibliography, or rather, a more homogeneous one: there is nothing wrong with quoting very recent articles or preprints whose impact it is still difficult to evaluate, but basic papers such as [F] or [A] should not be forgotten;

– last, but not least: more detailed comments on the history of the recent results covered by the book. I found such shortcomings more noticeable in its analytic part (see, for instance, Lemma 7.59), even if scattered comments (7.25, 8.11, ...) do appear along the text. It would have been useful to gather them in the conclusion of each chapter, as was actually done at the end of Chapters 3 and 11. Also, unnecessary adverbs sometimes accompany the attributions, e.g. on p. 229, where Ramis's theorem is "originally" due to Ramis, or on p. 79, where Katz's criterion for formal irreducibility "also" appears in a paper of Katz.

When presenting a theory, authors are of course free to choose their favoured approach, or to put the stress on what they believe to be the final word, but this book is bound to become *the* reference on the subject, and it is a pity to downplay the role of other view-points (say, for instance, the analytic approach to multisummation via inverse and direct Laplace transforms, p. 227). Fortunately, references such as [Ko] (see in particular the second author's commentary, pp. 527–524), or the preface of [Ba], provide enough information to answer the above criticisms.

These are minor points. The book is in fact already becoming a standard reference, not only for differential Galois theory proper, but also for the many areas which have accompanied its recent growth: tannakian categories, the algorithmic aspects of differential algebra and of representation theory, multisummability, the Riemann-Hilbert and other inverse problems, moduli... On top of its intrinsic interest, differential Galois theory is an ideal testing ground for these theories. Any (young or not so young) student working in these areas will benefit from this book, which clearly belongs to all mathematical libraries.

References

[A] Y. André: *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*; Ann.Sc. ENS 34, 2001, 685–739.

[Ba] W. Balser: *From divergent series to analytic functions*; Springer LN 1582, 1994.

[Be] F. Beukers: *Differential Galois theory in* "From number theory to physics", Chapter 10, Springer, 1992.

[F] A. Fahim: *Extensions galoisiennes d'algèbres différentielles*; Thèse Univ. Lille, 1990; see also Pacific J. Math. 180, 1997, 7–40.

[Ka] I. Kaplansky: *An introduction to differential algebra*; Hermann, 1957.

[Ko] E. Kolchin: *Selected works, with commentary*; AMS 1991.

[La] R. Lardon: *Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle*; Notes d'un Cours de 3e Cycle, Univ. Paris 6, 1985–86.

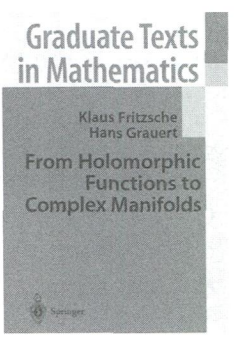
[Le] G. Levelt: *Differential Galois theory and tensor products*; Indag. math., 1, 1990, 439–450.

[M] A. Magid: *Lectures on differential Galois theory*; AMS ULS 7, 1994.

[P] M. van der Put: *Galoistheorie van differentiaalvergelijkingen*; College Univ. Groningen, 1982.

[S] M. Singer: *An outline of differential Galois theory*; Proc. CADE, Acad. Press, 1989, 3–57.

Paris D. Bertrand



K. Fritzsche, H. Grauert
From Holomorphic Functions to Complex Manifolds
Grad. Texts in Math. 213

Berlin u. a., Springer, 2002, 392 S., € 64,95

In der Einleitung zum Buch von Klaus Fritzsche und Hans Grauert wird das Ziel definiert: „The aim of this book is to give an un-

derstandable introduction to the theory of complex manifolds", und der Leser soll mit den wichtigsten Zweigen und Methoden der Komplexen Analysis vertraut gemacht werden. Hierbei können die Autoren auf ihr Buch „Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher", bzw. dessen englische Fassung zum Teil zurückgreifen.

Im ersten Kapitel werden die funktionentheoretischen Notationen eingeführt zu komplex differenzierbaren und holomorphen Funktionen, dem Cauchyschen Integralsatz in mehreren Veränderlichen und holomorphe Abbildungen. Bei den ersten Ergebnissen zur Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen, finden sich der erste Riemannsche Hebbarkeitssatz, aber auch Sätze über Reinhardtsche Körper und Hartogsfiguren.

Letztere stehen am Anfang der Theorie der Holomorphiegebiete im zweiten Kapitel. Zentrale Resultate sind der Satz von Cartan-Thullen und Sätze in Zusammenhang mit dem Levi-Problem.

Das dritte Kapitel über Analytische Mengen enthält den Weierstraßschen Vorbereitungs- bzw. Divisionssatz und als ein Hauptergebnis den Fortsetzungssatz von Remmert und Stein.

Als bekanntes Korollar wird der Satz von Chow im vierten Kapitel bewiesen, welches die Überschrift „Komplexe Mannigfaltigkeiten" trägt. Hier werden in durchaus kompakter Form die wesentlichen Notationen und Definitionen zusammengestellt und in direkter Weise die benötigten niederen Kohomologiegruppen eingeführt. Als Beispiele komplexer Mannigfaltigkeiten finden sich komplexe Tori, Hopf-Mannigfaltigkeiten, der komplex projektive Raum und allgemein projektiv algebraische Mannigfaltigkeiten, sowie Graßmannsche Mannigfaltigkeiten. Verzweigte Überlagerungen und als Beispiele konkrete Riemannsche Flächen werden zusammen mit monoidalen Transformationen und dem Konzept der meromorphen Abbildung ebenfalls in diesem Kapitel behandelt.

Ein neues Kapitel über Stein-Theorie wurde eingefügt: Hier kommen die Autoren allein mit Potenzreihenmethoden und der Lösbarkeit des Cousin-I-Problems aus, um einen Beweis der Lösung des Levi-Problems darzustellen.

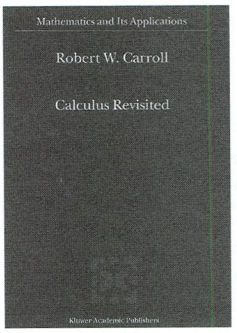
Die abstrakteren Konzepte in Zusammenhang mit der Theorie der kohärenten Garben und höheren Kohomologiegruppen werden im vorliegenden Buch bewusst ausgespart – Sprache und Denkweise unterscheiden sich von denjenigen der Algebraischen Geometrie.

Kählersche Geometrie ist das Thema des sechsten Kapitels. Hier findet der Leser eine Einführung in die Komplexe Differentialgeometrie mit dem Ziel, modulo der Existenz schwacher Lösungen der entsprechenden linearen, partiellen Differentialgleichungen, den Einbettungssatz für Hodge-Mannigfaltigkeiten zu beweisen.

Das letzte Kapitel gibt einen Ausblick auf neuere Entwicklungen, insbesondere die Theorie streng pseudokonvexer Gebiete in komplexen Mannigfaltigkeiten, der zugehörigen Differentialoperatoren und Sobolev-Räume, das Neumann-Problem und die erforderlichen „subelliptic estimates".

Das Buch erschien in der Reihe „Graduate Texts in Mathematics". Es wendet sich in diesem Sinne an fortgeschrittene Studierende und jeden, der sich hier einarbeiten will, und enthält interessante Übungsaufgaben. Auch der Fachmann wird dieses Buch zu Rate ziehen wollen, das sicherlich als eine Einführung in die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten zu den Standardreferenzen gehört.

Marburg G. Schumacher



R. W. Carroll
Calculus Revisited
Math. and its Appl. 554

Dordrecht u. a., Kluwer, 2002, 532 S.,
€ 184,–

Das Vorwort des Buches beginnt mit den Sätzen: „It can easily be maintained that classical calculus à la Newton and Leibniz, along with subsequent embellishment, is one of the greatest achievements of the human intellect (...). Within this (suitably embellished) classical calculus as a language one can (arguably) find most of classical mathematics and classical theoretical physics (including number theory and some quantum mechanics)".

Der Autor führt dann weiter aus: In den letzten Jahren haben Forschungen in der theoretischen Physik (Stringtheorie, Quantengravitation, Quantenfeldtheorie) und der Mathematik (nichtkommutative Geometrie, Quantengruppen, diskrete Mathematik) zu einer Weiterentwicklung und Verallgemeinerung der Calculustechniken geführt. Dabei erscheinen Ideen aus klassischen mathematischen Gebieten (z. B. Knotentheorie, Lie-Theorie, Homologie) in einem neuen Licht. Die nichtkommutative Differential- und Integralrechnung ist vor allem in der Theorie der Quantengruppen und Quantenräume und in der nichtkommutativen Geometrie fest verankert. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl von Querverbindungen und Berührungspunkten zu unterschiedlichen Gebieten und Methoden der Mathematik und Physik. Stichpunktartig seien hier etwa q-deformierte spezielle Funktionen, Differentialrechung und diskrete Strukturen, integrable Systeme, Seiberg-Witten-Abbildung der nichtkommutativen Eichtheorie, Connes-Kreimer-Hopfalgebren und Feynmanndiagramme, und „Fuzzy"- Physik genannt.

Das vorliegende Buch von Robert W. Carroll versucht, eine ungezwungene („informal") Darstellung dieser Entwicklungen zu geben. Dabei steht größtenteils die nichtkommutative Differential- und Integralrechnung im Mittelpunkt. Einen Überblick über den Inhalt des Buches geben die Kapitelüberschriften:

1. Basis for quantum groups
2. Calculus and algebra
3. Differential calculi
4. More on q-analysis
5. Remarks on quantum transmutation
6. Discretization and quantum mechanics
7. Discrete calculus
8. Fuzzy physics and matrix geometry
9. Further aspects on finite quantum mechanics
10. Integrable systems
11. Aspects of gauge theory
12. Pointless spaces and quantum gravity

Für die meisten der im Buch behandelten Gebiete würde eine rigorose Darlegung mit vollständigen Beweisen eine eigene Monographie erfordern. Der Autor hat deshalb einen anderen Zugang gewählt: Wie im Vorwort ausgeführt stellt er sich das Ziel, das Material und die tragenden Ideen für den „informierten Anfänger" zu entwickeln. Exakte Definitionen und Beweise der Resultate werden dann gegeben, wenn sie – aus Sicht des Autors – für das Verständnis der Darlegung wesentlich sind. Viele mathematische und physikalische Grundbegriffe werden als bekannt vorausgesetzt. Große Teile des Buches sind in der Darstellung sehr eng an ausgewählte Originalarbeiten oder an Kapitel aus anderen Monographien angelehnt, in denen der Leser weitere Details und Beweise finden kann. Stoffauswahl und Schreibstil entsprechen mehr dem theoretischen Physiker als dem Mathematiker. Auch die Referenzliste von 690 Publikationen besteht überwiegend aus Arbeiten von theoretischen und mathematischen Physikern.

Das Buch enthält eine Fülle von konkretem Material und eine Vielzahl von expliziten Formeln. Differentialkalküle auf Koordinatenalgebren von Quantenräumen und damit zusammenhängende Begriffe und Strukturen (q-deformierte Ableitungen, Differentialoperatoren, Heisenbergalgebra etc.) machen etwa die Hälfte des Buches aus. Die kovariante Differentialrechnung auf Quantenvektorräumen spielt ein zentrale Rolle. Für kovariante Differentialkalküle auf Quantengruppen wird in den Abschnitten 3.1 – 3.3 die allgemeine Theorie fast vollständig entwickelt, es wird aber kein einziges Beispiel eines kovarianten Kalküls auf einer Quantengruppe gegeben. Die Woronowicz'schen 3D- und 4D-Kalküle auf der Quantengruppe $SU_q(2)$ lassen sich jedoch bereits auf etwa 2 Seiten vollständig darstellen (siehe [KS], S. 497 und 504). Mehr noch: Die grundlegende Konstruktionsmethode für bikovariante Kalküle auf koquasitriangulären Hopfalgebren (siehe [J] und [KS], 14.5) kommt im Buch gar nicht vor! Die Klassifikationsresultate aus [BS], [HS] zeigen aber gerade, dass - unter milden Voraussetzungen – *alle* bikovarianten Kalküle auf den Standardquantengruppen mit dieser Methode beschrieben werden. Fordert man noch, dass der Linksmodul der 1-Formen von den Differentialen der Matrixgeneratoren erzeugt wird, dann gibt es sogar nur wenige ausgezeichnete bikovariante Kalküle auf den Standardquantengruppen. Eine analoge Voraussetzung ist auch für die Eindeutigkeit kovarianter Kalküle auf Quantenvektorräumen notwendig (siehe [PW]). Die entsprechenden Bemerkungen auf S. 4–20 sind damit irreführend für den Leser.

An verschiedenen Stellen wird das Material zu unkritisch und zu wenig aufgearbeitet aus den meist physikalischen Originalarbeiten übernommen. Bei dem Theorem 2.1 auf S. 3–12 wird der lückenhafte Beweis aus der Originalarbeit reproduziert (siehe etwa [KS], 14.4, für einen vollständigen Beweis). Manche Herleitungen haben nur formalen Charakter (etwa die meisten Rechnungen auf den Seiten 4–7 bis 4–9 und 4–12 bis 4–15 mit der universellen R-Matrix für komplexes q), die abgeleiteten Formeln gelten aber rigoros. Für den Leser ist dies nur schwer erkennbar. Hier hätte ich mir eine genauere Kommentierung des Authors gewünscht.

Bei der Vielfalt des im Buch behandelten Materials und der zahlreichen Beispiele wären eine Zusammenstellung häufig benutzter Begriffe und eine bessere Abstimmung in den Bezeichnungen notwendig gewesen. Die auf S. 1–13 gegebene kurze Definition der quantisierten Envelopingalgebra ist für den Nichtexperten kaum verständlich (der Unterschied zwischen h-adischem und komplexem Fall wird gar nicht erklärt). Die Hopfalgebra $U_q(sl_2)$ kommt auf den Seiten 1–11, 4–22 und 4–24 jeweils mit unterschiedlicher Form der Generatoren vor. Die Quantenebene wird auf Seite 2–5 durch die Gleichung $yx = qxy$ und auf der Seite 4–6 durch $xy = qyx$ defniert. Bei der Definition der Dixmierspur auf S. 8–24 wird das Symbol ω nicht erläutert (ω ist hier ein singulärer Zustand auf der W^*-Algebra $l^\infty(\mathbb{N})$).

Welchem Leser nutzt das vorliegende Buch?

Dem Experten oder Forschenden auf einem der behandelten Gebiete wohl weniger, denn er wird vorwiegend auf die originalen Arbeiten und Monographien zurückgreifen. Dem interessierten Leser, der über keine Vorkenntnisse verfügt, wohl kaum, denn er wird eher eine geeignete Einführung oder ein Lehrbuch zur Hand nehmen. Das Buch ist – nach den Worten des Autors – in der ersten Linie für den „informierten Anfänger" geschrieben, d. h. für einen Leser, der bereits mehr oder weniger gute Vorkenntnisse hat und sich über ein angrenzendes Gebiet informieren will oder für einen Mathematiker bzw. theoretischen Physiker, der über die Anwendungen in der theoretischen Physik bzw. die mathematischen Strukturen lesen will. Viele der neu erscheinenden mathematischen Bücher sind Lehrbücher über Gegenstände, über die es bereits zahlreiche ausgezeichnete Lehrbücher gibt, oder spezielle Monographien, die vorwiegend an die Experten des Gebietes gerichtet sind. Bücher

für den „informierten Anfänger" (wie Carroll's Buch) erscheinen zu selten. Durch die Materialfülle, die zahlreichen konkreten Formeln und Beispiele, und die umfangreichen Querverbindungen von Mathematik und theoretischer Physik werden sicher viele Leser interessante Aspekte in dem vorliegenden Buch von R. W. Carroll finden.

References

[BS] P. Baumann und F. Schmitt, *Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups*, Commun. Math. Phys. **194** (1998), 71–86.

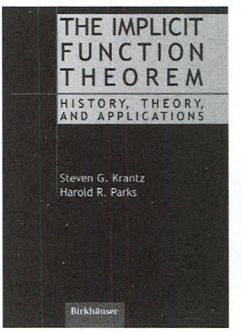
[HS] I. Heckenberger und K. Schmüdgen, *Classification of bicovariant differential calculi on the quantum groups $SL_q(n+1)$ and $Sp_q(2n)$*, J. Reine Angew. Math. **502** (1998), 141–162.

[J] B. Jurco, *Differential calculi on quantized simple Lie groups*, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 177–186.

[KS] A. Klimyk und K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.

[PW] W. Pusz und S.L. Woronowicz, *Twisted second quantization*, Rep. Math. Phys. **27** (1989), 231–257.

Leipzig K. Schmüdgen



S. G. Krantz, H. R. Parks
The Implicit Function Theorem, History, Theory, and Applications

Basel, Birkhäuser, 2002, 176 S., € 73,–

Der Stoff einer drei- bis viersemestrigen Analysis-Vorlesung wie wir sie in Deutschland lehren oder lehren sollten beinhaltet einige zentrale Resultate, die Ausgangspunkte wichtiger Entwicklungen der (höheren) Analysis sind. Man denke etwa an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Lebesgue-Integration, den Gauß'schen Satz oder den Satz über implizite Funktionen. Diese, und andere Resultate können in der Vorlesung nur unter „Standard"-Annahmen diskutiert werden und längst nicht alle wichtigen Anwendungen können erwähnt oder gar behandelt werden. (Pro-) Seminare bieten eine gute Gelegenheit hier sinnvoll Vorlesungen zu ergänzen. – Material gibt es viel, gute Bücher, auch für Studenten verständlich und bezahlbar, hingegen wenige.

Steven Krantz und Harold Parks legen nun ein Buch mit dem Titel „The Implicit Function Theorem. History, Theory, and Applications" vor, welches von der Intention der Autoren geeignet sein sollte, als Seminartext im obigen Sinne zu dienen. Das Buch beginnt mit 12 Seiten Einleitung, die ganz nett zu lesen sind, sodann gibt es 20 Seiten „History", die mich nicht so begeistern (entweder sollte man „Geschichte der Mathematik" sehr ernsthaft betreiben oder sein lassen), aber viele werden diesen Abschnitt gern mögen. Schließlich geht's los: Kap. 3: Basic Ideas, Kap. 4: Applications, Kap. 5: Variations and Generalisations, Kap. 6: Advanced Implicit Function Theorems. Zusam-

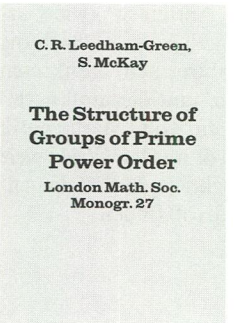
men 107 Seiten „core text“ und 20 Seiten „History“. Dazu 6 Seiten teilweise nutzloses „Glossary“ (Besov Space: A space of functions in which smoothness is measured by certain p^{th}-power integral expressions), 76 Referenzen auf 9 Seiten (!) und ein kurzer Index. Hierfür verlangt der Verlag € 73,– und ich kann mit gutem Gewissen von keinem Studenten erwarten, diesen Preis zu bezahlen. – Und dies ist sehr schade. Wir haben es nämlich mit einem sehr geeigneten Seminartext zu tun, ein gut geschriebenes Buch, welches Verbreitung unter Mathematikstudenten mit besonderen Interessen an der Analysis verdient.

Einige Details: In Kapitel 3 werden mehrere, vom Ansatz her verschiedene Beweise des Satzes über implizierte Funktionen gegeben (Dinis Beweis mittels Induktion, der „klassische“ Beweis – Definitheit der Jacobi-Matrix, der Fixpunkt-Satz-Beweis) und dann werden die typischen Folgerungen (Satz von der Umkehrabbildung, Rang-Satz) gezogen. Sehr schön das Gegenbeispiel am Ende: Der Satz von der Umkehrabbildung benötigt die Stetigkeit der Ableitung.

Das Kapitel „Anwendungen“ behandelt u. a. Probleme aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, Homotopie-Methoden zur Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen und die äquivalenten Definitionen von Flächen. Besonders erwähnenswert: der Beweis der Glattheit der Abstandsfunktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x, S), S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Weitere Anwendungen finden sich in Kapitel 5, wo es um den Weierstraß'schen Vorbereitungssatz, implizierte-Funktionen-Sätze für nicht differenzierbare Funktionen oder spezielle, singuläre Fälle geht. Das letzte Kapitel behandelt tiefere Resultate, etwa Hadamards globalen Satz über implizite Funktionen und vor allem den Satz von Moser-Nash.

Nochmals: Ein schönes Buch für ein interessantes (Pro-)Seminar, aber mit nur ca. 130–140 Seiten ernsthaften Text viel zu teuer! Warum nicht eine Paperback-Ausgabe für € 20,–?

Swansea N. Jacob



C. R. Leedham-Green, S. McKay
The Structure of Groups of Prime Power Order
London Math. Soc. Monogr. 27

Oxford University Press, 2002, 346 S., £ 66,–

Das Spektrum der endlichen Gruppen spannt sich zwischen den einfachen Gruppen auf der einen Seite und den p-Gruppen, also den Gruppen von Primzahlpotenzordnung, auf der anderen Seite. Sind erstere klassifizierbar, so haben letztere sich wegen ihrer ungeheuren Vielzahl allen Klassifikationsversuchen erfolgreich widersetzt. Das vorliegende Buch unternimmt das Unmögliche: Es beweist einen Struktursatz für endliche p-Gruppen, der eine erstaunlich weitgehende Klassifikation nicht nur ermöglicht, sondern bei der auch die interessanten p-Gruppen am Anfang der Klassifikation kommen.

Entscheidendes Strukturmerkmal endlicher p-Gruppen ist ihre Nilpotenz, also eine Eigenschaft, die schwächer als Kommutativität und stärker als Auflösbarkeit ist: Ist G eine Gruppe, so ist ihre absteigende Zentralreihe durch iterierte Kommutatorbildung mit der Gesamtgruppe G gebildet, in Formeln:

$$\gamma_1(G) := G, \gamma_i(G) := [G, \gamma_{i-1}(G)].$$

G heißt nilpotent, falls diese Reihe bei der 1-Untergruppe $\{1\} = \gamma_{c+1}(G)$ terminiert, wobei das kleinste c mit dieser Eigenschaft dann die (Nilpotenz-)Klasse $c(G)$ von G heißt. Ist die Klassifikation der p-Gruppen der Klasse 1, also der abelschen Gruppen, noch eine Übungsaufgabe in der Algebra, so muss man bei Klasse 2 bereits aufgeben. Der zentrale Begriff des vorliegenden Buches ist der Begriff der Koklasse: Eine p-Gruppe der

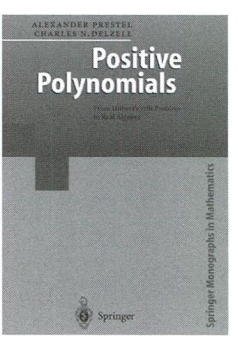
Ordnung p^n hat die Koklasse $cc(G) := n - c(G) = \sum_{i=1}^{c} a_i$, wo $|\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)| = p^{a_i+1}$. Klassischerweise sind p-Gruppen maximaler Klasse, also von der Koklasse 1, untersucht worden. Bei diesen steigt die absteigende Zentralreihe so langsam wie möglich ab, d. h. $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Die Beobachtung, die am Anfang der dargestellten Theorie stand (etwa 1980), ist diese: Jede p-Gruppe maximaler Klasse hinreichend großer Ordnung hat ein ziemlich großes gemeinsames epimorphes Bild mit der eindeutig bestimmten unendlichen Pro-p-Gruppe maximaler Klasse. Letztere lässt sich leicht als Erweiterung eines p-adischen Gitters vom Rang $p-1$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p konstruieren, wobei die invarianten Teilgitter durch Inklusion linear geordnet sind. Dies ist das einfachste Beispiel einer einreihigen p-adischen Raumgruppe. Kompliziertere treten bei größeren (endlichen) Koklassen auf, aber für jede feste Koklasse bis auf Isomorphie nur endlich viele. Der Struktursatz, der den Vergleich einer beliebigen endlichen p-Gruppe G von gegebener Koklasse mit einem dieser endlich vielen einreihigen p-adischen Raumgruppen derselben Koklasse ermöglicht, ist ein auf den ersten Blick kontraintuitiver Satz, der für ungerade Primzahlen p so lautet (Seite 129):

Ist G eine p-Gruppe der Koklasse r, so hat G einen Normalteiler der Nilpotenzklasse 1 oder 2 vom Index höchstens $p^{2(p-1)p^{r-1}+r-3}$.

Dieser Satz hat die überraschende Konsequenz, dass p-Gruppen, die im Sinne der Nilpotenzklasse weit weg von abelschen Gruppen sind, also eine kleine Koklasse haben, im Sinne der Länge der gewöhnlichen Kommutatorreihe sehr nahe bei abelschen Gruppen liegen. Der ursprüngliche Zugang zu diesem Ergebnis benutzte die Klassifikation der einfachen algebraischen Gruppen über den p-adischen Zahlkörpern. Im vorliegenden Buch, übrigens das erste zu diesem Themenkomplex überhaupt, wird ein elementarer Zugang gewählt, welcher im Prinzip von einem Studenten, der eine Grundvorlesung in Algebra gehört hat, verfolgt werden kann. So gut wie alle benötigten Hilfsmittel werden in dem Buch bereitgestellt: elementare p-Gruppentheorie, p-Gruppen maximaler Klasse, potenzreiche p-Gruppen, Liealgebren, lokale Körper, Pro-p-Gruppen, homologische Algebra, einreihige p-adische Raumgruppen und ihre getwisteten Faktorgruppen. Das Buch endet mit einem Ausblick auf die Theorie der Pro-p-Gruppen von linearem Koklassenwachstum, einem derzeit sehr aktiven Forschungsgebiet.

Dieses Buch wird ein Klassiker der p-Gruppentheorie und gehört ins Bücherregal eines jeden Gruppentheoretikers. Ohne wesentliche Vorkenntnisse vorauszusetzen, führt es von den Anfängen bis zur aktuellen Forschung und wird sicherlich der Gruppentheorie neue Freunde gewinnen. Es eignet sich etwa für eine fortgeschrittene Vorlesung über Gruppentheorie mit einem anschließenden Seminar. Der klare Stil des Buches und der ausführliche Notationsindex erlauben es, mit etwas Vorwissen, praktisch an jeder Stelle des Buches einzusteigen.

Aachen W. Plesken



A. Prestel, Ch. N. Delzell
Positive Polynomials. From Hilbert's 17th Problem to Real Analysis

Berlin u. a., Springer 2001, 268 S., € 48,10

In seinem 17. Problem hatte Hilbert gefragt, ob jedes auf $\mathbb{R}^n$ nichtnegative Polynom $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ als Summe von Quadraten rationaler Funktionen geschrieben werden kann, d. h. ob eine Gleichung

$$h^2 f = f_1^2 + \cdots + f_r^2$$

mit $f_1, \ldots, f_r$, $h \in \mathbb{R}[x]$ und $h \neq 0$ besteht. Die Lösung (im bejahenden Sinne) gelang Artin 1926. Sein Beweis öffnete neue Bahnen und kann mit einiger Berechtigung als Geburtsstunde der modernen reellen Algebra gesehen werden. Eine wesentliche Innovation ist die Einführung von Anordnungen „abstrakter" Körper K, und (für $\mathrm{char}(K) \neq 2$) die Charakterisierung der Quadratsummen in K als der Elemente, welche unter jeder Anordnung nichtnegativ sind. Der zweite entscheidende Schritt ist ein Spezialisierungsargument, das es erlaubt, von den Werten $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ auf die Vorzeichen von f bezüglich der Anordnungen des Funktionenkörpers $\mathbb{R}(x) = \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ zu schließen. Diesen Schritt sieht man heute meistens eingebettet in das Transferprinzip von Tarski, welches üblicherweise in der Sprache der Modelltheorie formuliert wird. Ein etwas anderer, ebenfalls auf Artins Ideen basierender Zugang wurde in den 1950er Jahren von S. Lang weiterentwickelt und wird heute als Stellensatz von Artin-Lang bezeichnet.

Dies also ist der Ausgangspunkt für den Rahmen des Buches, wie dessen Untertitel ihn absteckt. Zu ergänzen wäre freilich, daß es den Leser bis an den Stand aktueller Forschung führt. Von Hilberts Fragestellung und Artins Antwort ausgehend kann man den im vorliegenden Band beschrittenen weiteren Weg wie folgt skizzieren. Statt einer Charakterisierung der auf ganz $\mathbb{R}^n$ nichtnegativen Polynome studiert man allgemeiner die auf einer vorgegebenen Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ nichtnegativen, oder strikt positiven, Polynome, und zwar für Mengen S der Form

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) \geq 0, \ldots, f_r(x) \geq 0\}$$

mit $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[x]$. (Solche Mengen S heißen *basisch abgeschlossen.*) An die Stelle der Summen von Quadraten von Polynomen tritt dabei die von $f_1, \ldots, f_r$ erzeugte *Präordnung*, d. h. der von diesen Elementen und allen Quadraten von Polynomen erzeugte Halbring T in $\mathbb{R}[x]$. Jedes $f \in T$ erfüllt offenkundig $f|_S \geq 0$. Daher gilt dasselbe auch für jedes $f \in \mathbb{R}[x]$, welches eine Identität $fs = f^{2m} + t$ mit $m \geq 0$ und $s, t \in T$ erfüllt. Bemerkenswerter Weise gilt hiervon auch die Umkehrung: Jedes Polynom f mit $f|_S \geq 0$ erfüllt eine solche Identität. In ähnlicher Weise kann man strikte Positivität kennzeichnen: Für ein Polynom f gilt $f|_S > 0$ genau dann , wenn eine Identität $fs = 1 + t$ mit $s, t \in T$ besteht. Solche Aussagen nennt man[1] Stellensätze, in Anlehnung an Hilberts berühmten Nullstellensatz, und zwar entsprechend Nichtnegativ- bzw. Positivstellensatz. Sie wurden in den 1960er und 70er Jahren gefunden und können als Verallgemeinerungen und Verschärfungen von Hilberts 17. Problem gesehen werden. Wie in diesem wird die (strikte oder nicht-strikte) Positivität durch Darstellungen *mit Nenner* charakterisiert.

Viel stärker und überraschender sind *nennerfreie* Stellensätze. Eine Urform solcher Resultate bildet der sogenannte Darstellungssatz von Kadison-Dubois, der in seiner Grundgestalt auf M. Stone zurückgeht und in verschiedenen Versionen vielfach neu entdeckt und bewiesen wurde. Wesentlich jüngeren Datums ist der Positivstellensatz von K. Schmüdgen (1991). Er besagt, daß T jedes Polynom f mit $f|_S > 0$ enthält, sofern nur S kompakt ist. Schmüdgen fand dies beim Studium von (verallgemeinerten, multivariaten) Momentenproblemen der Analysis, und machte dabei wesentlichen Gebrauch von Methoden aus der Hilbertraum- und der Operatortheorie. Es ist ein erstaunliches Ergebnis, das seither im Bereich der reellen Algebra eine Reihe neuer Entwicklungen in Gang gesetzt hat.

In den kommenden Jahren gelang es, Schmüdgens Satz rein algebraisch aus dem genannten Darstellungssatz abzuleiten (den man schon seit langem ebenfalls rein algebraisch versteht), und ihn damit in einen neuen Zusammenhang zu stellen. Dies blieb nicht das einzige Beispiel einer Befruchtung zwischen Analysis und Algebra. Ebenfalls

[1] auch in der englischsprachigen Literatur

aus der Operatortheorie kam der Anstoß zu einer Verschärfung der Aussage: Statt der Präordnung T betrachtet man die kleinere Menge M, welche von allen $p^2, p^2f_1, \ldots, p^2f_r$ (für $p \in \mathbb{R}[x]$) als additive Halbgruppe in $\mathbb{R}[x]$ erzeugt wird. Im Gegensatz zu T ist also M im allgemeinen nicht mehr multiplikativ abgeschlossen. Man nennt M den von $f_1, \ldots, f_r$ erzeugten *quadratischen Modul.* Von Putinar wurde die Frage aufgeworfen, unter welchen Voraussetzungen jedes auf der kompakten Menge S positive Polynom sogar in M liegt. Nachdem Putinar mit analytischen Mitteln entscheidende Vorarbeiten geleistet hatte, gelang es Jacobi und Prestel vor einigen Jahren auf rein algebraischem Wege, eine vollständige Antwort zu geben. Sie hier vollständig wiederzugeben ist nicht möglich, doch sei zumindest die folgende Konsequenz notiert: Für $r \leq 2$ ist Putinars Frage stets zu bejahen, während es für $r \geq 3$ Gegenbeispiele gibt.

Diese hier nur rudimentär skizzierten Ergebnisse bilden ganz grob den Rahmen für die vorliegende Monographie. Es wird der Versuch unternommen, den Leser vollständig an die genannten Resultate heranzuführen, und diesem Ziel werden die Autoren insgesamt in bewundernswürdiger Weise gerecht.

Der Band zerfällt vom Anspruch wie auch vom Inhalt her in zwei Teile. Die ersten vier Kapitel haben eher den Charakter eines Lehrbuchs und entwickeln allgemeine Grundlagen. Dagegen wird in den Kapiteln 5–8 wesentlich stärker spezialisiert, um zu den oben genannten Ergebnisse hinzuführen. Den ersten Teil kann man auch als eine allgemeine Einführung in die reelle Algebra lesen. Allerdings wird immer wieder deutlich, daß die hier behandelten Themen mit Blick auf die im zweiten Teil benötigten Anwendungen ausgewählt wurden. Um den vorgegebenen Rahmen nicht zu sprengen, mußte notgedrungen an der Breite der Darstellung gespart werden, und so wird man manches vergeblich suchen, was man sich in einem reinen Lehrbuch zu diesem Thema erhofft hätte.

Das erste Kapitel führt, ganz im Artinschen Geist, Anordnungen von Körpern und ihre reelle Abschlüsse ein, und beweist die Existenz und Eindeutigkeit der letzteren mit Hilfe der Sturmschen Ketten. Im zweiten Kapitel wird die Quantorenelimination für reell abgeschlossene Körper und (in ihrer Folge) das Tarskiprinzip bewiesen. Das technische Hilfsmittel sind dabei Ultraprodukte. Die allgemeine modelltheoretische Sprache wird nicht eingeführt, sondern, soweit benötigt, ad hoc auf die konkrete Situation zugeschnitten. Semialgebraische Mengen werden definiert und der Projektionssatz (die geometrische Version der Quantorenelimination) wird bewiesen. Dagegen wird auf die Geometrie semialgebraischer Mengen überhaupt nicht eingegangen. Kapitel 3 gibt eine schnelle Einführung in quadratische Formen über Körpern, insbesondere in Verbindung mit Anordnungen (Pfisters Lokalglobal Prinzip, Struktur des Wittrings). Pfisters Satz über Quadratsummen in reellen Funktionenkörpern wird aus dem (nur zitierten) Satz von Tsen–Lang bewiesen, womit eine quantitative Präzisierung von Hilberts 17. Problem erreicht wird.

Im vierten Kapitel wird das reelle Spektrum von Ringen eingeführt, und es werden die allgemeinen reellen Stellensätze („mit Nenner") bewiesen. Eine Besonderheit, die man in anderen Lehrbüchern selten findet, sind die η_α-Körper. Sie werden benutzt, um das reelle Spektrum von $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ als Menge von Äquivalenzklassen in $(\mathbb{R}^*)^n$ ($\mathbb{R}^*$ = eine Ultrapotenz von $\mathbb{R}$) zu charakterisieren, und dabei den Zusammenhang zwischen Spezialisierung im reellen Spektrum und Reduktion modulo der kanonischen Bewertung von $\mathbb{R}^*$ herzustellen.

Die beiden nächsten Kapitel sind das Herzstück des Buches. Vereinfacht gesagt geht es in Kapitel 5 um den Satz von Schmüdgen und in Kapitel 6 um die Modulversionen von Putinar und Jacobi–Prestel. Beide Kapitel kreisen um das grundlegende Konzept der Archimedizität. Der Darstellungssatz wird in verschiedenen Versionen formuliert, die etwas vereinfachend alle der

folgenden Form entsprechen: Ist ein Objekt P, wie etwa eine Präordnung oder ein quadratischer Modul, archimedisch, so enthält P alle auf der zugehörigen Menge strikt positiven Funktionen. Schmüdgens Theorem etwa wird dann zu dem Satz, daß T (unter der Voraussetzung S kompakt) stets archimedisch ist, während das Hauptergebnis von Kapitel 6 eine Kennzeichnung der archimedischen quadratischen Moduln in $\mathbb{R}[x]$ ist. Der technische Apparat ist nun recht erheblich, zumal noch neue Konzepte hinzukommen wie etwa Semiordnungen und das Lokal-global Prinzip für schwache Isotropie quadratischer Formen (Bröcker, Prestel 1974). Die lokalen Objekte für das letztere sind Henselisierungen des Körpers bezüglich gewisser Krull-Bewertungen. Die Verbindung zum Momentenproblem der Analysis wird kurz hergestellt, jedoch nicht eingehender diskutiert. Andere Anwendungen der Theorie, etwa in der polynomialen Optimierung, werden in dem Buch gar nicht gestreift.

Es folgen noch zwei Kapitel von abrundendem Charakter: Kapitel 7 überträgt manche der zuvor erzielten Ergebnisse von quadratischen Präordnungen bzw. Moduln auf solche höherer Stufe (Summen von $2m$-ten Potenzen statt Summen von Quadraten). Kapitel 8 unterzieht die betrachteten nennerfreien Darstellungen einer qualitativen Komplexitätsanalyse: Ist $f|_S > 0$ (mit S kompakt), so kann die Komplexität solcher Darstellungen beschränkt werden, wenn man nicht nur den Grad von f, sondern auch die Beträge der Koeffizienten von f (nach oben) und $\min f(S)$ (nach unten) beschränkt.

Das Buch schließt mit einem ausführlichen Anhang über Bewertungstheorie (45 Seiten). Behandelte Themen sind die Fortsetzung von Bewertungen auf algebraische und auf rein transzendente Erweiterungen, die Galoistheorie von Bewertungen, sowie Henselisierung und Vervollständigung von Bewertungen. Die letzteren werden insbesondere im 6. Kapitel gebraucht. Man wird es den Autoren danken, daß sie sich der Mühe einer Darstellung unterzogen und die Bewertungstheorie nicht als bekannt vorausgesetzt haben. Gute Expositionen der Bewertungstheorie sind leider immer noch Mangelware.

Jedes Kapitel schließt mit sorgfältigen bibliographischen und historischen Anmerkungen und mit einer Serie von Übungsaufgaben.

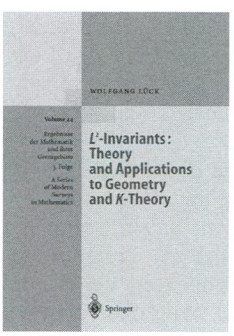
Ich halte das Buch für ein verdienstvolles Werk, da es erstmals einen direkten Weg zu diesem wichtigen und aktuellen Forschungsgebiet bahnt. Der überwiegende Teil des Inhalts der Kapitel 5–8 ist zuvor noch nicht in Buchform erschienen, und einige der Ergebnisse aus den beiden letzten Kapiteln erfahren damit wohl überhaupt ihre erste Publikation. Die vom Leser verlangten Vorkenntnisse gehen im Prinzip über eine Standardvorlesung in Algebra kaum hinaus. So eignet sich das Buch auch als Vorlage für eine zweisemestrige Vorlesung im Hauptstudium, etwa begleitet von einem Seminar über Bewertungstheorie. Tatsächlich ist es aus einer solchen Vorlesung des erstgenannten Autors entstanden. Es muß aber betont werden, daß es sich um eine anspruchsvolle Lektüre handelt, die vom Leser viel Konzentration verlangt. Das gilt nicht nur für den zweiten, sondern auch schon für den ersten („Lehrbuch"-) Teil. Wer mit diesen Grundlagen vertraut ist, wird hier sicher keine Schwierigkeiten haben. Wer aber hier erst die Initiation in reeller Algebra erlebt, mag sich wohl manchmal mehr Motivation und mehr Orientierungshilfe wünschen. Insbesondere die Kapitel 2 und 4 sind doch um einiges spröder ausgefallen, als es dem Charakter des Themas entspricht. Vielleicht hätte hier und da ein Schuß Geometrie den Charme etwas erhöht.

Eine gewöhnungsbedürftige Besonderheit ist die Notation $A^{(n)}$ für das kartesische Produkt $A \times \cdots \times A$. Dagegen steht A^n für die Menge der n-ten Potenzen im Ring A! Dies führt manchmal zu merkwürdig aussehenden Formulierungen, siehe etwa Theorem 5.4.5 als ein Beispiel für viele. Hier hätte sich wohl auch ein anderer Weg finden lassen, einen Notationskonflikt zu vermeiden.

Zuweilen erhält man den Eindruck eines gewissen Zeitdrucks auf Seiten der Autoren, etwa wenn der Text gelegentlich eher stichpunktartig ausfällt als wirklich ausformuliert wird. Oder wenn auf Seite 188 ein bekannter Satz von Minkowski zitiert und für seinen Beweis auf ein Buch von Černikov verwiesen wird, sich aber genau derselbe Satz samt vollständigem Beweis schon auf Seite 132 findet. Andererseits habe ich nur wenige Druckfehler und überhaupt keine echten mathematischen Fehler gefunden. Die von den Autoren eingerichtete Internetseite mit Korrekturen, Updates und ergänzendem Material ist denn auch derzeit (Herbst 2003) noch leer.

Insgesamt sind die gemachten kritischen Anmerkungen eher von marginaler Bedeutung und mindern die Verdienste des Werkes nicht. Das Buch enthält einen beträchtlichen Schatz an schöner und wichtiger Mathematik, und man wird ihm viele Leser wünschen, die die nötige Neugier und Ausdauer mitbringen, sich diesen zu erschließen.

Duisburg C. Scheiderer



W. Lück
L^2-Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory
Erg. der Math. 44

Berlin u. a., Springer, 2002, 595 S., € 119,–

Der vorliegende 44. Band der 3. Folge der großartigen „Ergebnisse" – Reihe ist rekordverdächtig: Er wiegt, so steht es in den vollständigen bibliographischen Daten, 1040 Gramm. Es kann also in dieser Besprechung nicht um eine möglichst vollständige Inhaltsangabe gehen, und das ist auch schon deswegen ganz überflüssig, weil die meisten Mathematiker, die in der Topologie und in den angrenzenden Bereichen der Algebra und Geometrie arbeiten, das Buch ohnehin zur Kenntnis genommen haben werden. Ich möchte also den anderen Lesern des Jahresberichts – notwendigerweise ganz vage – erklären, worum es geht, und sie dazu ermuntern, das Vorwort und die Einleitung des Buches zu lesen und auch in den späteren Kapiteln ein bisschen zu schmökern.

Die älteste und auch topologischen Laien am besten bekannte Invariante eines Raumes X ist seine Euler-Charakteristik $\chi(X)$. Ihre Bedeutung resultiert unter anderem daraus, dass sie ganz verschiedene Beschreibungen besitzt:

1. Die kombinatorische Beschreibung, also

$\chi(X)$ = Eckenzahl – Kantenwahl + Flächenzahl – + ...,

wenn X eine endliche Triangulierung besitzt.

2. Die homologisch-algebraische Beschreibung, also

$\chi(X) = b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) - + \ldots$,

wobei $b_k(X)$ die k-te Betti-Zahl, also die Dimension der k-ten Homologiegruppe $H_k(X; \mathbb{R})$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

3. Die geometrische Beschreibung, also

$\chi(X)$ = Nullstellenzahl eines Vektorfelds auf X;

dabei muss X eine kompakte Mannigfaltigkeit sein, und die Nullstellen des (generischen) Vektorfelds müssen mit Vorzeichen und Vielfachheiten gezählt werden.

4. Die analytische Beschreibung, also

$\chi(X)$ = index (D),

wenn X eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und D ein (geeigneter) kanonischer elliptischer Differentialoperator auf X ist.

Alle diese Beschreibungen brechen zusammen, wenn X nicht kompakt ist; dann können ja z. B. die Betti-Zahlen unendlich sein, und man kann ihre Wechselsumme nicht bilden. Nun kann man natürlich einwenden,

dass die $b_k(X)$ als Elemente von $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ immer definiert sind und dass ihre Kenntnis ja sowieso viel besser ist als die von $\chi(X)$. Aber es gibt hier nur ein Unendlich, und da ist die Formel $b_k(X) = \infty$ natürlich viel weniger aussagekräftig als z. B. $b_k(X) = 22$.

Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit stellen häufig die L^2-Betti-Zahlen $b_k^{(2)}(X)$ dar. Sie sind oft auch dann endlich, wenn X nicht kompakt ist und wenn die klassischen Betti-Zahlen unendlich sind. Um die Definintion von $b_k^{(2)}(X)$ zu skizzieren, will ich mich auf die wichtige Situation beschränken, in der X die universelle Überlagerung einer kompakten Mannigfaltigkeit Y oder eines CW-Komplexes Y von endlichem Typ ist. Dann operiert die Fundamentalgruppe G von Y durch Decktransformationen auf X. Man definiert nun (auf analytische oder kombinatorische Weise) die L^2-Kohomologiegruppen $H^k_{(2)}(X)$ und bezeichnet mit $b_k^{(2)}(X)$ die Dimension von $H^k_{(2)}(X)$ über der Gruppenalgebra $\mathcal{N}(G)$ von G im Sinne von v. Neumann.

Mit diesen Begriffen aus der Theorie der Operatoralgebren erhält man also nicht-negative reelle Zahlen $b_k^{(2)}(X)$, die streng genommen nicht nur von X, sondern von der Überlagerung $X \to Y$ abhängen.

Erstaunlich ist, dass diese L^2-Betti-Zahlen, die ja a priori beliebige reelle Zahlen sind, die Tendenz haben, rational zu sein, wie z. B. die im vorliegenden Buch ausgeführten Berechnungen bei 3-Mannigfaltigkeiten, symmetrischen Räumen und klassifizierenden Räumen von endlich präsentierten Gruppen zeigen. Hier gibt es wichtige offene Fragen.

Auf alle Fälle gewinnt man eine fünfte und diesmal operatoralgebrentheoretische Beschreibung der Euler-Charakteristik:

$$\chi(X) = b_0^{(2)}(X) - b_1^{(2)}(X) + b_2^{(2)}(X) - + \ldots$$

Diese Definition ist auch in Situationen anwendbar, in denen die vier oben genannten Beschreibungen nicht funktionieren.

Ein Test für die Qualität einer neuen Theorie besteht ja immer darin, dass man mit ihr Resultate zeigen kann, die man ohne diese Theorie formulieren aber (zumindest bisher) nicht beweisen kann. Diesen Text bestehen die L^2-Betti-Zahlen glänzend. Ich zitiere eine algebraische und eine geometrische Anwendung:

Ist G eine Gruppe, die einen unendlichen amenablen Normalteiler besitzt und so dass der klassifizierende Raum BG ein endlicher CW-Komplex ist, so ist

$$\chi(G) := \chi(BG) = 0$$

Ist M eine 2m-dimensionale geschlossene hyperbolische Mannigfaltigkeit, so ist

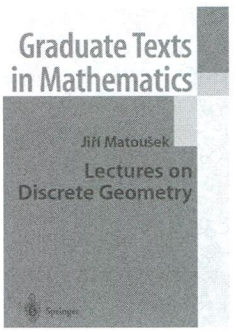
$$(-1)^m \chi(M) > 0.$$

Natürlich sind die L^2-Betti-Zahlen nicht die einzigen L^2-Invarianten, die in dem vorliegenden Buch behandelt werden, aber es würde zu weit führen, hier auf die komplizierteren einzugehen.

Herr Lück hat das Kunststück fertig gebracht, ein Buch zu schreiben, das gleichzeitig eine unverzichtbare Referenz für Experten und ein Lehrbuch mit Übungsaufgaben ist. Dafür gebührt ihm größte Anerkennung. Natürlich ist es leicht, hier und da ein wenig zu mäkeln: So finde ich, dass die analytischen Ausführungen nicht immer dieselbe Perfektion besitzen wie die topologischen Teile. Und das Gegenbeispiel gegen die sog. Starke Atiyah-Vermutung, das gefunden wurde, während Herr Lück an diesem Buch arbeitete, ist zwar aufgenommen worden, aber trotzdem muss der unvorsichtige Leser an manchen Stellen den Eindruck gewinnen, diese Vermutung sei noch offen. Aber das sind wirklich Bagatellen.

Wenn ein Leser nach dieser Besprechung das Gefühl hat, nun gerade genug über L^2-Invarianten gehört zu haben, so ändere ich für ihn meine eingangs geäußerte Ermunterung, Vorwort und Einleitung des Buches zu lesen, ab: Lesen Sie wenigstens den Teil des Vorworts durch, in dem der Autor sich sehr beherzigenswerte Gedanken darüber macht, auf welches Geleise wir unseren wissenschaftlichen Nachwuchs setzen sollen, um unserer Verantwortung ihm gegenüber gerecht zu werden.

Düsseldorf W. Singhof



J. Matoušek
Lectures on Discrete Geometry
Grad. Texts in Math. 212

Berlin u. a., Springer, 2002. 481 S., € 44,95

Was ist „Diskrete Geometrie"? Jiří Matoušek (Karlsuniversität Prag) gibt mit dem vorliegenden Buch auf diese Frage eine interessante, vielleicht überraschende, aber durchaus überzeugende Antwort. Er hält sich nicht lange mit der naheliegenden Behauptung auf, schon die alten Griechen hätten diskrete Geometrie betrieben („siehe die platonischen Körper"), sondern er präsentiert uns ein großes, aktuelles, lebendiges Forschungsgebiet weit jenseits der klassischen, euklidischen (Schul-)Geometrie. Und die Präsentation ist als eine ernstgemeinte Einladung zu verstehen: eine Einladung, die sie annehmen sollten.

Erste positive Überraschung: keine große Vorreden, auch kein erstmal-zig-Seiten-Theorie-Wiederholen, keine großen Voraussetzungen, und es wird schon sehr schnell interessant (etwa ab Seite 6 – nicht erst auf Seite 90, wie etwa in [1]).

Worum geht's? Das ist zunächst definiert durch die Objekte: Gegeben seien endlich viele Punkte, Geraden, Ebenen im $\mathbb{R}^d$. Wir bilden affine und konvexe Hüllen, Verbindungslinien, Schnittmengen. Da stellen sich einige Fragen ganz von selbst. So etwa die Frage: „Wenn aus einer Familie von konvexen Mengen in der Ebene jeweils drei immer eine nicht-leere Schnittmenge haben, gilt das dann für alle?" Das ist noch ganz einfach zu beantworten, auch in seiner d-dimensionalen Version – dem Satz von Helly (Seite 10). Und das ist nicht nur Spielerei, es hat auch vielfältige Konsequenzen und Anwendungen. Aber wenn wir nur noch fordern, dass unter jeweils p konvexen Mengen sich q finden, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, was folgt dann (für $p \geq q > d$)? Einen gemeinsamen Schnittpunkt wird es dann nicht immer geben, aber doch beschränkt viele?

Aber, fragt da der geneigte Leser, ist die Frage – das „(p, q)-Problem" von Hadwiger und Debrunner – denn wirklich *interessant?* Ist das wichtig für die/in der diskreten Geometrie? Woher kommen da die *entscheidenden* Fragen? Die kommen aus ganz unterschiedlichen Quellen. Zunächst sind da die Fragen nach den grundlegenden kombinatorischen Zusammenhängen zwischen den elementaren kombinatorischen Objekten. Deren Bedeutung misst sich letztlich an der Einfachheit der Fragestellung, aber auch daran, dass man sie immer wieder braucht, dass sie im vorliegenden Buch also nicht nur einmal auftauchen, sondern immer wieder. (In diesem Sinne hängt das vorliegende Buch eben auch viel besser und überzeugender zusammen als etwa der ältere Versuch [3] zum selben Thema.) Aber weitreichender und einflussreicher für die Themenauswahl und die Entwicklungsrichtung der Theorie sind (und das wird in Matoušeks Buch auch deutlich) die Leitfragen und Kernprobleme, die „von außen" aus ganz unterschiedlichen Richtungen an die diskrete Geometrie gestellt worden sind und werden. Klassisch sind da die Beiträge der Gruppentheorie (Symmetriegruppen), aber auch der Zahlentheorie (Minkowskis „Geometrie der Zahlen"), in neuerer Zeit der algebraische Geometrie (die Geometrie der torischen Varietäten mit ihrer Übersetzung in Gitterpunktprobleme, oder noch aktueller die tropische Geometrie [4]), usw. Die entsprechenden Bereiche und Entwicklungen der diskreten Geometrie stehen in Matoušeks Buch allerdings nicht im Vordergrund. Viel deutlicher sichtbar ist in seinem Buch der Einfluss aus Bereichen der angewandten Mathematik, der kombinatorische Optimierung (der Simplexalgorithmus lieferte Kernfragen der modernen Polyeder-

theorie), dem Computer-Aided Design (CAD), wie auch der mathematischen Visualisierung und der Computergraphik, die in der Informatik die algorithmische Geometrie („computational geometry") ergeben hat, und deren mathematische Basis liegt wiederum in der diskreten Geometrie. Für viele der Themen dieses Buches kommen die Anfänge, Kernprobleme und Leitfragen aus dieser Richtung.

Die diskrete Geometrie ist also kein klassisch existierendes, definiertes und abgegrenztes Gebiet. Das vorliegende Buch ist vielmehr ein ernstzunehmender Beitrag zur Definition und zur Erweiterung des Gebiets. Matoušek deckt eine Fülle von klassischen Themen ab, aber erschließt auch viele und vielfältige neue. Und trotz des großen Einflusses der algorithmischen Geometrie als fragenstellender Anwendungsdisziplin macht Matoušek daraus kein Buch mit Scheuklappen (wofür es leider zu viele Beispiele gibt): Er beschränkt sich nicht auf die Dimensionen $d \leq 3$, oder auch nur auf die Themen (wie die Theorie der Hyperebenenarrangements), die sich recht mühelos auf allgemeine Dimension d verallgemeinern lassen. Im Gegenteil: Der Vorspann über überraschende hochdimensionale Effekte (Abschnitt 13.1), mit dem die Diskussion hochdimensionaler Volumina und ihrer Berechnung eingeleitet wird, ist brillant. Ihm folgt ein Kapitel über Maßkonzentration: einem wichtigen Thema für die diskrete Geometrie, das seine Ursprünge in der Funktionalanalysis hat. Und neben vielen zentralen und wichtigen Resultaten, Themen und Fragestellungen bietet das Buch noch viel mehr, sozusagen Kür, Illustrationsthemen, Elektives, das sich auch an Matoušeks vielfältigen Forschungsinteressen orientiert.

Trotz aller Eleganz und Leichtigkeit in der Darstellung ist dies doch ein ernsthaftes und effektives Lehrbuch. Geduldig werden die wichtigen Methoden erklärt, und Beweise präsentiert. Dafür hat Matoušek offenbar kritisch ausgewählt und hart gearbeitet. Die Darstellung ist auch in den Details verlässlich, elegant, einfach schön. Und Matoušek drückt sich nicht, auch wenn's kompliziert wird, es gibt da keine Dünnbrettbohrerei: siehe etwa seine Exposition der Lösung des Hadwiger-Debrunner (p, q)-Problems, im Abschnitt 10.5. Ein großes Arsenal von Methoden wird in Kombination zum Einsatz gebracht (ε-Netze, Komplexitätsschranken, LP-Dualität, usw.), die „der klassische Mathematiker" nicht mal vom Namen her kennt – aber hier kennenlernen kann. Matoušek setzt dennoch thematische Grenzen: topologische Methoden sind etwa ausgespart, und dafür verweist er nicht einmal deutlich genug auf sein neuestes, meisterhaftes Büchlein [2].

Matoušeks „Lectures" zeigen die Diskrete Geometrie lebendig und vielfältig, auf dem aktuellen Stand. Und von dort aus geht es natürlich weiter. Das Buch ist eben auch eine Fundgrube in Bezug auf interessante Probleme, und ein Wegweiser in die aktuelle Forschung. Das kulminiert in den Abschnitten „Bibliography and Remarks" jeweils vor den Übungsaufgaben. Manche davon gehen über mehrere Seiten, und schlagen tiefe Breschen in die aktuelle Forschungsliteratur (mit Bezug auf die 40 Seiten sorgfältige Literaturangaben am Ende des Bandes ...).

Literatur

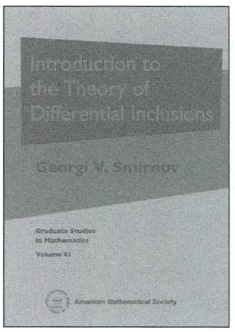
[1] A. Brøndsted, *An Introduction to Convex Polytopes*, vol. 90 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York Berlin, 1983.

[2] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

[3] J. Pach and P. K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, J. Wiley and Sons, New York, 1995.

[4] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald, *First steps in tropical geometry*. Preprint, June 2003, 29 pages; arXiv:math. AG/0306366; *Contemporary Math.*, to appear.

Berlin G. M. Ziegler



G. V. Smirnov
Introduction to the Theory of Differential Inclusions
Grad. Studies in Math. 41

Providence, Am. Math. Soc., 2001, 226 S., $ 34,–

The book provides an introductory treatment of differential inclusions in finite dimensions. It deals with differential inclusions of the form

$$(1) \quad x'(t) \in F(x(t)), \ t \in [0,T],$$

where F is a set-valued map which associates with any $y \in \mathbb{R}^n$ a closed convex set $F(y) \subseteq \mathbb{R}^n$. Solutions of (1) are elements of the Banach space $AC = AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ of absolutely continuous functions.

Part 1 of the text is devoted to basic concepts and results from convex, set-valued and nonsmooth analysis that are needed in the second part. Chapter 1 contains the necessary prerequisites of *convex analysis* in finite dimensions. This is followed by Chapter 2 on *set-valued analysis* and, in particular, on (semi-) continuity properties, derivatives, Lipschitzian approximations and extensions of set-valued maps. Furthermore, convex processes, i.e., multifunctions whose graphs are convex cones, their properties and representations are studied. They form set-valued analogues of linear operators and satisfy a multivalued version of the Jordan representation theorem. Chapter 3 provides an introduction to *nonsmooth analysis* focussing on Mordukhovich's concepts for normal cones and subdifferentials, the corresponding calculus and applications to necessary optimality conditions.

Part 2 forms the main body of the text. It contains six chapters on various aspects of differential inclusions, namely, existence results, viability and invariance, controllability, optimality, stability and stabilization.

The *existence theory* for differential inclusions with closed convex-valued right-hand sides is established in Chapter 4 within several steps. The first step consists in showing that for Lipschitzian F any subset M of AC can be continuously projected into the solution set S of (1). More precisely, there exists a continuous projection r from M to S having the property that for each $x \in M$ such that the distance $d(x'(t), F(x(t)))$ is small, $r(x)$ is close to x with respect to the norm in AC (Theorem 4.5). This result is used as a workhorse to construct families of solutions with required properties. The first conclusion is that the solution set of initial value problems for (1) is nonempty and arcwise connected if F is Lipschitzian and takes closed convex values. In a second step, solutions to initial value problems for (1) with upper semicontinuous F are derived as limits of sequences of solutions to approximate differential inclusions with Lipschitzian approximations of F as right-hand sides. Furthermore, Chapter 4 contains results on the continuous and differentiable dependence of solution sets on initial conditions, on the existence of optimal solutions to the Mayer problem for differential inclusions and on the convergence of discrete approximations in the Lipschitzian case.

Chapter 5 on *viability and invariance* starts with an existence result for solutions that behave monotone with respect to a real-valued function. Its proof is again based on Theorem 4.5. This monotonicity theorem is used to prove the main viability result (Theorem 5.2). It provides conditions on F and on a closed set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ that imply the existence of a solution $x(\cdot)$ to (1) such that $x(t) \in C$ for each t if $x(0) \in C$. A stronger requirement on C is that it is invariant by the differential inclusion (1), i.e., any solution to (1) is contained in C if $x(0) \in C$. In the Lipschitzian situation the invariance of C by (1) is equiva-

lent to the condition that, for each $x \in C$, $F(x)$ is contained in the contingent cone $T(x, C)$ at x to C. Viability of some solution of (1) is already implied by the weaker condition $F(x) \cap T(x, C) \neq \emptyset$ for each $x \in C$. The latter result is used to study the reachability set of (1).

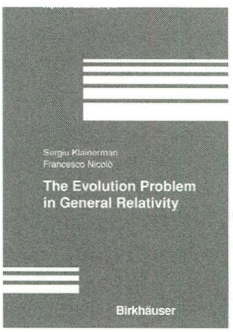
Chapter 6 studies *controllability* of (1) for the case that F is a convex process and local controllability for Lipschitzian F by employing an approximate convex process. Chapter 7 contains nonsmooth necessary *optimality conditions* for the Mayer problem and a time-optimal problem. Two methods for studying *stability* of differential inclusions are described in Chapter 8. Namely, the Lyapunov direct method and a method based on first order approximations of F by linear selectionable mappings and by convex processes. Finally, Chapter 9 deals with the problem of *stabilization*, i.e., of finding a selection f of F such that the ordinary differential equation $x'(t) = f(x(t))$ behaves asymptotically stable if the original differential inclusion satisfies an asymptotic stability condition. Solutions are presented for a convex process F (by constructing a Lyapunov function) and for Lipschitzian F.

Each chapter is completed by a number of problems and exercises, respectively. Most of the chapters in Part 2 contain applications of the general results to more specific problems, e.g., to Filippov's concept for treating discontinuous ordinary differential equations (Section 4.4), existence and optimality conditions for optimal control problems (Sections 4.5 and 7.2), differential games (Section 5.5), controllability and stabilization in mechanical systems (Sections 6.4 and 9.4).

Comments on further reading for each chapter are provided at the end of the book. The bibliography contains 128 items and is not intended to be nearly complete. It contains only books and fundamental works on differential inclusions as well as papers that are relevant for the material presented.

The text grew out of several lectures given by the author at several universities during the last few years. Most of the material was written when the author was visiting the International School for Advanced Studies at Trieste (Italy). The material is developed by using modern tools from set-valued and nonsmooth analysis. All results, also those in the first 3 chapters, are presented including proofs. Hence, the material of the book may very well be used for an introductory lecture on differential inclusions, although potential readers might miss some more introductions to and discussions of the results. The text is intended for graduate students who specialize in pure and applied analysis and also suitable for mathematicians who are looking for a modern introduction to the field. The required mathematical background is knowledge of the theory of functions and ordinary differential equations, and of functional analysis at an elementary level.

Berlin W. Römisch



S. Klainerman, F. Nicolò
The Evolution Problem in general Relativity
Progr. math. Physics

Basel, Birkhäuser, 2002, 424 S., € 83,18

Die fundamentalen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die Einsteingleichungen, bilden ein System von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen. Die zentralen mathematischen Probleme, die zu behandeln sind, wenn man allgemeine Lösungen dieser Gleichungen untersuchen will, müssen mit Hilfe der Theorie der hyperbolischen Gleichungen behandelt werden. Damit verbunden ist die Tatsache, dass es natürlich ist, für diese Gleichungen ein An-

fangswertproblem zu stellen. Es werden Anfangsdaten vorgeschrieben und man versucht, die Existenz und Eindeutigkeit einer entsprechenden Lösung der durch die Einsteingleichungen definierten Entwicklungsgleichungen zu beweisen. Für lokale Lösungen in der Nähe der Anfangshyperfläche wurde dieses Problem vor mehr als fünfzig Jahren von Y. Choquet-Bruhat gelöst. Eine ausführliche Darstellung der heutigen Kenntnisse auf dem Gebiet findet man in [1]. Weitaus schwieriger ist das globale Anfangswertproblem für die Einsteingleichungen.

Es gibt kein gutes Verständis des globalen Verhaltens allgemeiner Lösungen der Einsteingleichungen. Dies gilt schon für den einfachsten Fall der Einsteinschen Vakuumgleichungen. Im allgemeinen beschreiben die Einsteingleichungen die Wechselwirkungen von Materie durch das Gravitationsfeld, aber selbst wenn man einen Bereich betrachtet, in dem keine Materie vorhanden ist, sind die Gleichungen kompliziert. Die einfachste Lösung der Einsteinschen Vakuumgleichungen ist der Minkowskiraum der speziellen Relativitätstheorie. In diesem Fall verschwindet das Gravitationsfeld. Ein möglicher Ausgangspunkt, um das globale Verhalten von Lösungen der Einsteingleichungen zu verstehen, ist, kleine Störungen des Minkowskiraums zu betrachten. Das heisst, wir nehmen Anfangsdaten für den Minkowskiraum, stören diese ein wenig und fragen nach dem Verhalten der sich daraus entwickelnden Lösung. Insbesondere ist es wichtig zu wissen, ob die Lösung in einem geeigneten Sinne global in der Zeit existiert, und ob sie dem Minkowskiraum qualitativ ähnlich ist. Es handelt sich um die Frage der globalen nichtlinearen Stabilität des Minkowskiraums. Diese Frage wurde durch ein Theorem von Christodoulou und Klainerman positiv beantwortet. Der Beweis, der sehr lang und technisch ist, wurde als das Buch [2] veröffentlicht.

Im vorliegenden Buch wird das Theorem von [2] verallgemeinert und es werden Teile des Beweises vereinfacht. Man soll allerdings den Grad der Vereinfachung nicht überschätzen. Das neue Buch ist wesentlich kürzer als [2], verwendet aber viele Ergebnisse von [2]. Das Theorem von [2] betrifft asymptotisch flache Lösungen. Diese Lösungen beschreiben isolierte Systeme, d. h. Systeme bei denen das Gravitationsfeld ausserhalb eines räumlich beschränkten Gebietes abklingt. Das Theorem von [2] behandelt den Fall von Anfangsdaten, die überall nahe bei Minkowskidaten sind. Da asymptotisch flache Anfangsdaten weit draussen immer nahe bei Minkowskidaten sind, kann man hoffen, ein Theorem für Daten die nicht überall klein sind zu beweisen. Das Buch von Klainerman und Nicolò beweist ein solches Theorem. Die Aussage des Theorems beschränkt sich auf das Verhalten der Lösung weit draussen. Die Entkopplung des Verhaltens in einem geeigneten Aussengebiet von dem Verhalten im Inneren folgt aus der hyperbolischen Natur der Gleichungen und dem entsprechenden Vorhandensein eines Abhängigkeitsgebietes. Der Beweis von [2] benutzt maximale Hyperflächen, deren Definition global im Raum ist. Diese Methode ist deshalb für den Beweis des neuen Theorems nicht geeignet. Im Beweis des neuen Theorems werden stattdessen lichtartige Hyperflächen verwendet.

Das erste Kapitel des Buches enthält Hintergrundmaterial über Lorentzgeometrie und Allgemeine Relativitätstheorie. Der notwendige analytische Hintergrund wird im zweiten Kapitel erklärt. Dort gibt es auch eine Beschreibung der Beweisstrategie die im Buch benutzt wird, um das neue Theorem zu beweisen. Im dritten Kapitel werden zahlreiche für den Beweis notwendige Definitionen eingeführt, das Haupttheorem wird formuliert und die Struktur des Beweises wird erklärt. Dieser Beweis besteht aus komplizierten geometrischen Konstruktionen sowie Abschätzungen für die dadurch definierten Strukturen. Die Herleitung dieser Abschätzungen ist der Inhalt der Kapitel vier bis sieben. Im letzten Kapitel wird die Bedeutung des Theorems für die Theorie der Gravitationswellen erklärt.

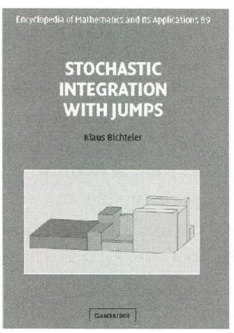
Der Beweis des Haupttheorems ist sehr kompliziert und dieser Umstand scheint unvermeidlich. Angesichts dieser Tatsache ist es eine schwierige Aufgabe, das Material in einer dem Leser zugänglichen Form zu präsentieren, Die Autoren haben sich offenbar viel Mühe gegeben, dieses Ziel zu erreichen und sind dabei erfolgreich gewesen. Das Haupttheorem hat eine zentrale Bedeutung für die mathematische Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie und jeder, der auf diesem Gebiet arbeitet, sollte sich mit diesem Buch befassen.

Literatur

[1] Friedrich, H. and Rendall, A. D. 2000 The Cauchy problem for the Einstein equations. In: Schmidt, B. G. Einstein's field equations and their physical implications. Springer, Berlin.

[2] Christodoulou, D. and Klainerman, S. 1993 The global nonlinear stability of the Minkowski space. Princeton University Press, Princeton.

Golm A. Rendall



K. Bichteler
Stochastic Integration with Jumps
Enc. of Math. and its Appl. 89

Cambridge University Press, 2002, 501 S., £ 70,–

Längst schon haben Stochastische Differentialgleichungen und die damit verbundene Theorie der stochastischen Integration ihren festen Platz im Kanon unserer Mathematikausbildung; in Anwendungen und auch bei den Anwendern hat sich dieser Zweig der mathematischen Stochastik in den letzten fünfzehn bis zwanzig Jahren etabliert und ist kaum mehr wegzudenken aus Modellen der Ingenieur- und Biowissenschaften oder – hier in aller Munde – aus der Finanzmathematik. Die einfachste stochastische Differentialgleichung ist eine Gleichung der Art

$$(*) \quad \dot{X}_t(\omega) = b(X_t(\omega)) + \sigma(X_t(\omega))\,\dot{\xi}_t(\omega),$$
$$X_0(\omega) = x_0,$$

wo $\dot{\xi}_t(\omega)$ ein zufälliges Rauschen darstellt. Oft wird $\dot{\xi}_t$ als weißes Rauschen angenommen – aber auch andere stochastische Störterme werden betrachtet, das hängt letztlich vom zu modellierenden System ab –, d. h. ξ_t ist eine Brownsche Bewegung. Bereits bei dieser relativ einfachen Gleichung tritt ein wesentliches Problem auf: die klassische Ableitung nach der Zeit $\dot{\xi}_t$ ist nicht einmal für eine Brownsche Bewegung (geschweige denn für allgemeinere Störungen) definiert, so daß $(*)$ sinnlos ist. Fassen wir $(*)$ als Integralgleichung auf,

$$(**) \quad X_t(\omega) = x_0 + \int_0^t b(X_s(\omega))\,ds + \int_0^t \sigma(X_s(\omega))\,d\xi_s(\omega),$$

dann benötigen wir immer noch, daß $\xi_t(\omega)$ von beschränkter Variation ist, aber auch das trifft auf eine Brownsche Bewegung nicht mehr zu. Der naive Versuch, $\int_0^t \sigma(X_s)\,d\xi_s$ partiell zu integrieren, schlägt in der Regel fehl, da dann $\sigma(X_s)$ von beschränkter Variation sein müßte, und im Hinblick auf $(*)$ kann das i. allg. nicht erwartet werden, wenn ξ_s nicht von beschränkter Variation war.

In einer Reihe von bahnbrechenden Arbeiten zu Beginn der 1940er Jahre hat der japanische Mathematiker Kiyosi Itô eine Theorie der stochastischen Integration entwickelt, die dieses Problem löst. Aufbauend auf Arbeiten von Paley und Wiener [10] definiert Itô das Integral $\int \sigma(X_s)\,d\xi_s$ zunächst als Riemannsche Summe, betrachtet dann aber

nicht punktweise (d. h. für jedes einzelne ω) Konvergenz, sondern Konvergenz in $L^2 = L^2(P)$ bezüglich des zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes P. Zentral in Itôs Ansatz ist die Beobachtung, daß sowohl die Brownsche Bewegung ξ_t als auch $\xi_t^2 - t$ Martingale sind. Was Itôs Theorie so erfolgreich macht, ist die folgende Kettenregel, gemeinhin als *Itô-Formel* bekannt,

$$df(\xi_t) = f'(\xi_t)\, d\xi_t + \frac{1}{2} f''(\xi_t)\, dt, \qquad f \in C^2,$$

die sich von der üblichen Kettenregel eben durch den Korrekturterm für f'' unterscheidet. Intuitiv sollte dt als zweite Variation von ξ_t, also als $dt = (d\xi_t)^2$, verstanden werden. (Kürzlich hat Lyons in seinem *Rough Paths*-Ansatz eine hübsche Interpretation dieses Korrekturterms und weiterer Variationen höherer Ordnung als *Lévy-area* gegeben, vgl. [6].) Da $(dt)^2 = 0$ gilt, zeigt sich leicht, daß Itôs Integralbegriff den Stieltjesschen Ansatz einschließt. Doob bemerkte in seinem 1953 erschienenen Buch, daß sich Itôs Theorie unmittelbar auf allgemeine L^2-Martingale ξ_t als Integratoren verallgemeinern läßt, wenn man nur eine Doob-Meyer Zerlegung des Submartingals ξ_t^2 kennt. Damit griff Doob seiner Zeit etwas vor, erst P.A. Meyer erbrachte 1962-3 einen vollständigen Beweis dieses Resultats. Damit war der Weg frei zu einer allgemeinen stochastischen Integrationstheorie für L^2-Martingale, die im wesentlichen von Ph. Courrège 1962-3 und H. Kunita-S. Watanabe 1967 ausgearbeitet wurde, wir verweisen nur auf die hübsche Darstellung der Methode in [5], wo auch die einschlägigen Originalarbeiten zitiert sind. Diese Theorie wurde dann von P. A. Meyer und seiner Straßburger Schule zunächst auf lokale (L^2-) Martingal-Integratoren ausgedehnt (eine „einfache" Stopp-Technik, wenn man erst einmal den Fundamentalsatz für lokale Martingale hat – der gängige extrem kurze Beweis ist von K. A. Yen und in [9] veröffentlicht) und dann auf allgemeine Semimartingale. Zur Erinnerung: ein Semimartingal ξ_t ist ein *càdlàg* (rechtsstetig mit endlichen linksseitigen Limiten) Prozeß, der als Summe $\xi_t = \xi_0 + A_t + M_t$ geschrieben werden kann, wo A_t ein Prozeß mit beschränkter Variation auf kompakten Zeitintervallen und M_t ein lokales Martingal ist. Erwähnenswert ist, daß in all diesen Ansätzen und Verallgemeinerungen der Integrand X_t entweder linksseitig stetig oder vorhersagbar (*predictable,* also aus einem geeigneten Abschluß der linksstetigen Prozesse) sein muß. Daß dies eine prinzipielle Einschränkung darstellt und nicht nur technischer Natur ist, haben K. Bichteler 1979 und C. Dellacherie 1980 gezeigt: jedes vernünftige stochastische Integral, das vorhersagbare Integranden zuläßt, muß notwendigerweise von einem Semimartingal getrieben sein. Obgleich diese Theorie auf den ersten Blick recht allgemein scheint, gibt es eine ganze Reihe von (Gaußischen) Prozessen, die keine Semimartingale sind, etwa gebrochene Brownsche Bewegungen (Hurst Parameter $H \neq \frac{1}{2}$) oder gewisse Dirichlet-Prozesse, die in Anwendungen eine große Rolle spielen.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen über Stochastische Differentialgleichungen für Mathematiker, Physiker, (Elektro-)Ingenieure und Wirtschaftswissenschaftler an der Universität von Austin (Texas) entstanden, die eine solide mathematische Grundlage für all die stochastischen Techniken benötigten, welche in den jeweiligen Wissenschaften (manchmal etwas handwerksmäßig) verwendet werden. Die Leser, die eine eher klassische Einführung erwarten, wie sie etwa oben skizziert wurde, werden von diesem Buch enttäuscht werden. Im Gegenteil, *„a predilection for generality for simplicity's sake led directly to the most general stochastic Lebesgue-Stieltjes integral"* [Preface, p. xi], und was sich dahinter verbirgt, ist schlechthin ein völlig neuartiger Zugang zu stochastischen Integralen. Bichteler kritisiert zu Recht die schwerfälligen und unterentwickelten Grenzwertsätze für Itô-Integrale, was zu einem guten Teil am Riemann-artigen Aufbau der Itôschen Theorie hängt. Der Autor schlägt daher vor, Daniells Ansatz auf stochastische Integrale auszudehnen, was dann zu einer viel flexibleren stochastischen

Lebesgue-Stieltjes Theorie führen würde. Ist man mit Daniells Theorie vertraut, dann stellt das keine allzu große Hürde dar. Für die Klasse der Elementarprozesse E (stoch. Treppenfunktionen)

$$X_t(\omega) = f_0(\omega)\, 1_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{N} f_j(\omega) 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t)$$

(f_j sind $F_{t_{j-1}}$-meßbare Zufallsvariable) kann man das Integral für jeden adaptierten Prozeß ξ_t unmittelbar angeben:

$$\Big(\int X_s\, d\xi_s\Big)(\omega) = f_0(\omega) \cdot \xi_0(\omega)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} f_j(\omega) \cdot \left(\xi_{t_j}(\omega) - \xi_{t_{j-1}}(\omega)\right).$$

Parallel zum deterministischen Fall geht man nun zu verschiedenen Abschließungen E^* der Elementarfunktionen über und definiert das Integral $\int X_s^*\, d\xi_s$, $X_\cdot^* \in E^*$ als Grenzwert von Integralen von Elementarprozessen definieren, was z. B. in der $L^p(P)$-Skala, $0 \le p < \infty$ (*sic!*), geschehen kann. (Der Raum $L^0(P)$ besteht aus allen fast sicher endlichen Zufallsvariablen und wird mittels stochastischer Konvergenz zu einem Banachraum.) Minimalvoraussetzung an ξ_t ist dabei, daß ξ_t ein *L^p-integrator* ist, d. h., ξ_t sollte in Wahrscheinlichkeit rechtsstetig sein (i. allg. keine große Einschränkung) sowie der Beziehung

$$\sup\left\{\left\|\int X_s\, d\xi_{s\wedge t}\right\|_{L^p} : |X_s| \le 1, X_\cdot \in E\right\} < \infty \quad (\dagger)$$

genügen. Mit diesem Aufbau lassen sich dann relativ bequem der Satz von der dominierten Konvergenz, Daniell-Stetigkeit des Integrals (monotone Konvergenz), Egoroffs Satz oder die Approximation des Integrals mittels (adaptiver) Riemannscher Summen usw. zeigen. Methodisch folgt das alles ziemlich analog zur klassischen deterministischen Theorie. Man beachte, daß der Integrand nicht notwendig vorhersagbar sein muß: die Klasse der L^p-Integratoren ($p > 0$) ist strikt kleiner als die Klasse der Semimartingale, wobei L^0 gerade mit den Semimartingalen übereinstimmt. Eine weitergehende Charakterisierung von L^p-Integratoren findet sich nicht, jedoch wird gezeigt, daß L^p-Martingale stets L^p-Integratoren sind. Für L^0-Integratoren (Semimartingale) wird dann auch Itôs Formel (wir erinnern uns: die Kettenregel) und einige Elemente der stochastischen Analysis (*brackets,* Doelans-Dade Exponentialfunktion, Girsanov-Transformation...) gezeigt.

Der wesentliche Vorteil der vorgeschlagenen Methode liegt wohl in der Möglichkeit, das stochastische Integral durch ganz konkrete Normen des Integranden und des Integrators abschätzen und kontrollieren zu können. Zentrale neue Resultate sind hier, daß für jeden $L^p(P)$-Integrator ξ_t und jedes $q > p$ ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q existiert, so daß ξ_t auch ein $L^q(Q)$-Integrator ist, wobei die Halbnormen (†) gegeneinander abgeschätzt werden können. Ganz offensichtlich sind solche Abschätzungen durch die Burkholder-Davis-Gundy Abschätzungen motiviert, die aber auch wiederum als Korollar gewonnen werden können. Das vielleicht überraschendste Resultat ist folgende Abschätzung,

$$\left\|\sup_{s\le T}\left|\int X_s\, d\xi_s\right|\right\|_{L^p}$$

$$\le 9.5p \cdot \max_{\rho} \left\|\int_0^T |X_s|^\rho\, d\Lambda_s\right\|_{L^p},$$

für $p \in [2, q]$ (das $\max_\rho$ erstreckt sich, abhängig von $\xi_\cdot$, über eine Teilmenge von $\{1, 2, p\}$) wo T eine Stoppzeit, ξ_t ein L^q-Integrator, $q \ge 2$, X_t ein vorhersagbarer und $\Lambda_t = \Lambda_t[Z, q]$ ein geeigneter streng monoton wachsender, vorhersagbarer Prozeß ist, dessen Erwartungswert man kontrollieren kann.

Das letzte Kapitel des Bandes beschäftigt sich mit stochastischen Differentialgleichungen und Flüssen, wo das bekannte Picard-Verfahren angewendet wird, nur mit dem wesentlichen Unterschied, daß man für L^p-Integratoren deutlich bessere Normabschätzungen verwenden kann als die üblichen H^p- und S^p-Normen für Semimartingale. Der Nachweis von Stabilität bzgl. der

Anfangsbedingungen gestaltet sich dann deutlich natürlicher und man kann mit dieser Methode auch das numerisch interessante Euler-Schema pfadweise rechtfertigen. Stochastische Flüsse werden nur im Zusammenhang mit Semimartingalen behandelt und die Darstellung folgt dem Lehrbuch [11] von Protter. Das Buch schließt mit einigen Anhängen zu Topologie, Daniell-Integration, Analytischen Mengen, Skorokhod-Topologie, L^p-Räumen bzw. Operatorenhalbgruppen, die das Buch *self-contained* machen (sollen), sowie Lösungen zu einigen Aufgaben. Ausführlichere Anhänge, Stichwortverzeichnisse und Notationslisten (leider dringend nötig) finden sich auf der *homepage* des Autors in Austin, Texas.

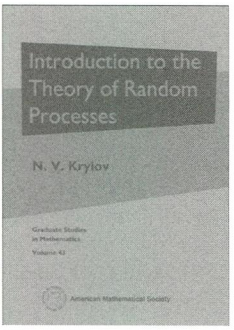
Was wir hier vor uns haben, ist sicherlich kein Lehrbuch und ich kann mir kaum vorstellen, daß ein derartiges Buch in seiner Fülle aber auch Abstraktion Grundlage einer Vorlesung (gewesen) sein kann. Um eine umfassende, ggf. überblicksartige Gesamtdarstellung eines etablierten Gebiets – so wie es der Cambridge Encyclopedia ins Stammbuch geschrieben ist – handelt es sich aber auch nicht. Zu sehr weicht dafür die Darstellung vom Standard ab, und eine in sich logische und vielleicht sogar überlegene Privatnotation des Autors verhindert die Verwendung als Referenzwerk. Schelte gebührt den Lektoren von Cambridge University Press, die dem Autor einige unschöne Marotten nicht ausreden konnten: eine Vielzahl von kommentierenden Fußnoten (ich habe auf manchen Seiten drei Fußnoten und noch zahlreichere Verweise auf vorangehende Fußnoten gefunden!), häufige Verweise auf Nummern von vorangehenden Fußnoten innerhalb eines jeden Kapitels (daß am Ende jeden Kapitels eine Liste steht, wo sich denn der Text der Fußnoten findet, ist auch nur ein schwaches Trostpflaster) und, wenigstens auf den ersten fünfzig Seiten, die permanente Unterweisung im richtigen Gebrauch des Englischen Artikels. Lobend erwähnen möchte ich die äußerst geringe Anzahl von Druckfehlern und die an vielen Stellen gelungene Motivation, die stets den vertrauteren deterministischen Fall der Stochastik gegenüberstellt.

Bichtelers *Stochastic Integration with Jumps* ist eine Forschungsmonographie, die einen sehr interessanten Ansatz zur stochastischen Integration vorschlägt. Als Lehrbuch oder Nachschlagewerk ist das Buch weniger geeignet, für ein Seminar mit einigen wenigen engagierten Studenten, die viel Zeit investieren wollen, kann die Lektüre des Buchs äußerst gewinnbringend sein.

Literatur

1. K. Bichteler: Stochastic Integrators, *Bull. Am. Math. Soc.* **1** (1979), 761–765.
2. C. Dellacherie: Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, *Stoch. Proc. Appl.* **10** (1980), 115–144.
3. J. L. Doob: *Stochastic Processes*, Wiley, Series in Probab. Math. Stat., New York 1953.
4. K. Itô: Stochastic Integral, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20** (1944), 519–524.
5. I. Karatzas, St. E. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, Graduate Texts Math. **113**, New York 1988.
6. T. Lyons, Z. Qian: *System Control and Rough Paths*, Clarendon Press, Oxford Math. Monogr., Oxford 2002.
7. P. A. Meyer: A decomposition theorem for supermartingales, *Ill. J. Math.* **6** (1962), 193–205.
8. P. A. Meyer: Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem, *Ill. J. Math.* **7** (1963), 1–17.
9. P. A. Meyer: Notes sur les intégrales stochastiques. II Le théorème fondamental sur les martingales locales, *Sem. Probab.* **11**, Springer, Lecture Notes Math. 581, Berlin 1977, 463–464.
10. R. E. A. C. Paley, N. Wiener: *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Am. Math. Soc., Colloquium Publications **19**, Providence (RI) 1934.
11. P. Protter: *Stochastic Integration and Differential Equations. A New Approach*, Springer, Appl. Math. **21**, Berlin 1992 (2nd. corr. printing).

Brighton R. L. Schilling



N. V. Krylov
Introduction to the Theory of Random Processes
Grad Studies in Math. 43

(Graduate Studies in Mathematics Vol. 43), Providence, Am. Math. Soc., 2002, 230 S., $ 35,–

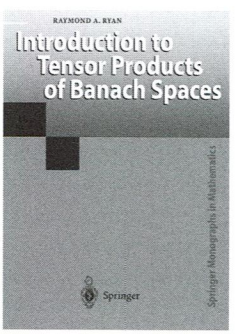
Das Interesse an Finanzmathematik hat sich seit einiger Zeit auch in der Lehrbuchliteratur niedergeschlagen und wir finden mittlerweile ein Fülle von Büchern, die die Black-Scholes Formel und damit zusammenhängende Themen in den Mittelpunkt stellen. Die meisten Autoren konzentrieren sich auf Diffusionsmodelle und arbeiten (mehr oder minder rigoros) auf Brownsche Bewegungen und den Itô-Kalkül für stetige Martingale hin. So erfreulich diese Entwicklung für einen Stochastiker auch sein mag, ist es doch schade, daß für viele Studenten inzwischen „Brownsche Bewegung" synonym für „Stochastische Prozesse" steht. In der Forschungsliteratur zeichnet sich ein gegenläufiger Trend ab: immer häufiger erscheinen Arbeiten über Sprungprozesse und ganz konkrete Modelle, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen benötigen, welche nicht von Diffusionen stammen. Im Hörsaal scheinen aber die stationären Prozesse, Gauß-Prozesse, Sprungprozesse, Lévy-Prozesse etc. nurmehr eine untergeordnete Rolle zu spielen. Das mag an der Dominanz der Brownschen Bewegung liegen, ein anderer Faktor ist aber sicherlich, daß es ausgesprochen wenig moderne Lehrbücher gibt, die solche Prozesse detailliert *auf Vorlesungsniveau* behandeln. Klassische Darstellungen wie etwa bei Breiman, Gikhman-Skorokhod oder Loeve sind nach wie vor empfehlenswert (und auch noch bzw. wieder erhältlich!), doch ein Manko dieser Bücher ist, daß sie allesamt erst nach langen klassischen Vorbereitungen zum Kern der Sache vorstoßen und dann modernere Entwicklungen, etwa stochastische Integration, ausklammern. Neuere Darstellungen wie z. B. Protter, Klebaner, Jacod-Shiryaev, konzentrieren sich auf allgemeine Semimartingale und sind damit im allgemeinen nicht für eine Vorlesung des sechsten oder siebten Semesters geeignet.

Eine gute Alternative bietet nun das Buch von N.V. Krylov „Introduction to the Theory of Random Processes". Es handelt sich dabei um eine Neufassung der erstmals 1986/87 auf Russisch erschienenen Vorlesungsskripten einer gleichnamigen „Spezialvorlesung" an der Moskauer Lomonossow-Universität, also einer Wahlpflichtveranstaltung (i. allg. zweistündig, zweisemestrig) für Mathematikstudenten des dritten bis fünften Studienjahres. Startpunkt ist die Vertiefung der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, die etwa auf dem Niveau einer vierstündigen Vorlesung des fünften Semesters vorausgesetzt wird. Auf recht natürliche Weise wird dann die Brownsche Bewegung (mittels des Donskerschen Invarianzprinzips) als Grenzwert von Irrfahrten eingeführt und stochastische Integration bezüglich einer Brownschen Bewegung definiert. Hier verfolgt der Autor den Ansatz über orthogonale Zufallsmaße (*random orthogonal measures*), den man bereits aus seiner Monographie über Diffusionsprozesse (Transl. Math. Monogr. Vol. 142, Am. Math. Soc., Providence (R.I.) 1995) kennt. Methodisch ist das ein sehr eleganter Ansatz, da man auf einen Schlag auch die Spektralmaße für stationäre Prozesse sowie allgemeinere Poisson- und Sprungintegrale in Griff bekommt, doch habe ich meine Zweifel, ob dieser Standpunkt als Einführung für Studenten sonderlich glücklich ist. Dem Kapitel über Brownsche Bewegung schließen sich je ein Kapitel über Martingale und stationäre Prozesse an, wobei vor allem deren Spektralzerlegung behandelt wird. Lévy-Prozesse werden im fünften Kapitel betrachtet, hier

stehen die Lévy-Khinchine-Formel und die damit korrespondierende Lévy-Itô Pfadzerlegung im Vordergrund. Hervorzuheben ist die elementare und präzise Darstellung des Stoffs, die *en passant* auch noch in die Theorie der Punktprozesse einführt. Im letzten Kapitel wird erneut das Itô-Integral aufgegriffen, wobei nun der klassische (Kunita-Watanabe) Isometrieansatz für stetige Integratoren behandelt wird. Endpunkt der Diskussion sind die Itô-Formel, der Satz von Girsanov und Anwendungen auf (einfache) stochastische Differentialgleichungen.

„Introduction to the Theory of Random Processes" ist ein ausgesprochen schönes Buch, das eine breite Auswahl von Themen aus dem Gebiet der stochastischen Prozesse präsentiert. Die Darstellung ist elementar genug, um danach eine Vorlesung ab dem sechsten Semester anzubieten, so elegant, daß auch der Spezialist hier und dort Anregungen findet, und vor allem hat sie sich viel von der Frische des ursprünglichen Vorlesungsskripts bewahrt.

Sussex R. Schilling



R. A. Ryan
Introduction to Tensor Products of Banach Spaces
Monogr. in Math.

Berlin u. a., Springer Verlag, 2002, 225 S., € 74,95

Im Jahre 1956 veröffentlichte A. Grothendieck seine Arbeit *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques,* in der er seine Untersuchungen über normierte Tensorprodukte niederlegte. In dieser Arbeit beschreibt er verschiedene Wege, das Tensorprodukt zweier Banachräume zu normieren; insbesondere entwickelt er einen Kalkül für Tensornormen, und er beweist sein Hauptergebnis, das er *Théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels* nennt und welches die Äquivalenz gewisser Tensornormen zeigt. Was Grothendiecks Methoden angeht, ist hervorzuheben, dass er die Bedeutung sowohl der endlichdimensionalen Struktur eines Banachraums erkennt als auch die der Approximationseigenschaft, und damit war er seiner Zeit weit voraus.

Aus verschiedenen Gründen war (und ist) diese Arbeit schwer zu lesen: Zum einen ist sie in einer nicht sehr verbreiteten Zeitschrift erschienen, dann werden Beweise fast stets nur skizziert, und schließlich stellt das Sujet selbst, Tensorprodukte normierter Räume, hohe Anforderungen selbst an Spezialisten. So blieb es nicht aus, dass das *Résumé* über Jahre unbeachtet blieb, bis es von J. Lindenstrauss und A. Pełczyński einem weiteren Leserkreis vorgestellt wurde, als sie in ihrer Arbeit *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications* (Studia Math. 1968) viele der Grothendieckschen Resultate in einer für Normalsterbliche eher verständlichen Sprache wiedergaben; z. B. zeigten sie, dass das *Théorème fondamental* äquivalent als Matrixungleichung geschrieben werden kann, die seither als *Grothendiecksche Ungleichung* bekannt ist.

Die meisten Arbeiten, die in der Folge publiziert wurden, stützten sich auf den Lindenstrauss-Pełczyńskischen Ansatz, der Operatoren gegenüber Tensoren favorisiert. Das Ziel des vorliegenden Buches von Ray Ryan ist es, die Grothendiecksche Theorie wieder in der Sprache der Tensoren zu formulieren, wobei natürlich auch die Operatorenideale zu ihrem Recht kommen. Ein wesentliches Anliegen des Autors ist es, mit seinem Text nicht nur Spezialisten auf dem Gebiet zu erreichen, sondern auch Novizen. Diesem Anspruch wird das Buch voll gerecht.

Im ersten Kapitel wird der Begriff des Tensorproduktes linearer Räume X und Y vorgestellt. Der Zugang, den Ryan wählt, ist ziemlich konkret; $x \otimes y$ wird als kanonisches lineares Funktional auf dem Raum der Bilinearformen auf $X \times Y$ eingeführt. Die nächsten beiden Kapitel widmen sich den „klassischen" Normen auf Tensorprodukten, nämlich der injektiven (oder ε-) und der projektiven (oder π-) Norm. Nebenbei erfährt der Leser einiges über das Bochner-Integral, Rademacher-Funktionen und die Khinchin-Ungleichung, nukleare Operatoren und vieles mehr. Kapitel 4 und 5 behandeln zwei Aspekte, die für die Geometrie der Banachräume insgesamt von Bedeutung sind: die Approximationseigenschaft und die Radon-Nikodym-Eigenschaft. Speziell findet man in diesen Kapiteln auch das Prinzip der lokalen Reflexivität, die Dunford-Pettis-Eigenschaft, Darstellungssätze für Operatoren etc.

Die allgemeine Theorie normierter Tensorprodukte bildet den Gegenstand von Kapitel 6 und 7. Zentral sind hier der Begriff der endlich erzeugten Tensornorm sowie der damit einhergehende Kalkül der assoziierten und dualen Normen. Damit können die 14 natürlichen Normen von Grothendieck und auch die Chevet-Saphar-Normen diskutiert werden, die eng mit den p-nuklearen und absolut p-summierenden Operatoren zusammenhängen, welche ebenfalls ausführlich besprochen werden. Höhepunkt ist selbstverständlich Grothendiecks *Théorème fondamental*, das zuerst als Matrixungleichung bewiesen und dann in der Sprache der Tensorprodukte wiedergegeben wird. Das letzte Kapitel schließlich stellt den Zusammenhang von Tensorprodukten und Operatorenidealen her.

Ray Ryans Buch ist hervorragend geeignet, einen Leser, der über das üblicherweise in zwei Semestern vermittelte funktionalanalytische Grundwissen verfügt, in ein wichtiges Gebiet der Banachraumtheorie einzuführen. Aber auch für diejenigen, die bloß leicht zugängliche und ebenso leicht verständliche Informationen über Begriffe wie Approximationseigenschaft, das Bochner-Integral, p-summierende Operatoren etc. suchen, ist das Werk wärmstens zu empfehlen.

Die Darstellung ist in jeder Zeile klar und elegant, und stets spürt man die Sympathie des Autors für die Leser. Als weiteren Pluspunkt empfinde ich die angenehme Typographie und das fast vollständige Fehlen von Tippfehlern.

Leider behindert der Verlag eine weite Verbreitung dieses schönen Buches durch die Festsetzung eines vollkommen unangemessenen Preises: Inklusive Mehrwertsteuer kostet es bei 225 Seiten über 80 Euro.

Berlin D. Werner

ISSN 0012-0456