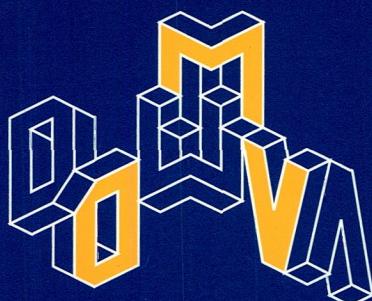


110. Band Heft 1, März 2008

D 20577



# Jahresbericht

## der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

1 – 2008

Herausgegeben von K. Hulek  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,  
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar



# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an *Prof. Dr. K. Hulek* zu richten. Für Buchbesprechungen ist *Prof. Dr. H. Lange* zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert.

Die Autoren werden gebeten, für Manuskripte und Buchbesprechungen die **Standard-LATEX-Klasse article mit 10pt (default), \textwidth139mm, \textheight205mm** zu benutzen. Sollen Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddateien der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Ein Foto des Autors sollte als Bilddatei in einem der gängigen Grafikformate (am unproblematischsten: TIF-Format; Graustufenbild mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi) oder als normaler Papier-Fotoabzug zum Einscannen mitgeschickt werden. Als Datenträger sind ZIP-Disketten, CD-ROM bzw. Syquest (88 oder 200 MB) möglich.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Weitere Informationen zum „Jahresbericht“ finden Sie unter  
<http://www.dmv.mathematik.de/publikationen/jahresbericht>

## Verlag:

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH  
Abraham-Lincoln-Straße 46  
65189 Wiesbaden  
<http://www.teubner.de>  
<http://www.gvw-fachverlage.de>

*Geschäftsführer:* Dr. Ralf Birkelbach (Vors.),  
Albrecht F. Schirmacher  
*Gesamtleitung Anzeigen:* Thomas Werner  
*Gesamtleitung Produktion:* Ingo Eichel  
*Gesamtleitung Vertrieb:* Gabriel Göttlinger

## Marketing/Sonderdrucke:

Eva Brechtel-Wahl  
Telefon: (06 11) 78 78-3 79, Fax: (06 11) 78 78-4 39, E-Mail: [eva.brechtel-wahl@gvw-fachverlage.de](mailto:eva.brechtel-wahl@gvw-fachverlage.de)

## Abonentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)  
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,  
Postfach 7777, 33310 Gütersloh  
Ursula Müller

Telefon: (0 52 41) 80-19 65, Fax: (0 52 41) 80-96 20, E-Mail: [ursula.mueller@bertelsmann.de](mailto:ursula.mueller@bertelsmann.de)

## Anzeigenleitung

Christian Kannenberg  
Telefon: (06 11) 78 78-3 69, Fax: (06 11) 78 78-4 30, E-Mail: [christian.kannenberg@gvw-media.de](mailto:christian.kannenberg@gvw-media.de)  
[www.gvw-anzeigen.de](http://www.gvw-anzeigen.de)

Es gilt die Preisliste vom 01.01.2008.

## Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 124,- inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

## Copyright ©

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008. Printed in Germany. Der Verlag B. G. Teubner ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim  
Druck: Krips b.v., Meppel, Printed in the Netherlands

ISSN 0012-0456

<b>Vorwort</b> . . . . .	1
--------------------------	---

<b>Übersichtsartikel</b>	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen
--------------------------	----------------------	----------------------------	-------------------

<b>Thetafunktionen auf Modulräumen von Vektorbündeln</b> G. Faltings . . . . .	3
---	---

<b>Existence and Multiplicity Proofs for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems by Computer Assistance</b> M. Plum . . . . .	19
--	----

<b>Übersichtsartikel</b>	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen
--------------------------	----------------------	----------------------------	-------------------

<b>S.-Y. A. Chang: Non-linear Elliptic Equations in Conformal Geometry</b> L. Habermann . . . . .	1
--	---

<b>B. Simon: Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1: Classical Theory, Part 2: Spectral Theory</b> B. Silbermann . . . . .	3
--	---

<b>A. Papadopoulos: Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature</b> T. Foertsch . . . . .	6
---	---

<b>D. Huybrechts: Complex Geometry</b> Th. Peternell . . . . .	8
---	---

<b>I. Neeman: The Determinacy of Long Games</b> S. Quickert . . . . .	9
--	---

## In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

**P. Deuflhard, B. Lutz-Westphal, U. Nowak:** Bessel'scher Irrgarten – Rundungsfehler müssen nicht klein sein

**L. Baringhaus, N. Grübel, N. Henze:** Dietrich Morgenstern (26.09.1924–24.06.2007)

**P. Littelmann:** Über Horns Vermutung, Geometrie, Kombinatorik und Darstellungstheorie

**C. Riener, T. Theobald:** Positive Polynome und semidefinite Programmierung

---

## Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Algebraische Geometrie,  
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover,  
Welfengarten 1, 30167 Hannover  
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund  
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg  
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen  
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik,  
Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth  
E-Mail: Joerg.Rambau@uni-bayreuth.de

Prof. Dr. A. Schied, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin,  
Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin  
E-Mail: schied@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig,  
Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig  
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

## Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810,  
NL-2160 SZ Lisse/Holland

## Vorwort

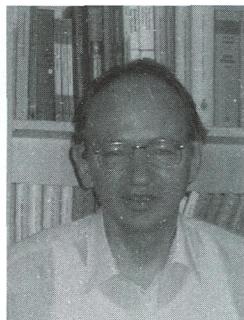
Dieses Heft umfasst zwei Übersichtsartikel. Die Arbeit von G. Faltings befasst sich mit der Theorie der Vektorbündel auf algebraischen Kurven, die in der Riemann'schen Thetafunktion ihre klassischen Wurzeln hat. Insbesondere werden die klassifizierenden Räume (Modulräume) von Vektorbündeln behandelt. Dies führt auch auf die Verlindeformel, die in der Quantenfeldtheorie von Bedeutung ist. Dieser Aufsatz ist eine Ausarbeitung des Hauptvortrags des Verfassers bei der DMV Jahrestagung in Bonn 2006.

Der Beitrag von M. Plum steht an der Grenze zwischen angewandter und reiner Mathematik. Hier werden Randwertprobleme für semilineare elliptische Differentialgleichungen behandelt. Die Frage nach der Existenz von Lösungen ist dabei ein schwieriges Problem. Der Autor untersucht in dieser Arbeit die interessante Frage, inwieweit die Existenz guter numerischer Näherungslösungen für Existenzbeweise herangezogen werden kann. Dies eröffnet die Möglichkeiten, Situationen zu studieren, in denen die klassischen analytischen Methoden bisher noch nicht zum Ziel geführt haben.

Wie stets enthält auch dieses Heft eine Reihe von aktuellen Buchbesprechungen.

K. Hulek





# Thetafunktionen auf Modulräumen von Vektorbündeln

Gerd Faltings

## Abstract

- Mathematics Subject Classification: 14H60
- Keywords and Phrases: Bundles on curves, moduli spaces

Thetafunctions are sections of ample line-bundles on moduli spaces. For moduli of  $G$ -bundles on curves ( $G$  simply connected of type A, D, E) we compute the dimension of the space of sections for the minimal ample line-bundle. We derive the existence of canonical divisor whose geometric interpretation remains open.

Eingegangen: 08.01.2007

Gerd Faltings, Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7,  
D-53111 Bonn, faltings@mpim-bonn.mpg.de

**DMV**  
JAHRESBERICHT  
DER DMV  
© B. G. Teubner 2008

## 1 Einleitung

Die klassische Riemann'sche Thetafunktion beschreibt einen Divisor auf dem Modulraum der Geradenbündel auf einer Kurve (oder einer kompakten Riemann'schen Fläche). Sie wird durch eine konvergente Fourierreihe definiert, besitzt aber auch eine algebraische Interpretation als Determinante der Kohomologie. Nämlich die Nullstellen von Theta sind genau die Geradenbündel (vom geeigneten Grad), welche nicht triviale Kohomologie besitzen. „Nicht triviale Kohomologie“ heißt in diesem Falle die Existenz globaler Schnitte. Ein klassischer Satz von Riemann besagt sogar, dass die Dimension des Raumes dieser Schnitte gleich der Verschwindungsordnung von Theta ist.

Verallgemeinerungen davon erhält man, wenn man die multiplikative Gruppe  $\mathbb{G}_m$  durch andere algebraische Gruppen  $G$  ersetzt und  $G$ -Bündel über der Kurve betrachtet. Zum Beispiel liefert  $G = GL_r$ , Vektorbündel vom Rang  $r$ ,  $G = SL_r$ , Vektorbündel mit trivialer Determinante,  $G = SO_r$ , Vektorbündel mit trivialer Determinante und symmetrischer Bilinearform. Im Folgenden beschränken wir uns auf halbeinfache einfach zusammenhängende Gruppen wie zum Beispiel  $SL_r$ , die symplektische Gruppe  $Sp_{2r}$ , oder die Spingruppe  $Spin_r$ .  $Spin_r$ -Bündel sind Vektorbündel vom Rang  $r$ , mit trivialer Determinante und symmetrischem Produkt, für die ein „Spin-Bündel“ existiert. Letzteres kann präzise mit Hilfe der Clifford-Algebra definiert werden. Wir zeigen, dass für solche Gruppen  $G$  die Picardgruppe des Modulraums unendlich zyklisch (isomorph zu  $\mathbb{Z}$ ) ist. Verallgemeinerte Thetafunktionen sind dann globale Schnitte dieser Geradenbündel. Die Dimension des Vektorraums der Schnitte wird durch die Verlinde-Formel gegeben. Das Ergebnis ist besonders einfach für Gruppen mit nur einer Wurzellänge (Typ A,D,E) und den positiven Erzeuger der Picardgruppe. Offen bleibt aber die geometrische Interpretation der Schnitte.

## 2 Modulräume

Der Modulraum der Vektorbündel auf einer Kurve ist ein klassisches Untersuchungsobjekt der Theorie. Sei (je nach Geschmack)  $C$  eine kompakte Riemann'sche Fläche oder eine glatte projektive geometrisch zusammenhängende Kurve über einem Körper  $k$ . Ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  vom Rang  $r$  auf  $C$  ist eine lokal freie Garbe vom Rang  $r$  über der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_C$ . Seine Determinante  $\det(\mathcal{E}) = \bigwedge^r \mathcal{E}$  ist ein Geradenbündel und hat einen Grad  $d$ . Ein Modulraum  $M_{r,d}$  für Vektorbündel mit Invarianten  $(r, d)$  ist ein Schema (oder komplexe Mannigfaltigkeit)  $M = M_{r,d}$  zusammen mit einem Vektorbündel  $\mathcal{E}_M$  auf dem Produkt  $C \times M$ , so dass

- $\mathcal{E}$  hat Rang  $r$
- auf jeder Faser  $C \times \{m\}$  hat die Einschränkung von  $\mathcal{E}$  Grad  $d$
- für jedes  $k$ -Schema (oder komplexen Raum)  $S$  und jedes Vektorbündel  $\mathcal{E}_S$  auf  $C \times S$  mit Invarianten  $(d, r)$  gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$f : S \rightarrow M$$

so dass

$$\mathcal{E}_S = (id_C \times f)^*(\mathcal{E}_M).$$

Aus der universellen Eigenschaft folgt leicht, dass der Tangentialraum von  $M$  in einem Punkt  $m$  gleich der ersten Kohomologie  $H^1(C, \text{End}(\mathcal{E}_m))$  ist.

Leider existiert aber kein solcher Raum. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass Vektorbündel Automorphismen besitzen: Mindestens die Skalare  $\mathbb{G}_m$ , und manchmal auch mehr. Übersetzt in unser Problem heißt dies das Folgende:

Wenn wir ein Vektorbündel  $\mathcal{E}_S$   $C \times S$  mit einem Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $S$  tensorieren, so ist das Resultat lokal in  $S$  isomorph zu  $\mathcal{E}_S$ , aber nicht unbedingt global. Das heißt, die zugehörigen Abbildungen  $S \rightarrow M$  stimmen lokal überein, aber nicht global.

Die „Lösung“ dieses Problems besteht in der Einführung von „stacks“. Das französische Wort ist „champs“, allgemein anerkannte deutsche Übersetzungen kenne ich nicht. Kandidaten sind „Stapel“, „Multiplizität“, „Orbifold“. Ich benutze daher weiter den Begriff Stack. Wie tritt nun ein solcher hier konkret auf?

Es ist nicht sehr schwierig, ein glattes Schema  $S$  zu finden, zusammen mit einem Vektorbündel  $\mathcal{E}_S$  mit Invarianten  $(r, d)$ , so dass

- jedes Bündel auf  $C$  mit diesen Invarianten ist isomorph zur Einschränkung  $\mathcal{E}_s$  von  $\mathcal{E}_S$  auf eine Faser  $C \times \{s\}$ .
- die kanonische Abbildung (Kodaira-Spencer Klasse)

$$T_{S,s} \rightarrow H^1(C, \text{End}(\mathcal{E}_s))$$

ist surjektiv.

(Die Kodaira-Spencer Klasse bildet den Tangentialraum von  $S$  in den erwarteten Tangentialraum des Modulraums ab.)

Solch ein  $S$  heißt „verselle Deformation“: Es parametrisiert alle Isomorphieklassen, aber eine gegebene Klasse kann mehr als einmal auftauchen. Der Modulraum sollte also ein Quotientenraum von  $S$  sein.

Zur Bildung eines Quotienten betrachtet man das Schema der Isomorphismen von Bündeln. Seine Punkte bestehen aus Paaren von Punkten  $(s, t)$  von  $S$  und einem Isomorphismus von Bündeln  $\mathcal{E}_s \cong \mathcal{E}_t$ . Präziser gibt es einen Homomorphismus von Schemata

$$\text{Isom}(\text{pr}_1^*\mathcal{E}_S, \text{pr}_2^*\mathcal{E}_S) \rightarrow S \times S,$$

welcher Familien solcher Isomorphismen klassifiziert. Zusammen mit der Komposition von Isomorphismen liefert dies ein Groupoid in der Kategorie der Schemata, das heißt einen darstellbaren Funktor mit Werten in Kategorien, in denen jeder Morphismus invertierbar ist. Auch sind alle Objekte Mannigfaltigkeiten, und die zwei Projektionen von **Isom** auf  $S$  glatt (oder submersiv). Man nennt dies ein glattes Groupoid. Im Prinzip sollte  $M_{r,d}$  der Quotient von  $S$  unter der Operation von **Isom** sein.

Eine vernünftige Quotientenbildung ist aber nur möglich, falls **Isom** frei auf  $S$  operiert. Dies heißt genau, dass die Fasern von **Isom** über Diagonalelementen  $(s, s)$  von  $S \times S$  trivial sind, und tritt aber bei Vektorbündeln gerade nicht ein. Trotzdem kann man aber einiges über den fiktiven Quotienten sagen, auch wenn er als Schema nicht existiert:

Zum Beispiel ist eine kohärente Garbe auf dem Quotienten definiert als eine kohärente Garbe auf  $S$  zusammen mit einer Operation von **Isom**, also als eine äquivariante kohärente Garbe, und Ähnliches gilt für relative Schemata, Morphismen, usw. Man spricht dann von Objekten über dem Stack

$$\mathcal{M}_{r,d} = S/\mathbf{Isom}.$$

Man muss natürlich verifizieren, dass das Resultat unabhängig von der Auswahl von  $S$  ist. Kurzum, mit Stacks wird das Problem der Quotientenbildung hinwegdefiniert.

Ein anderer Ansatz benutzt grobe Modulschemata semistabiler Bündel. Diese sind zum einen richtige projektive Schemata. Zum anderen sind sie quasikompakt, was für den Stack auch so nicht gilt. Ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  heißt semistabil, falls für jedes Unterbündel  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  gilt, dass

$$\text{Grad}(\mathcal{F})/\text{Rang}(\mathcal{F}) \leq \text{Grad}(\mathcal{E})/\text{Rang}(\mathcal{E}).$$

Falls immer die strikte Ungleichung gilt, ist  $\mathcal{E}$  stabil. Stabile bzw. semistabile Bündel bilden offene Unterstacks

$$\mathcal{M}_{r,d}^s \subset \mathcal{M}_{r,d}^{ss} \subset \mathcal{M}_{d,r}.$$

Sie sind quasikompakt und besitzen grobe Modulschemata. Das bedeutet, es gibt universelle Abbildungen  $\mathcal{M}_{r,d}^s \rightarrow \mathcal{M}_{d,r}^s$  und  $\mathcal{M}_{r,d}^{ss} \rightarrow \mathcal{M}_{r,d}^{ss}$  in Schemata. Dabei ist  $\mathcal{M}_{r,d}^{ss}$  projektiv und  $\mathcal{M}_{r,d}^s$  ein offenes Unterschema. Die Punkte von  $\mathcal{M}_{r,d}^{ss}$  entsprechen den polystabilen Bündeln (semistabile Bündel, welche direkte Summe von stabilen Bündeln sind). Leider besitzt  $\mathcal{M}_{d,r}^{ss}$  keine einfache modulare Beschreibung, und es besitzt hochgradig singuläre Punkte. Aus diesem Grund werden wir im Weiteren mit dem Stack  $\mathcal{M}_{r,d}$  arbeiten.

Allerdings ersetzen wir von nun an die Gruppe  $GL_r$  durch eine halbeinfache, einfache, und einfach zusammenhängende Gruppe  $G$ , und betrachten  $G$ -Torsoren über  $C$ . Der zugehörige Stack  $\mathcal{M}_G$  ist dann zusammenhängend. Es gibt damit keine diskreten Invarianten wie den Grad  $d$ . Auch operiert statt der Gruppe  $\mathbb{G}_m$  nur noch das endliche Zentrum  $Z \subset G$  natürlicherweise auf allen  $G$ -Torsoren.

Es sei noch erwähnt, dass Atiyah und Bott ([1]) die (topologische) Kohomologie von  $\mathcal{M}_G$  berechnet haben: Der universelle  $G$ -Torsor  $P$  auf  $C \times \mathcal{M}_G$  besitzt charakteristische Klassen (Chern-Klassen)  $c_i(P) \in H^{2i}(C \times S, \mathbb{Q})$ . Nach der Künneth-Formel zerlegen sich diese in Produkte aus Kohomologie-Klassen auf  $C$  und solchen auf  $\mathcal{M}_G$ . Die Kohomologie von  $\mathcal{M}_G$  ist dann die von den zweiten Komponenten erzeugte freie graduert-kommutative Algebra.

### 3 Der Doppelquotient

Sei weiter  $C$  eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ , und  $x \in C$  ein Punkt,  $C^\circ = C - \{x\}$ . Dann sind alle  $G$ -Bündel ( $G$  halbeinfach, einfach, einfache zusammenhängend) trivial auf  $C^\circ$ :

Zum Beispiel sei  $G = SL_r$ . Ein  $G$ -Torsor ist ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  mit trivialer Determinante. Nun ist  $C^\circ$  das Spektrum eines Dedekindrings, und die Einschränkung von  $\mathcal{E}$  auf  $C^\circ$  liefert einen projektiven Modul mit trivialer Determinante über diesem Dedekindring. Aber projektive Moduln werden durch ihre Determinante klassifiziert, also ist dieser Modul trivial, also ist  $\mathcal{E}$  als Bündel über  $C^\circ$  trivial. Die zwei zugehörigen Trivialisierungen der Determinante unterscheiden sich um eine meromorphe Funktion auf  $C$ , deren Divisor ein Vielfaches von  $\{x\}$  ist. Da der Grad dieses Divisors verschwindet, ist die Funktion konstant, und  $\mathcal{E}$  ist auch als  $SL_r$ -Bündel trivial auf  $C^\circ$ .

Sei  $t$  ein lokaler Parameter in  $x$ , d.h. die Komplettierung  $\hat{\mathcal{O}}_{C,x}$  des lokalen Ringes in  $x$  ist isomorph zu  $k[[t]]$ . Dann ist ein  $G$ -Torsor trivial auf  $C^\circ$  und auf  $k[[t]]$ , entsteht also durch Verkleben zweier trivialer Bündel mit einem Schnitt von  $G$  über dem Durchschnitt  $k((t))$  (dem Körper der Laurentreihen). Man erhält isomorphe Bündel durch Ändern der Trivialisierungen auf  $C^\circ$  oder  $k[[t]]$ . Damit entsprechen die Bündel einem Doppelquotienten, und

$$\mathcal{M}_G(k) = G(C^\circ) \setminus G(k((t))) / G(k[[t]]).$$

Hierbei ist  $G(k[[t]]) = LG^{\geq 0}$  dargestellt durch ein (unendlich dimensionales) Gruppenschema  $LG^{\geq 0}$ ,  $G(C^\circ)$  durch ein Ind-Schema (welches noch eine Vereinigung endlich dimensionaler Schemata ist), und  $G(k((t))) = LG(k)$  ist ein Ind-Schema (zusammengesetzt aus unendlich dimensionalen Teilen). Alles ist also unendlich dimensional!

Zur Untersuchung des Quotienten dividieren wir zunächst nur durch die rechte Untergruppe und erhalten die affine Grassmann'sche

$$\mathbb{ID}_G = LG / L^{\geq 0} G.$$

Diese ist eine Vereinigung projektiver (konventioneller) Schemata. Zum Beispiel erhält man für die Gruppe  $G = SL_r$  den Parameterraum für  $k[[t]]$ -Gitter  $L \subset k((t))^r$  mit trivialer Determinante:

$L$  ist isomorph zu  $k[[t]]^r$ , es gibt eine ganze Zahl  $n$  mit  $t^n k[[t]]^r \subset L \subset t^{-n} k[[t]]^r$ , und  $\bigwedge^r L = k[[t]] \subset k((t))$ . Für festes  $n$  liefert dies ein Unterschema einer Grassmann-Varietät.

In der Kac-Moody-Theorie verhält sich  $LG$  wie die Gruppe zum affinen Wurzelsystem von  $G$ , und  $L^{\geq 0} G$  wie eine maximale parabolische Untergruppe. Es gibt zum Beispiel Bruhat-Zerlegungen, und die Picard-Gruppe des Quotienten ist eine unendliche zyklische Gruppe. Ein Erzeugendes wird gegeben durch die „Determinante“ von  $L$ , genauer gesagt die Determinante (über  $k$ ) von  $L/t^n k[[t]]^r$  für genügend großes  $n$ . Dies ist bis auf Isomorphismus unabhängig von  $n$ . Dieser Isomorphismus ist aber nicht kanonisch, und deshalb sind die zugehörigen Geradenbündel zwar stabil unter Transformation mit Elementen von  $LG$ , aber nicht  $LG$ -äquivalent. Vielmehr muss man dazu zu einer zentralen Erweiterung  $\tilde{LG}$  übergehen:

$\tilde{LG}$  besitzt eine zentrale Untergruppe  $\mathbb{G}_m$  mit Quotient  $\tilde{LG}/\mathbb{G}_m = LG$  und operiert auf einem Erzeuger  $\mathcal{L}$  von  $\text{Pic}(\mathbb{ID}_G)$ , so dass  $\mathbb{G}_m$  trivial auf  $\mathbb{ID}_G$  und durch Skalarmultiplikation auf  $\mathcal{L}$  operiert.

Angewandt auf den Stack  $\mathcal{M}_G = \mathbf{ID}_G/G(C^\circ)$  besteht dann  $\text{Pic}(\mathcal{M}_G)$  aus  $G(C^\circ)$ -äquivarianten Geradenbündeln auf  $\mathbf{ID}_G$ . Man zeigt recht einfach, dass  $G(C^\circ)$  keine nicht trivialen Charaktere besitzt, so dass ein Geradenbündel auf  $\mathbf{ID}_G$  nur auf höchstens eine Weise äquivariant sein kann. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass dies auch für alle solche Bündel gilt. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass die  $\mathbb{G}_m$ -Erweiterung  $\tilde{L}_G$  über  $G(C^\circ)$  spaltet.

Zum Schluss noch ein Beispiel: Wähle  $C = \mathbb{P}^1$  als projektive Gerade  $x = 0, t$  als kanonische Koordinate. Dann ist  $\mathcal{M}_G = G(k[t^{-1}]) \backslash \mathbf{ID}_G$ . Die  $G(k[t^{-1}])$ -Bahn durch den Ursprung ist eine dichte offene Teilmenge von  $\mathbf{ID}_G$  (die große Zelle), und das Komplement ist ein Divisor, welcher die Picard-Gruppe erzeugt. Somit enthält  $\mathcal{M}_G$  als dichten offenen Unterstack die trivialen  $G$ -Bündel.

## 4 Geradenbündel auf $\mathcal{M}_G$

Bevor wir eine allgemeine Konstruktion skizzieren, zunächst zwei Beispiele:

a) Sei  $G = SL_r$ , somit klassifiziert  $\mathcal{M}_G$  Vektorbündel vom Rang  $r$  mit trivialer Determinante. Für ein solches Vektorbündel definiert die Determinante der Kohomologie ein Geradenbündel auf dem Modulraum. Dies heißt, wir müssen jedes Schema  $S$  und jedes Bündel  $\mathcal{E}$  auf  $C \times S$ , vom Rang  $r$  und trivialer Determinante, ein Geradenbündel  $\mathcal{L}_S$  auf  $S$  definieren, funktoriell unter Pullback und unter Isomorphismen. Es reicht, dies für quasikompakte  $S$  (oder auch für affine  $S$ ) zu tun.

Dazu wähle man einen (sehr) positiven Divisor  $D \subset C$ , so dass auf jeder Faser  $C \times \{s\}$

$$H^1(C, \mathcal{E}_s(D)) = (0).$$

Dann ist  $pr_{2,*}(\mathcal{E}(D))$  ein Vektorbündel auf  $S$ , und der Komplex

$$pr_{2,*}(\mathcal{E}(D)) \rightarrow pr_{2,*}(\mathcal{E}(D)/\mathcal{E})$$

repräsentiert das derivierte direkte Bild  $\mathbf{R}pr_{2,*}(\mathcal{E})$  auf  $S$ . Definiere  $\mathcal{L}_S$  als die Determinante dieses Komplexes (siehe [9] für eine saubere Definition), also als

$$\mathcal{L}_S = \det(pr_{2,*}(\mathcal{E}(D))) \otimes \det(pr_{2,*}(\mathcal{E}(D)/\mathcal{E}))^{\otimes -1}.$$

Dies ist bis auf kanonischen Isomorphismus unabhängig von der Wahl von  $D$ : Falls  $E > D$  ein anderer solcher Divisor ist, so induziert die Injektion  $\mathcal{E}(D) \subset \mathcal{E}(E)$  einen Quasiisomorphismus von Komplexen und damit einen Isomorphismus der Determinanten.

Die Determinante der Kohomologie ist für alle Vektorbündel erklärt, d.h. wir haben die Bedingung „triviale Determinante“ der  $SL_r$ -Bündel gar nicht benutzt. Sie geht aber ein bei der folgenden Bemerkung: Tensorieren mit einem Geradenbündel ändert nicht die Determinante der Kohomologie. Ein Beispiel: Beim Tensorieren mit  $\mathcal{O}(-p)$ ,  $p \in C$  ein Punkt, ändert sich die Determinante der Kohomologie um die Determinante von  $\mathcal{E}$  in  $p$ , also gar nicht.

Man kann dies ausnutzen und  $\mathcal{E}$  (jetzt mit trivialer Determinante) mit einem Geradenbündel vom Grad  $g - 1$  tensorieren. Dann haben die Bündel  $pr_{2,*}(\mathcal{E}(D))$  und  $pr_{2,*}(\mathcal{E}(D)/\mathcal{E})$  den selben Rang, und die Determinante der Abbildung zwischen ihnen ist ein Schnitt im Inversen der Determinante der Kohomologie. Dieser Schnitt (genannt Kohomologie-Determinante) ist unabhängig von  $D$  und eine Verallgemeinerung der klassischen Riemann'schen Thetafunktion. Seine Nullstellenmenge besteht aus den Bündeln mit nicht trivialer Kohomologie.

Wenn man mit Vektorbündeln statt Geradenbündeln tensoriert, erhält man globale Schnitte von Potenzen des Inversen der Kohomologiedeterminante. Man kann mit ihnen Einbettungen des groben Modulraums der semistabilen Bündel konstruieren ([4], [5]).

Bleibt schließlich die Beschreibung der Determinante der Kohomologie im Rahmen des Doppelquotienten:

Falls  $G = SL_r$ , so induziert die Determinante der Kohomologie auf  $\mathcal{M}_G = G(C^\circ) \backslash \mathbb{D}_G$  auf  $\mathbb{D}_G$  das Inverse des kanonischen Erzeugenden der Picardgruppe. (Das Inverse ist zwar auch ein Erzeugendes, entspricht aber dem Negativen des Divisors, welcher die offene Zelle begrenzt.)

b) Sei  $G = Spin(r)$  die Spingroupen zur  $SO(r)$  (Die reicht auch, aber wir haben nun einmal einfach zusammenhängend vorausgesetzt).  $G$ -Torsoren sind Bündel  $\mathcal{E}$  zusammen mit einer quadratischen Form  $q$  (mit Werten in  $\mathcal{O}_C$ ), so dass die assoziierte Bilinearform auf  $\mathcal{E}$  nicht ausgeartet ist. Zusätzlich gibt es noch eine Spinstruktur, die wir aber nicht benötigen.

Wir wählen eine Quadratwurzel  $\mathcal{L}$  des kanonischen Bündels  $\omega_C$  und tensorieren  $\mathcal{E}$  mit  $\mathcal{L}$ . Danach hat  $\mathcal{E}$  eine quadratische Form mit Werten in  $\omega_C$ . Wähle wieder einen sehr positiven Divisor  $D$ , so dass für alle  $s \in S$

$$H^0(C, \mathcal{E}_s(-D)) = H^1(C, \mathcal{E}_s(D)) = (0).$$

Dann besitzt das Vektorbündel

$$\mathcal{F} = pr_{2,*}(\mathcal{E}(D)/\mathcal{E}(-D))$$

auf  $S$  eine nichtausgeartete quadratische Form:

Der Wert auf einem lokalen Schnitt  $f$  ist das Residuum in  $D$   $Res_D q(f)$ .

Außerdem erhalten wir zwei maximal isotrope Unterbündel in  $\mathcal{F}$ , nämlich

$$\mathcal{A} = pr_{2,*}(\mathcal{E}/\mathcal{E}(-D))$$

und

$$\mathcal{B} = pr_{2,*}(\mathcal{E}(D)).$$

Das erste ist isotrop, weil für lokale Schnitte  $f$   $q(f)$  gar keinen Pol in  $D$  hat, das zweite, weil globale Residuen verschwinden (Residuensatz).

Sei nun  $C(\mathcal{F})$  die Clifford-Algebra zu  $\mathcal{F}$ , das heißt die freie Tensoralgebra dividiert durch die Relation

$$f^2 = Res_D(q(f)).$$

Sie ist lokal isomorph zu einer Matrix-Algebra  $\text{End}(\mathcal{G})$  mit einem  $(\mathbb{Z}/(2)$ -graduierten) Vektorbündel  $\mathcal{G}$ .  $\mathcal{G}$  ist eindeutig bestimmt bis auf Tensorieren mit einem Geradenbündel. Zum Beispiel kann man nach Wahl eines isotropen Komplements  $\mathcal{A}'$  zu  $\mathcal{A}$  für  $\mathcal{G}$  die äußere Algebra  $\bigwedge \mathcal{A}'$  wählen, auf der  $\mathcal{A}$  durch innere und  $\mathcal{A}'$  durch äußere Multiplikation operieren. Dieses  $\mathcal{G}$  ist eindeutig dadurch bestimmt, dass die von  $\mathcal{A}$  annullierten Elemente (die Konstanten in der äußeren Algebra) ein triviales Bündel bilden, und damit ist dieses  $\mathcal{G}$  auch global und nicht nur lokal definiert. Im Folgenden kommen wir aber mit lokal definierten  $\mathcal{G}$ 's aus, d.h. alles ist invariant unter Tensorieren mit Geradenbündeln.

Die von  $\mathcal{A}$  annullierten Elemente von  $\mathcal{G}$  bilden ein Unterbündel  $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$  vom Rang eins. Dual erhält man einen Quotienten  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  durch Ausdividieren der  $\mathcal{A}$ -Operation. Diese Geradenbündel nennen wir  $\mathcal{A}$ -Invarianten bzw.  $\mathcal{A}$ -Kovarianten. Falls  $\alpha \in \det(\mathcal{A}) = \bigwedge^{\max} \mathcal{A}$  ein Erzeugendes bezeichnet, so liefert die Multiplikation mit  $\alpha$  einen Isomorphismus

$$\det(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{G}^{\mathcal{A}}.$$

Entsprechendes gilt natürlich auch mit dem isotropen Unterbündel  $\mathcal{B}$ . Wir definieren ein Geradenbündel  $\mathcal{M}$  durch

$$\mathcal{M} = \mathcal{G}_{\mathcal{B}} \otimes \mathcal{G}^{\mathcal{A}, \vee}.$$

$\mathcal{C}(\mathcal{F})$  besitzt eine Involution (zum Beispiel  $-id_{\mathcal{F}}$  auf  $\mathcal{F}$ ), und damit wird das Dual  $\mathcal{G}^{\vee}$  auch zu einem  $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ -Modul. Darin sind die von  $\mathcal{A}$ -Invarianten dual zu den  $\mathcal{A}$ -Kovarianten in  $\mathcal{G}$ , und analog für  $\mathcal{B}$ . Ersetzen wir  $\mathcal{G}$  durch sein Dual  $\mathcal{G}^{\vee}$ , so ergibt sich dasselbe Geradenbündel  $\mathcal{M}$  als

$$\mathcal{M} \cong (\mathcal{G}_{\mathcal{A}})^{\vee} \otimes \mathcal{G}^{\mathcal{B}}.$$

Wegen der Beziehung zwischen Invarianten und Kovarianten ergibt sich durch Tensorieren, dass

$$\mathcal{M}^{\otimes 2} \cong \det(\mathcal{A})^{\otimes -1} \otimes \det(\mathcal{B})^{\otimes -1}.$$

Auch ist  $\mathcal{M}$  unabhängig von der Wahl von  $D$ : Falls  $D < D'$ ,  $\mathcal{F}' = pr_{2,*}(\mathcal{E}(D')/\mathcal{E})$ , so ist  $\mathcal{C} = pr_{2,*}(\mathcal{E}(D)/\mathcal{E}'(D))$  ein isotropes Unterbündel mit

$$\mathcal{F} = \mathcal{C}^{\perp}/\mathcal{C}.$$

Ferner gilt für die neuen Unterbündel  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{B}'$  die Relation

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}', \mathcal{A} = \mathcal{A}'/\mathcal{C}$$

und

$$\mathcal{B}' + \mathcal{C}^{\perp} = \mathcal{F}', \mathcal{B} = \mathcal{B}' \cap \mathcal{C}^{\perp}.$$

Man kann dann für  $\mathcal{G}$  die  $\mathcal{C}$ -Invarianten in  $\mathcal{G}'$  wählen, so dass  $\mathcal{G}^{\mathcal{A}} = \mathcal{G}'^{\mathcal{A}'}$ , und dann berechnet man, dass  $\mathcal{G}_{\mathcal{B}} \cong \mathcal{G}'_{\mathcal{B}'}$ . Alles in allem also auch  $\mathcal{M}' \cong \mathcal{M}$ .

Somit globalisiert  $\mathcal{M}$  zu einem Geradenbündel auf  $\mathcal{M}_G$ , dem Pfaff-Bündel („Pfaffian“).

Die Projektion des Elements  $G^A$  auf die  $\mathcal{B}$ -Koinvarianten liefert einen expliziten Schnitt von  $\mathcal{M}$ , genannt Pfaff-Determinante, unabhängig von der Wahl von  $\mathcal{G}$ . Seine Nullstellenmenge besteht aus den Punkten  $s \in S$ , für die die Summe  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  nicht  $\mathcal{F}$  aufspannt. Dies sind gerade die Punkte, in denen  $\mathcal{E}$  nicht triviale Kohomologie besitzt:

Die Kohomologie von  $\mathcal{E}$  wird durch den Komplex

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$$

definiert.

Genauer gesagt ist die Determinante von  $\mathcal{F}$  trivial, und somit das Inverse der Determinante der Kohomologie von  $\mathcal{E}$  isomorph zum Inversen von  $\det(\mathcal{A}) \otimes \det(\mathcal{B})$ , also zu  $\mathcal{M}^{\otimes 2}$ . Bei diesem Isomorphismus entspricht die Kohomologie-Determinante von  $\mathcal{E}$  dem Quadrat der gerade konstruierten Pfaff-Determinante:

$\mathcal{G}$  besitzt eine kanonische  $\mathbb{Z}/(2)$ -Graduierung verträglich mit der  $C(\mathcal{F})$ -Operation, so dass  $\mathcal{G}^A$  gerade ist. Die assoziierte Superspur (Differenz der Spuren auf geraden und ungeraden Elementen) auf  $C(\mathcal{F})$  verschwindet auf allen Elementen von  $C(\mathcal{F})$ , welche Produkte von  $\langle \text{Rang}(\mathcal{F})$  Elementen aus  $\mathcal{F}$  sind. Der Quotient von  $C(\mathcal{F})$  nach diesem Untermodul ist isomorph zu  $\det(\mathcal{F}) \cong \det(\mathcal{A}) \otimes \det(\mathcal{B})$ . Einen Isomorphismus erhält man, indem man alle Elemente lokaler Basen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  miteinander multipliziert. Wir nennen die entsprechenden Produkte  $\alpha \in \det(\mathcal{A})$  und  $\beta \in \det(\mathcal{B})$ .

Wir berechnen die Superspur von  $\alpha\beta$  auf  $\mathcal{G}$  wie folgt:  $\alpha$  faktorisiert über den Quotienten  $\mathcal{G}_A$  und hat Bild im Unterbündel  $\mathcal{G}^A$ , und Multiplikation mit  $\alpha$  identifiziert diese beiden Bündel. Analoges gilt für  $\beta$  und  $\mathcal{B}$ . Somit bleibt als einziger nicht trivialer Matrixkoeffizient von  $\alpha\beta$  das Produkt der Abbildungen  $\mathcal{G}^A \rightarrow \mathcal{G}_B$  und  $\mathcal{G}^B \rightarrow \mathcal{G}_A$ . Beide diese Abbildungen sind aber Inkarnationen unseres kanonischen Schnitts.

Übrigens erhält man eine andere Definition der Pfaff-Determinante wie folgt: Sei  $\mathcal{E}$  ein Bündel vom geraden Rang  $2r$  mit einer nicht ausgearteten Bilinearform mit Werten in  $\omega_C$ . Wähle ein maximal isotropes Unterbündel  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  (vom Rang  $r$ ) mit  $\Gamma(C, \mathcal{F}) = (0)$  (Dies ist lokal in der Basis stets möglich nach [3]). Dann gilt

$$\mathcal{E}/\mathcal{F} \cong \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_C),$$

und die Erweiterungsklasse von

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{F} \rightarrow (0)$$

liegt in  $H^1(C, \wedge^2(\mathcal{F}) \otimes \omega_C^{\otimes -1})$ .

Dies ist dual zu  $\Gamma(C, \wedge^2(\mathcal{F}^\vee) \otimes \omega_C^{\otimes 2})$ , so dass der Erweiterungsklasse eine Linearform auf diesem Raum entspricht. Daraus erhält man eine alternierende Form auf  $\Gamma(C, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_C)$ . Deren Pfaff'sche Determinante liegt im Dualen der Determinante von  $\Gamma(C, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_C)$ , also (nach Serre-Dualität) in der Determinante von  $H^1(C, \mathcal{F})$  oder im Inversen der Determinante der Kohomologie von  $\mathcal{F}$ . Diese ist aber eine Quadratwurzel der Determinante der Kohomologie von  $\mathcal{E}$ , da in der obigen exakten Sequenz sowohl  $\mathcal{F}$  wie  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  dieselbe Kohomologiedeterminante liefern. Auch ist die Pfaff'sche Determinante Null genau dann, wenn  $\mathcal{E}$  nicht triviale Kohomologie besitzt. Alles in allem Indizien, dass wir die richtigen Objekte erhalten, was dann aber noch eines Beweises bedarf. Allerdings reicht dazu schon weitgehend die Bemerkung, dass die Nullstellen-Divisoren übereinstimmen.

Man kann sich aber auch direkt überlegen, dass für genügend generisches  $\mathcal{F}$  die Determinante der Kohomologie von  $\mathcal{F}$  unabhängig von dieser Auswahl ist:

Dazu betrachten wir maximal isotrope  $\mathcal{F}$ 's, für die  $\Gamma(C, \wedge^2 \mathcal{F}(2p)) = (0)$  für alle Punkte  $p \in C$  gilt. Außerdem soll  $\mathcal{F}$  im generischen Punkt eine vorgegebene parabolische Konjugationsklasse definieren. Dies bewirkt, dass der Durchschnitt zweier solcher  $\mathcal{F}$ 's stets gerade Dimension hat.

Diese  $\mathcal{F}$ 's werden parametrisiert durch ein glattes  $S$ -Schema  $S' \rightarrow S$ . Wir benutzen im Folgenden Deformationstheorie. Zum Beispiel ist der relative Tangentialraum von  $S'$  isomorph zu  $\text{Hom}_C(\omega_C, \wedge^2 \mathcal{F})$ . Über dem Faserprodukt  $S'' = S' \times_S S'$  gibt es dann in  $C \times_S S''$  zwei tautologische maximal isotrope Unterbündel  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$  in  $\mathcal{E}$ . Um zu zeigen, dass ihre Determinanten der Kohomologie isomorph sind, darf man aus  $S''$  abgeschlossene Teilmengen der (faserweise) Kodimension  $\geq 2$  entfernen. Damit kann man erreichen, dass der Kokern der Inklusion  $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{E}$  Träger in einem Divisor  $D \subset C \times_S S''$  hat, welcher endlich und flach über  $S''$  ist. Außerdem ist der Kokern das direkte Bild eines Vektorbündels  $\mathcal{G}$  vom Rang zwei auf  $D$ . Schließlich ist das Normalenbündel  $\mathcal{O}_C(D)|D$  isomorph zu  $\text{Hom}(\omega_C, \wedge^2 \mathcal{G})$  (Deformationstheorie).

Dies heißt, dass  $\mathcal{G}$  eine nicht degenerierte symplektische Form mit Werten im relativen dualisierenden Bündel  $\omega_C(D)|D$  besitzt. Das direkte Bild unter der Projektion nach  $S''$  ist dann symplektisch und besitzt triviale Determinante. Dies ist aber gerade die Determinante der Kohomologie von  $\mathcal{G}$ . Andererseits ist  $\mathcal{G}$  der Kokern der Abbildung

$$\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{F}_2 = \text{Hom}(\mathcal{F}_2, \omega_C).$$

Also haben die beiden Bündel dieselbe Kohomologiedeterminante.

Natürlich ist dies noch nicht alles: Wir brauchen ein „descente-Datum“, das heißt, diese Isomorphismen müssen (für drei verschiedene  $\mathcal{F}$ 's) transitiv sein. Man erreicht dies durch eine Modifikation: Sei  $\phi_{12}$  der eben konstruierte Isomorphismus für die generischen Bündel  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$ . Dann gilt für vier Bündel die Gleichung (mit hoffentlich offensichtlicher Notation)

$$\phi_{12}\phi_{34} = \phi_{13}\phi_{24},$$

und der Quotient  $\phi_{12}/\phi_{11}$  gibt ein Descente-Datum. Außerdem sollten wir zeigen, dass die Pfaff-Determinante invariant unter dem Descent-Datum ist. Dies folgt am Ende aus der Eindeutigkeit aller betrachteten Objekte, aber ein direkter Beweis wäre schöner.

## 5 Konstruktion eines Geradenbündels der Invariante Eins

Ich hatte versprochen, ein solches Bündel zu konstruieren. Für die Gruppen  $SL_r$  kann man die Determinante der Kohomologie wählen, für die Spingruppen das eben konstruierte Pfaff-Bündel. Für ein beliebiges  $G$  erhält man dann für jede  $G$ -Darstellung  $E$  durch Pullback von  $SL(E)$  ein Geradenbündel auf  $\mathcal{M}_G$ . Dessen Invariante ergibt sich durch Einschränkung auf Untergruppen  $SL_2 \subset G$  zu langen Wurzeln: Man muss die Spurform der Darstellung auf  $E$  durch die der zweidimensionalen Darstellung von  $SL_2$

dividieren. Schließlich kann man noch für orthogonale Darstellungen durch zwei dividieren, wegen der Quadratwurzel. Zum Beispiel hat die adjungierte Darstellung Invariante  $2h^\vee$ , das Doppelte der dualen Coxeter Zahl. Schließlich gilt noch für Gruppen  $G$  mit zwei verschiedenen Wurzel-Längen: Es gibt eine (einfache einfach zusammenhängende) Gruppe  $H$  und einen Automorphismus  $\sigma$  von  $H$  von endlicher Ordnung, so dass  $\sigma$  einen maximalen Torus und eine Borel-Gruppe stabilisiert, und  $G$  besteht aus den Fixpunkten von  $\sigma$ . Das Dynkin-Diagramm des dualen Wurzelsystems von  $G$  ist dann der Quotient des entsprechenden Diagramms von  $H$  unter dem Automorphismus. Genauer gesagt entsteht der Typ  $C_l$  (Duales  $B_l$ ) aus  $A_{2l-1}$  mit dem nicht trivialen Automorphismus (entsprechend  $Sp_{2l} \subset SL_{2l}$ ),  $B_l$  aus  $D_{l+1}$  (entsprechend  $Spin_{2l+1} \subset Spin_{2l+2}$ ),  $F_4$  aus  $E_6$  und  $G_2$  aus  $D_4$ . Wieder liefert das Pullback eines Geradenbündels von Invariante Eins auf  $\mathcal{M}_H$  ein solches auf  $\mathcal{M}_G$ .

Damit reichen geometrische Konstruktionen für die klassischen Gruppen und den Typ  $G_2$ . Für die übrigen exzeptionellen Gruppen bleibt aber eine Lücke, z. B. kann man so für die Gruppe  $E_8$  nur Invariante 30 erreichen. Es gibt nun eine allgemeine Konstruktion, die diese Lücke schließt. Sie benutzt den Begriff der generischen Borel-Untergruppe. Er entspricht den im letzten Abschnitt benutzten generischen isotropen Unterbündeln.

Dazu sei  $B \subset G$  eine Borel-Untergruppe. Es ist bekannt, dass jeder  $G$ -Torsor auf  $C$  von einem  $B$ -Torsor induziert werden kann. Dies entspricht einem Schnitt des assoziierten  $G/B$ -Bündels. Unter geeigneten numerischen Bedingungen ist der Raum dieser Schnitte ein gutes Schema. Zum Beispiel gilt dies für normale Vektorbündel  $\mathcal{E}$  ( $G = GL_r$ ), falls die Subquotienten  $\mathcal{L}_i = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1}$  der zugehörigen Fahne

$$\mathcal{F}_0 = (0) \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$$

die Bedingung

$$Grad(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_{i-1}^{\otimes -1}) > 2g - 2$$

erfüllen.

Für ein  $B$ -Bündel auf  $C \times S$  erhält man für jedes Gewicht  $\epsilon$  ein Geradenbündel  $\mathcal{L}_\epsilon$  auf  $C \times S$ . Aus zwei solcher Bündel  $\mathcal{L}_\delta$  und  $\mathcal{L}_\epsilon$  konstruiert man (nach A. Weil) ein Geradenbündel  $\langle \mathcal{L}_\delta, \mathcal{L}_\epsilon \rangle$  auf  $S$ , und eine geeignete Kombination von solchen liefert den Kandidaten für das Bündel der Invariante Eins. Zum Beispiel ist für zwei teilerfremde Divisoren  $D$  und  $E$  auf  $C \times S$   $\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle$  das durch die Projektion (auf  $S$ ) von  $D \cap E$  definierte Bündel auf  $S$ .

Für einen  $G$ -Torsor auf  $C \times S$  gibt es dann eine glatte Überdeckung  $S' \rightarrow S$  und auf  $C \times S'$  die Reduktion auf einen generischen Borel. Wir haben das gewünschte Geradenbündel auf  $S'$  konstruiert und müssen noch den Abstieg („descente“) nach  $S$  schaffen. Dieser erfordert einen Isomorphismus (mit Kozykelbedingung) der zwei Pullbacks nach  $S' \times_S S'$ . Einen solchen Isomorphismus konstruiert man aus den Schubertzellen der Kodimension zwei auf  $G/B \times G/B$ .

## 6 Die Verlinde-Formel

Diese Formel berechnet (in Charakteristik 0) die Dimension des Raums der globalen Schnitte  $\Gamma(\mathcal{M}_G, \mathcal{L}_c)$  für das Geradenbündel mit Invariante  $c$ . Etwas allgemeiner kann man noch  $\mathcal{L}_c$  tensorieren mit Vektorbündeln  $\mathcal{E}_x$ . Dabei ist  $x \in C$  ein Punkt und  $E$  eine irreduzible Darstellung von  $G$ .  $E_x$  ordnet einem  $G$ -Torsor  $P$  die Faser des zugehörigen Vektorbündels  $\mathcal{E} = E^P$  in  $x$  zu. Man sieht leicht, dass es nur nicht triviale globale Schnitte geben kann, wenn  $E$  integabel ist. Dies bedeutet, dass das maximale Gewicht von  $E$  auf der Kowurzel  $\theta^\vee$  zur maximalen Wurzel  $\theta$  einen Wert  $\leq c$  annimmt. Falls  $c = 1$  und  $G$  vom Typ A,D,E ist (d.h. nur eine Wurzellänge besitzt), so bedeutet dies dass  $E$  entweder trivial oder winzig („miniskul“) ist. Die Anzahl dieser Darstellungen ist gleich der Ordnung des Zentrums  $Z$  von  $G$ .

Der Mechanismus der Verlinde-Formel funktioniert wie folgt: Man degeneriere die Kurve zu einer rationalen Kurve mit  $g$  Doppelpunkten, also zu  $\mathbb{P}^1$  mit  $g$  Paaren von Punkten  $\{x_i, y_i\}$  identifiziert. Dann besteht ein  $G$ -Torsor auf der degenerierten Kurve aus einem  $G$ -Torsor auf  $\mathbb{P}^1$  zusammen mit Isomorphismen der Fasern in  $x_i$  und  $y_i$ . Letztere werden nicht ganz kanonisch durch ein Exemplar von  $G$  parametrisiert, besser durch ein Bündel mit Faser  $G$  und Strukturgruppe  $G \times G$ . Das heißt, der Modulraum (-stack)  $\mathcal{M}_G$  für die singuläre Kurve ist ein  $G^g$ -Bündel über dem entsprechenden Modulraum für  $\mathbb{P}^1$ . Da die regulären Funktionen auf  $G$  als  $G \times G$ -Modul die direkte Summe aller  $E \otimes E^\vee$  ist ( $E$  durchläuft alle irreduziblen Darstellungen von  $G$ ), wird  $\Gamma(\mathcal{M}_G, \mathcal{L}_c)$  die direkte Summe der globalen Schnitte des Modulraums für  $\mathbb{P}^1$ , wobei aber in den Punkten  $x_i$  und  $y_i$  noch jeweils duale Paare von Darstellungen  $E_i$  und  $E_i^\vee$  einzusetzen sind. Die Summe wird endlich, da man sich auf die endlich vielen integrabilen Darstellungen beschränken kann. Diese Beschreibung ist im Wesentlichen korrekt, aber natürlich stark vereinfacht: Der Modulraum für die singuläre Kurve hat kein gutes Modell, Torsoren können schlechte Reduktion haben, man muss zur Lie-Algebra übergehen.

Die Auswertung der Verlinde-Formel wird besonders einfach für  $c = 1$  und  $G$  vom Typ ADE: Dann spielen nur miniskule Darstellungen eine Rolle. Zum Beispiel beim Typ  $E_8$  bleibt nur die triviale Darstellung übrig, man erhält für beliebige Kurven  $C$  dieselbe Dimension wie für den  $\mathbb{P}^1$ , und diese ist Eins. Allgemeiner ist die Dimension  $|Z|^g$ . Dies wird „erklärt“ durch die Operation von  $Z$ -Torsoren: Die Gruppe  $H^1(C, Z)$  operiert auf  $\mathcal{M}_G$  durch zentrale Twists. Jedes Gruppenelement respektiert individuell das Bündel  $\mathcal{L}_1$ , aber insgesamt operiert nur eine zentrale  $\mathbb{G}_m$ -Erweiterung von  $H^1(C, Z)$  darauf. Der Kommutator in dieser Erweiterung ist eine symplektische Form auf  $H^1(C, Z)$ , welche sich als nicht degeneriert herausstellt. Damit ist nach bekannten Sätzen („Stone“) jede Darstellung mit skalarer  $\mathbb{G}_m$ -Operation ein Vielfaches einer irreduziblen Darstellung der Dimension  $|Z|^g$ . Alles in allem realisiert somit  $\Gamma(\mathcal{M}_G, \mathcal{L}_1)$  die irreduzible Darstellung der zentralen Erweiterung, ist also „so klein wie möglich“.

Es bleibt das große offene Problem, solche globalen Schnitte geometrisch zu beschreiben. Zum Beispiel gibt es für  $G$  vom Typ  $E_8$  einen kanonisch definierten Divisor in  $\mathcal{M}_G$ , welcher die Nullstellenmenge des einzigen globalen Schnitts von  $\mathcal{L}_1$  ist. Was ist dieser Divisor? Eine Variante:

Betrachte die Gruppen  $G = \text{Spin}_{4n}$ . Deren Fundamentalgruppe ist  $Z = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ , besitzt also drei zyklische Untergruppen  $\mathbb{Z}/(2)$ . Zu jeder dieser Untergruppen gehört ein maximal isotroper Teilraum  $H^1(C, \mathbb{Z}/(2))$  in  $H^1(C, Z)$ , und damit eine Familie von globalen Schnitten in  $\Gamma(\mathcal{M}_G, \mathcal{L}_1)$ , welche Eigenvektoren (der projektiven Darstellung) unter diesem Teilraum sind. Zum Beispiel gehören zur diagonalen Untergruppe die Pfaff'schen Determinanten der Kohomologie von  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$ , wobei  $\mathcal{E}$  das tautologische orthogonale  $4n$ -Bündel auf  $C$  ist, und  $\mathcal{M}$  eine Theta-Charakteristik. Zu den zwei anderen  $\mathbb{Z}/(2)$ 's sollten Schnitte gehören, welche irgendetwas mit den zwei Spin-Darstellungen zu  $\mathcal{E}$  zu tun haben.

Zur Erinnerung:  $\text{Spin}_{4n}$  besitzt zwei irreduzible Spin-Darstellungen  $S^\pm$  der Dimension  $2^{2n-1}$ . Diese sind orthogonal für gerade  $n$  und symplektisch für ungerade  $n$ . Dies sind die zwei irreduziblen Darstellungen der geraden Elemente in der Clifford-Algebra  $C(E)$  zur orthogonalen Standard-Darstellung  $E$  der Dimension  $4n$ . Der gesuchte Schnitt zu  $S^+$  sollte die folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine Operation der 2-Torsion  $J[2]$  der Jacobi'schen von  $C$  auf  $G$ -Bündeln, welche das assoziierte Spin-Bündel  $S^+$  festlässt, aber  $\mathcal{E}$  (Bündel zu  $E$ ) mit einem Torsionsbündel tensorisiert. Unser Schnitt sollte unter dieser Operation ein Eigenvektor sein.

Falls  $C$  eine elliptische Kurve ist ( $g = 1$ ), so kann man den unbekannten Schnitt auch direkt analytisch angeben: Jedes polystabile  $G$ -Bündel ist induziert von einem  $T$ -Bündel. Man betrachte nun das Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{Q}^{2n}$ , welches aus allen Linearkombinationen  $\sum_i \lambda_i e_i$  besteht, für die die Koeffizienten  $\lambda_i$  der Standardbasis  $e_i$  in  $1/2\mathbb{Z}$  liegen, alle modulo  $\mathbb{Z}$  gleich sind, und die Summe  $\sum_i \lambda_i$  gerade ist. Die quadratische Form

$$q(\lambda) = \sum_i \lambda_i^2$$

ist ganzzahlig auf  $\Lambda$  (und gerade, wenn  $n$  durch vier teilbar ist). Sie liefert dann eine prinzipiale Polarisation auf  $C^{2n}$ , und in der Klasse dieser prinzipialen Polarisation vier symmetrische Geradenbündel, welche unter der Weil-Gruppe invariant sind. Die vier zugehörigen Theta-Divisoren unterscheiden sich durch Translationen mit einem Element aus  $C[2]$ . ( $C$  ist diagonal eingebettet in  $\Lambda \otimes C$ ). Was fehlt, ist eine geometrische Interpretation dieser Divisoren.

Für elliptische Kurven über den komplexen Zahlen kann man das wie folgt präzisieren: Für  $\tau$  in der oberen Halbebene betrachte die Theta-Reihe

$$\vartheta(\mathfrak{z}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \exp(\pi i \tau q(\lambda)) \exp(2\pi i < \lambda, \mathfrak{z} >).$$

Ihre Nullstellenmenge ist ein Divisor in  $C^{2n}$ ,  $C = \mathbb{C}/<1, \tau>$  die elliptische Kurve zu  $\tau$ . Was ist die geometrische Bedeutung dieses Divisors?

## 7 Die Hitchin-Faserung

Die Hitchin-Faserung ist ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung des Modulraums  $\mathcal{M}_G$ . Unter anderem erlaubt sie die Übertragung der bisherigen Resultate in positive Charakteristik. Unter Ignorieren kleiner Komplikationen (wie Stacks) kann man sie wie folgt beschreiben:

Betrachte den Raum  $\mathcal{M}_{G,\theta}$ , welcher Paare  $(P, \theta)$  klassifiziert, mit  $P$  ein  $G$ -Torsor auf  $C$ , und  $\theta \in \Gamma(C, \mathfrak{g}^P \otimes \omega_C)$  ein globaler Schnitt des assoziierten Bündels zur adjungierten Darstellung, tensoriert mit den Differentialen. Dies ist zum Einen ein Vektorbündel über  $\mathcal{M}_G$  und sogar das Kotangential-Bündel. Dies ergibt eine symplektische Struktur.

Zum anderen kann man  $\theta$  zuordnen die Werte der  $G$ -invarianten Funktionen auf  $\mathfrak{g}$ : Ist  $\phi$  eine solche vom Grad  $e$ , so ist  $\phi(e)$  ein globaler Schnitt von  $\omega_C^{\otimes e}$ . Zum Beispiel ist für  $G = SL_2$   $\theta$  ein  $\omega_C$ -wertiger Endomorphismus eines Geradenbündels vom Rang zwei, mit verschwindender Spur. Seine Determinante ist eine 2-Form. Angewandt auf ein System von Erzeugenden der Invarianten Funktionen erhält man eine zweite Abbildung von  $\mathcal{M}_G$ , diesmal mit Werten in einem affinen Raum  $Char$ . Dann sind alle Fasern maximale isotrope Unterschemata, und die Abbildung ist flach. Weiter ist die generische Faser ein homogener Raum unter einer Abel'schen Varietät. Insbesondere sind alle regulären Funktionen auf  $\mathcal{M}_{G,\theta}$  induziert von  $Char$ .

Zum Beispiel klassifiziert für die Gruppe  $G = SL_r \mathcal{M}_{G,\theta}$  Vektorbündel  $\mathcal{E}$ , vom Rang  $r$  und trivialer Determinante, zusammen mit einem Endomorphismus  $\theta \in \Gamma(C, \text{End}(\mathcal{E}) \otimes \omega_C)$  von verschwindender Spur. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von  $\theta$  liefern globale Schnitte in  $\Gamma(C, \omega_C^{\otimes i})$  ( $2 \leq i \leq r$ ), und  $Char$  ist die direkte Summe dieser globalen Schnitträume. Für generische Werte definiert das charakteristische Polynom von  $\theta$  eine Überlagerung  $D \rightarrow C$  vom Grad  $r$  mit glattem  $D$ , und die Faser von  $\mathcal{M}_{G,\theta}$  besteht aus Geradenbündeln  $\mathcal{M}$  auf  $D$ , deren Norm isomorph zu  $\omega_C^{\otimes r(r-1)/2}$  ist.

Die Hitchin-Faserung ist uns nützlich aus zwei Gründen: Zum Einen funktioniert sie auch in positiver Charakteristik  $p$ , vorausgesetzt, diese ist gut für  $G$ . „Gut“ heißt dabei, dass  $p$  nicht die Koeffizienten der maximalen Wurzel (geschrieben als Linearkombinationen der einfachen Wurzeln) teilt. Im ungünstigsten Fall ( $E_8$ ) schließt dies nur die Primzahlen 2, 3, 5 aus. Damit erhält man auch in positiver Charakteristik eine obere Abschätzung für die Dimension von  $\Gamma(\mathcal{M}_G, \mathcal{L}_1)$  und eine Ausdehnung der bisherigen Resultate.

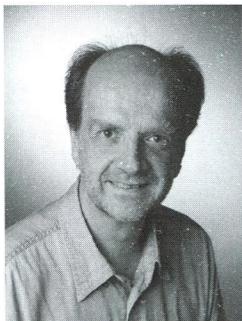
Zum anderen liefert die Hitchin-Faserung geometrische Divisoren auf  $\mathcal{M}_G$ : Die Faser von  $\mathcal{M}_{G,\theta}$  über  $0 \in Char$  hat dieselbe Dimension wie  $\mathcal{M}_G$ . Sie klassifiziert  $G$ -Torsoren  $P$  zusammen mit einem nilpotenten  $\theta \in \Gamma(C, \mathfrak{g}^P \otimes \omega_C)$ . Die Projektion auf  $\mathcal{M}_G$  ist invariant unter der  $\mathbb{G}_m$ -Operation, welche  $\theta$  durch skalare Vielfache ersetzt. Damit hat das Bild aller irreduziblen Komponenten, auf denen  $\theta$  nicht identisch verschwindet, Kodimension  $\geq 1$ , und man erwartet Kodimension 1. Dies liefert eine geometrische Konstruktion von Divisoren. (Technische Anmerkung: Die Konstruktion geometrisch definierter Divisoren ist nicht ganz einfach. Bei den meisten geometrisch induzierten Untervarietäten wird die erwartete Kodimension durch eine Riemann-Roch-Formel gegeben, und das Resultat ist üblicherweise durch  $g - 1$  teilbar.) Zu diesem Divisor gehört dann ein Geradenbündel  $\mathcal{L}_c$ , und man kann versuchen,  $c$  zu berechnen. Ein Beispiel:

Betrachte  $G$ -Torsoren  $P$  zusammen mit einem Schnitt  $0 \neq \theta \in \Gamma(C, \mathfrak{g}^P \otimes \omega_C)$ , welcher in jedem Punkt entweder verschwindet oder konjugiert zu einem Wurzelvektor ist. Dann liefert dies eine Invariante  $c = (2h^\vee)^g$ .

## Literatur

- [1] M. F. Atiyah, R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London A308 (1983), no 1505, 523–615
- [2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris 1968
- [3] V. Drinfeld, C. Simpson, *B-structures on  $G$ -bundles and local triviality*, Math. Res. Letters 2 (1995), 823–829
- [4] E. Esteves, M. Popa, *Effective very ampleness for generalized theta divisors*, Duke Math. J. 123(2004), 429–444
- [5] G. Faltings, *Stable  $C$ -bundles and projective connections*, Journ. of Algebr. Geom. 2 (1993), 507–568
- [6] G. Faltings, *A proof for the Verlinde formula*, Journ. of Algebr. Geom. 3 (1994), 347–374
- [7] G. Faltings, *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*, J. Eur. Math. Soc. 5 (2003), 41–68
- [8] N. J. Hitchin, *Stable bundles and integrable connections*, Duke Math. J. 54 (1987), 91–114
- [9] F. F. Knudsen, D. Mumford, *The projectivity of the space of stable curves I*, Math.Scand. 39 (1976), 19–55
- [10] R. W. Richardson, *Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups*, Ann. of Math. 86(1967), 1–15
- [11] C. Sorger, *On moduli of  $G$ -bundles on a curve for exceptional  $G$* , Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 32 (1999), 127–133
- [12] N. Spaltenstein, *Existence of transversal slices to nilpotent orbits in good characteristics*, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 31(1984), 283–286
- [13] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada, *Conformal field theories on universal families of stable curves with gauge symmetries*, Adv. Stud. Pure Math. 19 (1989), 459–566





# Existence and Multiplicity Proofs for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems by Computer Assistance

Michael Plum

## Abstract

- Mathematics Subject Classification: 35J25, 35J65, 65N15
- Keywords and Phrases: elliptic boundary value problem, semilinear, computer-assisted proof, existence, enclosures, error bounds, multiplicity

Many boundary value problems for semilinear elliptic partial differential equations allow very stable numerical computations of approximate solutions, but are still lacking analytical existence proofs. In the present article, we propose a method which exploits the knowledge of a “good” numerical approximate solution, in order to provide a rigorous proof of existence of an exact solution close to the approximate one. This goal is achieved by a fixed-point argument which takes all numerical errors into account, and thus gives a mathematical proof which is not “worse” than any purely analytical one. The method is used to prove existence and multiplicity statements for some specific examples, including cases where purely analytical methods had not been successful.

Eingegangen: 12.06.2007

Michael Plum, Institut für Analysis, Universität Karlsruhe (TH),  
Englerstraße 2, D-76128 Karlsruhe, [michael.plum@math.uni-karlsruhe.de](mailto:michael.plum@math.uni-karlsruhe.de)  
<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1plum/~plum/de>

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© B. G. Teubner 2008

# 1 Introduction

Semilinear elliptic differential equations of the form

$$-\Delta u(x) + f(x, u(x)) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (1)$$

(with  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  denoting some given domain, and  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  some given nonlinearity), together with boundary conditions, e. g. of Dirichlet type

$$u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \quad (2)$$

have been (and still are) extensively studied in the differential equations literature. Such *semilinear boundary value problems* have a lot of applications e. g. in Mathematical Physics, and often serve as model problems for more complex mathematical situations, and last but not least, they form a very exciting and challenging object for purely mathematical investigations. Starting perhaps with Picard's successive iterations at the end of the 19<sup>th</sup> century, various analytical methods and techniques have been (and are being) developed to study *existence* and *multiplicity* of solutions to problem (1), (2), such as variational methods (including mountain pass methods), index and degree theory, monotonicity methods, fixed-point methods, and more; see e. g. [2]–[6], [12]–[14], [18]–[21], [25, 26, 30, 31, 33, 34, 36], [39]–[41], [43, 44, 55, 61], and the references therein.

In this article, we want to report on a supplement to these purely analytical methods by a *computer-assisted* approach, which in the recent years has turned out to be successful with various examples where purely analytical methods have failed. In spite of many numerical calculations involved, the existence and multiplicity proofs given by our method are completely rigorous and not “worse” than any other proof. One might ask if (systematic or accidental) hardware errors could spoil the correctness of a computer-assisted proof, but the probability of the permanent occurrence of such errors can be made very small by use of different hardware platforms and by repeating the computations many times. Of course, some uncertainty concerning the correctness of the hardware actions or of the program codes remains, but is this uncertainty really larger than the uncertainty attached to a complex “theoretical” proof?

Recently, various mathematical problems have been solved by computer-assisted proofs, among them the Kepler conjecture, the existence of chaos, the existence of the Lorenz attractor, the famous four-colour problem, and more.

In many cases, computer-assisted proofs have the remarkable advantage (compared with a “theoretical” proof) of providing accurate *quantitative* information. Coming back to our approach concerning problem (1), (2), such quantitative information is given in form of tight and explicit *bounds* for the solution.

We start with an *approximate* solution  $\omega$  to (1), (2), which can be obtained by any numerical method which gives approximations in the function space needed (to be specified later). In this first step, there is no need for any mathematical rigor, and the field is open for the whole rich variety of modern numerics.

Next, we use a Newton-Cantorovich-type argument to prove the existence of a solution to (1), (2) in some “close” and “explicit” neighborhood of  $\omega$ . For this purpose, we

consider the boundary value problem for the *error*  $v = u - \omega$  and rewrite it as a fixed-point equation

$$v \in X, \quad v = Tv \quad (3)$$

in a Banach space  $X$ , which we treat by some fixed-point theorem. More precisely, we aim at Schauder's fixed-point theorem if compactness is available (which essentially requires the domain  $\Omega$  in (1) to be bounded), or at Banach's fixed-point theorem (if we are ready to accept an additional contraction condition; see (17) below). The existence of a solution  $v^*$  of (3) in some suitable set  $V \subset X$  then follows from the fixed-point theorem, provided that

$$TV \subset V. \quad (4)$$

Consequently,  $u^* := \omega + v^*$  is a solution of (1), (2) (which gives the desired existence result), and the statement " $u^* \in \omega + V$ " (implied by  $v^* \in V$ ) gives the desired bounds, or enclosures, for  $u^*$ .

So the crucial condition to be verified, for some suitable set  $V$ , is (4). Restricting ourselves to *norm balls*  $V$  (centered at the origin), we find that (4) results in an inequality involving the radius of  $V$ , and various other terms generated by the "data" of our problem (1), and by the numerical approximation  $\omega$ . All these terms are *computable*, either directly or via additional computer-assisted means (like the eigenvalue bounds discussed briefly in Section 3.3). In these computations (in contrast to the computation of  $\omega$  mentioned above), all possible numerical errors have to be taken into account, in order to be able to check the aforementioned inequality (implying (4)) with mathematical rigor. For example, remainder term bounds need to be computed when quadrature formulas are applied, and interval arithmetic [35, 57] is needed to take rounding errors into account.

Computer-assisted means for obtaining enclosures for solutions to elliptic partial differential equations have been proposed by Collatz [16, 17] already more than 50 years ago. He used maximum-principle-type arguments to obtain two-sided bounds for the error function  $u - \omega$ , with  $\omega$  denoting a numerical  $C^2$ -approximation. Schröder [58]–[60], Walter [62] and others generalized these ideas, which resulted in the method of *differential inequalities*. It was successfully applied to many examples with first or second order ordinary differential equations, or with second order elliptic or parabolic differential equations. However, there are drawbacks of differential inequalities methods concerning the size of the class of problems (1), (2) to which they can be applied: At least for obtaining "tight" solution enclosures, all eigenvalues of the linearization  $L$  of (1), (2) at  $\omega$  need to be *positive*, which excludes many interesting situations. Furthermore, differential inequalities techniques are essentially restricted to first- and second-order problems (with the exception of some fourth-order problems which can be handled as second-order systems). In contrast, the enclosure method proposed in this article requires the eigenvalues of the linearization  $L$  to be *non-zero* only (which is checked by *eigenvalue enclosures*), and at least in principle it can be used for elliptic problems of any (even) order; see also the remarks at the end of Section 2.

An existence and enclosure method similar to ours has been developed by Nakao and his group [46]–[48]. This approach avoids the computation of eigenvalue enclosures for  $L$ , which constitutes a significant advantage in some cases. Instead, a finite-dimensional *projection* of  $L$  is used, and treated by well-established means of verifying numerical linear algebra. However, also the (infinite-dimensional) *projection error* needs to be bounded in a suitable way, which is well possible for “simple” domains  $\Omega$ , but problematic e. g. for unbounded domains.

Another more recent approach is based on the Conley index and the numerical verification of corresponding topological conditions; it is suited for proving the existence of stationary solutions for certain classes of problems, as well as for detecting global dynamics (see e. g. [22, 29]).

For *ordinary* differential equation problems (possibly originating from a partial differential equation after symmetry reductions), many existence and enclosure methods can be found in the literature, which we will not address in this article.

## 2 Abstract formulation

It turns out to be useful to explain the basics of our computer-assisted approach first for the following abstract problem:

$$\text{Find } u \in X \text{ satisfying } \mathcal{F}(u) = 0, \quad (5)$$

with  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  and  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  denoting two real Hilbert spaces, and  $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$  some Fréchet differentiable mapping.

Let  $\omega \in X$  denote some *approximate* solution to (5) (computed e.g. by numerical means), and

$$L := \mathcal{F}'(\omega) : X \rightarrow Y \quad (6)$$

the Fréchet derivative of  $\mathcal{F}$  at  $\omega$ , i.e.  $L \in \mathcal{B}(X, Y)$  (the Banach space of all bounded linear operators from  $X$  to  $Y$ ), and

$$\lim_{\substack{h \in X \setminus \{0\} \\ h \rightarrow 0}} \frac{1}{\|h\|_X} \|\mathcal{F}(\omega + h) - \mathcal{F}(\omega) - L[h]\|_Y = 0.$$

Suppose that we know constants  $\delta$  and  $K$ , and a non-decreasing function  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  such that

$$\|\mathcal{F}(\omega)\|_Y \leq \delta, \quad (7)$$

i.e.  $\delta$  bounds the *defect* (residual) of the approximate solution  $\omega$  to (5),

$$\|u\|_X \leq K \|L[u]\|_Y \text{ for all } u \in X, \quad (8)$$

i.e.  $K$  bounds the *inverse* of the linearization  $L$ ,

$$\|\mathcal{F}'(\omega + u) - \mathcal{F}'(\omega)\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \leq g(\|u\|_X) \text{ for all } u \in X, \quad (9)$$

i.e.  $g$  majorizes the modulus of continuity of  $\mathcal{F}'$  at  $\omega$ , and

$$g(t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0 \quad (10)$$

(which in particular requires  $\mathcal{F}'$  to be continuous at  $\omega$ ).

The concrete computation of such  $\delta, K$ , and  $g$  is the main challenge in our approach, with particular emphasis on  $K$ . We will however not address these questions in this section, i.e. on the abstract level, but postpone them to the more specific case of the boundary value problem (1), (2), to be treated in the following sections. For now, we assume that (7)–(10) hold true.

In order to obtain a suitable fixed-point formulation (3) for our problem (5), we will need that the operator  $L$  is *onto*. (Note that  $L$  is one-to-one by (8).) For this purpose, we propose two alternative ways, both suited for the later treatment of problem (1), (2).

1) “*The compact case*”. Suppose that  $\mathcal{F}$  admits a splitting

$$\mathcal{F} = L_0 + \mathcal{G} \quad (11)$$

with a *bijective* linear operator  $L_0 \in \mathcal{B}(X, Y)$  and a *compact* and Fréchet differentiable operator  $\mathcal{G} : X \rightarrow Y$  with compact Fréchet derivative  $\mathcal{G}'(\omega)$ .

Noting that  $L_0^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$  by the Open Mapping Theorem, we find that the linear operator

$$L_0^{-1} \mathcal{G}'(\omega) : X \rightarrow X \text{ is compact.}$$

Moreover, since  $L = L_0 + \mathcal{G}'(\omega)$  by (11), we have the equivalence

$$L[u] = r \Leftrightarrow u + (L_0^{-1} \mathcal{G}'(\omega))[u] = L_0^{-1}[r] \quad (12)$$

for every  $u \in X, r \in Y$ . Fredholm’s Alternative Theorem for compact linear operators tells us that the equation on the right of (12) has a unique solution  $u \in X$  for every  $r \in Y$ , provided that the homogeneous equation ( $r = 0$ ) admits only the trivial solution  $u = 0$ . By the equivalence (12), the same is true for the equation  $L[u] = r$ . Since the homogeneous equation  $L[u] = 0$  indeed admits only the trivial solution by (8),  $L$  is therefore onto.

2) “*The dual and symmetric case*”. Suppose that  $Y = X'$ , the (topological) *dual* of  $X$ , i.e. the space of all bounded linear functionals  $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $X' (= \mathcal{B}(X, \mathbb{R}))$  is a Banach space endowed with the usual operator sup-norm. Indeed, this norm is generated by an inner product (which therefore makes  $X'$  a Hilbert space) as explained in the following: Consider the linear mapping  $\Phi : X \rightarrow X'$  given by

$$(\Phi[u])[v] := \langle u, v \rangle_X \quad (u, v \in X). \quad (13)$$

For all  $u \in X$ ,

$$\|\Phi[u]\|_{X'} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{|(\Phi[u])[v]|}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, v \rangle_X|}{\|v\|_X} = \|u\|_X,$$

i.e.  $\Phi$  is an *isometry* (and hence one-to-one).

Furthermore,  $\Phi$  is *onto* by Riesz' representation theorem for bounded linear functionals on a Hilbert space: Given any  $r \in X'$ , some (unique)  $u \in X$  exists such that  $r[v] = \langle u, v \rangle_X$  for all  $v \in X$ , i.e.  $\Phi[u] = r$  by (13).  $\Phi$  is therefore called the *canonical isometric isomorphism* between  $X$  and  $X'$ . It immediately gives an inner product on  $X'$  by

$$\langle r, s \rangle_{X'} := \langle \Phi^{-1}[r], \Phi^{-1}[s] \rangle_X \quad (r, s \in X'), \quad (14)$$

and the norm generated by this inner product is the “old” norm  $\| \cdot \|_{X'}$ , because  $\Phi$  is isometric.

In theoretical functional analysis, the Hilbert spaces  $X$  and  $X'$  are often identified via the isometric isomorphism  $\Phi$ , i.e. they are not distinguished, which however we will *not* do because this might lead to confusion when  $X$  is a Sobolev function space, as it will be later.

To ensure that  $L : X \rightarrow Y = X'$  is onto, we make the additional assumption that  $\Phi^{-1}L : X \rightarrow X$  is *symmetric* with respect to  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ , which by (13) amounts to the relation

$$(L[u])[v] = (L[v])[u] \text{ for all } u, v \in X. \quad (15)$$

This implies the denseness of the range  $(\Phi^{-1}L)(X) \subset X$ : Given any  $u$  in its orthogonal complement, we have, for all  $v \in X$ ,

$$0 = \langle u, (\Phi^{-1}L)[v] \rangle_X = \langle (\Phi^{-1}L)[u], v \rangle_X,$$

and hence  $(\Phi^{-1}L)[u] = 0$ , which implies  $L[u] = 0$  and thus  $u = 0$  by (8).

Therefore, since  $\Phi$  is isometric, the range  $L(X) \subset X'$  is *dense*. For proving that  $L$  is onto, we are therefore left to show that  $L(X) \subset X'$  is *closed*. For this purpose, let  $(L[u_n])_{n \in \mathbb{N}}$  denote some sequence in  $L(X)$  converging to some  $r \in X'$ . Then (8) shows that  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a Cauchy sequence in  $X$ . With  $u \in X$  denoting its limit, the boundedness of  $L$  implies  $L[u_n] \rightarrow L[u](n \rightarrow \infty)$ . Thus,  $r = L[u] \in L(X)$ , which proves closedness of  $L(X)$ .

We are now able to formulate and prove our main theorem, which is similar to the Newton-Cantorovich-Theorem:

**Theorem 1:** *Let  $\delta, K, g$  satisfy conditions (7)–(10). Suppose that some  $\alpha > 0$  exists such that*

$$\delta \leq \frac{\alpha}{K} - G(\alpha), \quad (16)$$

where  $G(t) := \int_0^t g(s)ds$ . Moreover, suppose that

- 1) “the compact case” is at hand,  
or
- 2) “the dual and symmetric case” is at hand, and the additional condition

$$Kg(\alpha) < 1 \quad (17)$$

holds true.

Then, there exists a solution  $u \in X$  of the equation  $\mathcal{F}(u) = 0$  satisfying

$$\|u - \omega\|_X \leq \alpha. \quad (18)$$

**Remark 1:** a) Due to (10),  $G(t) = \int_0^t g(s)ds$  is *superlinearly* small as  $t \rightarrow 0$ . Therefore, the crucial condition (16) is indeed satisfied for some “small”  $\alpha$  if  $K$  is “moderate” (i.e. not too large) and  $\delta$  is sufficiently small, which means according to (7) that the approximate solution  $\omega$  to problem (5) must be computed with *sufficient accuracy*, and (16) tells us *how* accurate the computation has to be. This meets the general philosophy of computer-assisted proofs: The “hard work” of the proof is left to the computer!

b) For proving Theorem 1, we will use the (abstract) *Green’s operator*  $L^{-1}$  to re-formulate problem (5) as a fixed-point equation, and apply some fixed-point theorem. If the space  $X$  were finite-dimensional, *Brouwer’s Fixed-Point Theorem* would be most suitable for this purpose. In the application to differential equation problems like (1), (2), however,  $X$  has to be infinite-dimensional, whence *Brouwer’s Theorem* is not applicable. We have two choices: i) Either we can use the generalization of *Brouwer’s Theorem* to infinite-dimensional spaces, i. e. *Schauder’s Fixed-Point-Theorem*, which explicitly requires additional compactness properties (holding automatically in the finite-dimensional case). In our application to (1), (2) discussed later, this compactness is given by compact embeddings of Sobolev function spaces, provided that the domain  $\Omega$  is bounded (or at least has finite measure). Since we want to include unbounded domains in our consideration, too, we make also use of the second option: ii) We can use *Banach’s Fixed-Point Theorem*. No compactness is needed then, but instead an additional contraction condition (which is condition (17)) is required. Due to (10), this condition is however not too critical if  $\alpha$  (computed according to (16)) is “small”.

*Proof of Theorem 1.* We rewrite problem (5) as

$$L[u - \omega] = -\mathcal{F}(\omega) - \{\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(\omega) - L[u - \omega]\},$$

which due to the bijectivity of  $L$  amounts to the equivalent fixed-point equation

$$v \in X, \quad v = -L^{-1}[\mathcal{F}(\omega) + \{\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\omega) - L[v]\}] =: T(v) \quad (19)$$

for the error  $v = u - \omega$ .

Now we are going to show the following properties of the fixed-point operator  $T : X \rightarrow X$ :

- i)  $T(V) \subset V$  for the closed, bounded, non-empty, and convex norm ball  
 $V := \{v \in X : \|v\|_X \leq \alpha\}$ ,
- ii)  $T$  is continuous and compact (in case 1)) or contractive on  $V$  (in case 2)), respectively.

Then, *Schauder’s Fixed-Point Theorem* (in case 1)) or *Banach’s Fixed-Point Theorem* (in case 2)), respectively, gives a solution  $v^* \in V$  of the fixed-point equation (19), whence by construction  $u^* := \omega + v^*$  is a solution of  $\mathcal{F}(u) = 0$  satisfying (18).

For proving i) and ii), we first note that for every differentiable function  $f : [0, 1] \rightarrow Y$ , the real-valued function  $\|f\|_Y$  is differentiable almost everywhere on  $[0, 1]$ , and  $(d/dt)\|f\|_Y \leq \|f'\|_Y$  a.e. on  $[0, 1]$ . Hence, for every  $v, \tilde{v} \in X$ ,

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{F}(\omega + v) - \mathcal{F}(\omega + \tilde{v}) - L[v - \tilde{v}]\|_Y \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \|\mathcal{F}(\omega + (1-t)\tilde{v} + tv) - \mathcal{F}(\omega + \tilde{v}) - tL[v - \tilde{v}]\|_Y dt \\
&\leq \int_0^1 \|\{\mathcal{F}'(\omega + (1-t)\tilde{v} + tv) - L\}[v - \tilde{v}]\|_Y dt \\
&\leq \int_0^1 \|\mathcal{F}'(\omega + (1-t)\tilde{v} + tv) - L\|_{\mathcal{B}(X, Y)} dt \cdot \|v - \tilde{v}\|_X \\
&\leq \int_0^1 g(\|(1-t)\tilde{v} + tv\|_X) dt \cdot \|v - \tilde{v}\|_X,
\end{aligned} \tag{20}$$

using (6) and (9) in the last step. Choosing  $\tilde{v} = 0$  in (20) we obtain, for each  $v \in X$ ,

$$\|\mathcal{F}(\omega + v) - \mathcal{F}(\omega) - L[v]\|_Y \leq \int_0^1 g(t\|v\|_X) dt \cdot \|v\|_X = \int_0^{\|v\|_X} g(s) ds = G(\|v\|_X). \tag{21}$$

Furthermore, (20) and the fact that  $g$  is non-decreasing imply, for all  $v, \tilde{v} \in V$ ,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(\omega + v) - \mathcal{F}(\omega + \tilde{v}) - L[v - \tilde{v}]\|_Y &\leq \int_0^1 g((1-t)\|\tilde{v}\|_X + t\|v\|_X) dt \cdot \|v - \tilde{v}\|_X \\
&\leq g(\alpha)\|v - \tilde{v}\|_X.
\end{aligned} \tag{22}$$

To prove i), let  $v \in V$ , i.e.  $\|v\|_X \leq \alpha$ . Now (19), (8), (7), (21), and (16) imply

$$\begin{aligned}
\|T(v)\|_X &\leq K\|\mathcal{F}(\omega) + \{\mathcal{F}(\omega + v) - \mathcal{F}(\omega) - L[v]\}\|_Y \\
&\leq K(\delta + G(\|v\|_X)) \leq K(\delta + G(\alpha)) \leq \alpha,
\end{aligned}$$

which gives  $T(v) \in V$ . Thus,  $T(V) \subset V$ .

For proving ii), suppose first that “the compact case” is at hand. So (11), which in particular gives  $L = L_0 + \mathcal{G}'(\omega)$ , and (19) imply

$$T(v) = -L^{-1}[\mathcal{F}(\omega) + \{\mathcal{G}(\omega + v) - \mathcal{G}(\omega) - \mathcal{G}'(\omega)[v]\}] \text{ for all } v \in X,$$

whence continuity and compactness of  $T$  follow from continuity and compactness of  $\mathcal{G}$  and  $\mathcal{G}'(\omega)$ , and the boundedness of  $L^{-1}$  ensured by (8).

If the “dual and symmetric case” is at hand, (19), (8), and (22) imply, for  $v, \tilde{v} \in V$ ,

$$\begin{aligned}
\|T(v) - T(\tilde{v})\|_X &= \|L^{-1}\{\mathcal{F}(\omega + v) - \mathcal{F}(\omega + \tilde{v}) - L[v - \tilde{v}]\}\|_X \\
&\leq K\|\mathcal{F}(\omega + v) - \mathcal{F}(\omega + \tilde{v}) - L[v - \tilde{v}]\|_Y \leq Kg(\alpha)\|v - \tilde{v}\|_X,
\end{aligned}$$

whence (17) shows that  $T$  is contractive on  $V$ . This completes the proof of Theorem 1.  $\square$

In the following two sections, we will apply the abstract approach developed in this section to the elliptic boundary value problem (1), (2). This can be done in (essentially two) different ways, i.e. by different choices of the Hilbert spaces  $X$  and  $Y$ , resulting in different general assumptions (e.g. smoothness conditions) to be made for the “data” of

the problem and the numerical approximation  $\omega$ , and different conditions (7)–(9), (16), (17), as well as different “results”, i.e. existence statements and error bounds (18).

At this point, we want to report briefly on some other applications of our abstract setting which we cannot discuss in more detail in this article.

For *parameter-dependent problems* (where  $\mathcal{F}$  in (5), or  $f$  in (1), depends on an additional parameter  $\lambda$ ), one is often interested in *branches*  $(u_\lambda)_{\lambda \in I}$  of solutions. By additional perturbation techniques, our method can indeed be generalized to computer-assisted proofs for such solution branches, as long as the parameter-interval  $I$  defining the branch is compact [51]. Such branches may however contain *turning points* (where a branch “returns” at some value  $\lambda^*$ ) or *bifurcation points* (where several – usually two – branches cross each other). Near such points, the operator  $L$  defined in (6) is “almost” singular, i.e. (8) holds only with a very large  $K$ , or not at all, which makes our approach break down. However, there are means to overcome these problems:

In case of (simple) turning points, the well-known method of augmenting the given equation by a *bordering* equation can also be used here; the “new” operator  $\mathcal{F}$  in (5) contains the “old” one *and* the bordering functional, and the “new” operator  $L$  is regular near the turning point if the bordering equation has been chosen appropriately [50].

In case of (simple) symmetry-breaking bifurcations, we can, in a first step, include the symmetry in the spaces  $X$  and  $Y$ , which excludes the symmetry-breaking branch and regularizes the problem, whence an existence and enclosure result for the symmetric branch can be obtained. In a second step, we exclude the symmetric branch by some transformation (similar to the Lyapunov-Schmidt reduction), and defining a corresponding new operator  $\mathcal{F}$  we can perform our method to obtain an existence and enclosure result also for the symmetry-breaking branch [52].

*Non-selfadjoint eigenvalue problems* have been treated in [38], again using bordering equation techniques normalizing the unknown eigenfunction. So  $\mathcal{F}$  now acts on pairs  $(u, \lambda)$ , and is defined via the eigenvalue equation and the (scalar) normalizing equation. In this way, we were able to give the first known instability proof of the Orr-Sommerfeld equation with Blasius profile, which is a fourth-order ODE eigenvalue problem on  $[0, \infty)$ .

Also (other) *higher order* problems are covered by our abstract setting. In [11], we could prove the existence of 36 travelling wave solutions of a fourth-order nonlinear beam equation on the real line. Biharmonic problems (with  $\Delta\Delta u$  as leading term) are presently investigated by B. Fazekas; see also [23].

### 3 Strong solutions

Now we study the elliptic boundary value problem (1), (2) under the additional assumptions that  $f$  and  $\partial f / \partial y$  are continuous on  $\bar{\Omega} \times \mathbb{IR}$ , and that the domain  $\Omega \subset \mathbb{IR}^n$  (with  $n \leq 3$ ) is *bounded* with Lipschitz boundary, and  *$H^2$ -regular* (i.e., for each  $r \in L^2(\Omega)$ , the Poisson problem  $-\Delta u = r$  in  $\Omega$ ,  $u = 0$  on  $\partial\Omega$  has a unique solution  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ).

Here and in the following,  $L^2(\Omega)$  denotes the Hilbert space of all (equivalence classes of) square-integrable Lebesgue-measurable functions on  $\Omega$ , endowed with the inner product

$$\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} uv \, dx,$$

and  $H^k(\Omega)$  is the Sobolev space of all functions  $u \in L^2(\Omega)$  with weak derivatives up to order  $k$  in  $L^2(\Omega)$ .  $H^k(\Omega)$  is a Hilbert space with the inner product

$$\langle u, v \rangle_{H^k} := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq k}} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2},$$

and it can also be characterized as the completion of  $C^\infty(\bar{\Omega})$  with respect to  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k}$ . If we replace here  $C^\infty(\bar{\Omega})$  by  $C_0^\infty(\Omega)$  (with the subscript 0 indicating compact support in  $\Omega$ ), we obtain, by completion, the Sobolev space  $H_0^k(\Omega)$ , which incorporates the vanishing of all derivatives up to order  $k-1$  on  $\partial\Omega$  in a weak sense.

We note that *piecewise  $C^k$ -smooth* functions  $u$  (e.g. form functions of Finite Element methods) belong to  $H^k(\Omega)$  if and only if they are (globally) in  $C^{k-1}(\bar{\Omega})$ .

Our assumption that  $\Omega$  is  $H^2$ -regular is satisfied e.g. for  $C^2$ - (or  $C^{1,1}$ -)smoothly bounded domains (see e.g. [27]), and also for *convex* polygonal domains  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  [28]; it is *not* satisfied e.g. for domains with re-entrant corners, like the *L*-shaped domain  $(-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$ .

Under the assumptions made, we can choose the spaces

$$X := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad Y := L^2(\Omega), \quad (23)$$

and the operators

$$\mathcal{F} := L_0 + \mathcal{G}, \quad L_0[u] := -\Delta u, \quad \mathcal{G}(u) := f(\cdot, u), \quad (24)$$

whence indeed our problem (1), (2) amounts to the abstract problem (5). Moreover,  $L_0 : X \rightarrow Y$  is bijective by the assumed unique solvability of the Poisson problem, and clearly bounded, i.e. in  $\mathcal{B}(X, Y)$ . Finally,  $\mathcal{G} : X \rightarrow Y$  is Fréchet differentiable with derivative given by

$$\mathcal{G}'(u)[v] = \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u)v, \quad (25)$$

which follows from the fact that  $\mathcal{G}$  has this derivative as an operator from  $C(\bar{\Omega})$  (endowed with the maximum norm  $\|\cdot\|_\infty$ ) into itself, and that the embeddings  $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$  and  $C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  are bounded. In fact,  $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$  is even a *compact* embedding by the famous Sobolev-Kondrachev-Rellich Embedding Theorem [1] (and since  $n \leq 3$ ), which shows that  $\mathcal{G}$  and  $\mathcal{G}'(u)$  (for any  $u \in X$ ) are compact. Thus, “the compact case” (see (11)) is at hand.

For the application of Theorem 1, we are therefore left to comment on the computation of constants  $\delta$  and  $K$ , and a function  $g$  which satisfy (7)–(10) (in the setting (23), (24)). But first, some comments on the computation of the approximate solution  $\omega$  should be made.

### 3.1 Computation of $\omega$

Since  $\omega$  is required to be in  $X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , it has to satisfy the boundary condition *exactly* (in the sense of being in  $H_0^1(\Omega)$ ), and it needs to have weak derivatives in  $L^2(\Omega)$  up to order 2. If Finite Elements shall be used, this implies the need for  $C^1$ -elements (i.e. *globally*  $C^1$ -smooth Finite Element basis functions), which is a drawback at least on a technical level. (In the alternative approach proposed in the next section, this drawback is avoided.) If  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  is a *rectangle*, there are however many alternatives to Finite Elements, for example polynomial or trigonometric polynomial basis functions. E.g. in the latter case,  $\omega$  is put up in the form

$$\omega(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} \sin\left(i\pi \frac{x_1}{a}\right) \sin\left(j\pi \frac{x_2}{b}\right), \quad (26)$$

with coefficients  $\alpha_{ij}$  to be determined by some numerical procedure. Such a procedure usually consists of a Newton iteration, together with e.g. a Ritz-Galerkin or a collocation method, and some linear algebraic system solver, which possibly incorporates multigrid methods. To *start* the Newton iteration, a rough initial approximation is needed, which can e.g. be obtained by path-following methods, or by use of the numerical mountain pass algorithm proposed in [15].

An important remark is that, no matter how  $\omega$  is put up or which numerical method is used, there is *no* need for any *rigorous* (i.e. error free) computation at this stage, i.e. the whole variety of numerical methods is at hand.

### 3.2 Defect bound $\delta$

Computing some  $\delta$  satisfying (7) means, due to (23) and (24), computing an upper bound for (the square root of)

$$\int_{\Omega} [-\Delta\omega + f(\cdot, \omega)]^2 dx \quad (27)$$

(which should be “small” if  $\omega$  is a “good” approximate solution). In some cases this integral can be calculated in closed form, by hand or by computer algebra routines, for example if  $f$  is polynomial and  $\omega$  is piecewise polynomial (as it is if Finite Element methods have been used to compute it), or if  $f(x, \cdot)$  is polynomial and both  $f(\cdot, y)$  and  $\omega$  are trigonometric polynomial (compare (26)). The resulting formulas have to be evaluated *rigorously*, to obtain a true upper bound for the integral in (27). For this purpose, *interval arithmetic* [35, 57] must be used in this evaluation, in order to take rounding errors into account.

If closed form integration is impossible, a *quadrature formula* should be applied, possibly piecewise, to the integral in (27), again with evaluation in interval arithmetic. To obtain a true upper bound for the integral, we need in addition a *remainder term bound* for the quadrature formula, which usually requires rough  $\|\cdot\|_{\infty}$ -bounds for some

higher derivatives of the integrand. Such rough bounds can be obtained e.g. by subdividing  $\Omega$  into (many) small boxes, and performing interval evaluations of the needed higher derivatives over each of these boxes (which gives true supersets of the function value ranges over each of the boxes, and thus, by union, over  $\Omega$ ).

### 3.3 Bound $K$ for $L^{-1}$

The next task is the computation of a constant  $K$  satisfying (8), which due to (23)–(25) means

$$\|u\|_{H^2} \leq K \|L[u]\|_{L^2} \text{ for all } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (28)$$

where  $L : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  is given by

$$L[u] = -\Delta u + cu, \quad c(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x)) \quad (x \in \bar{\Omega}). \quad (29)$$

The first (and most crucial) step towards (28) is the computation of a constant  $K_0$  such that

$$\|u\|_{L^2} \leq K_0 \|L[u]\|_{L^2} \text{ for all } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (30)$$

Choosing some constant lower bound  $\underline{c}$  for  $c$  on  $\bar{\Omega}$ , and using the compact embedding  $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , we find by standard means that  $(L - \underline{c})^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  is compact, symmetric, and positive definite, and hence has a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ -orthonormal and complete system  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  of eigenfunctions  $\varphi_k \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , with associated sequence  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  of (positive) eigenvalues converging monotonically to 0. Consequently,  $L[\varphi_k] = \lambda_k \varphi_k$  for  $k \in \mathbb{N}$ , with  $\lambda_k = \mu_k^{-1} + \underline{c}$  converging monotonically to  $+\infty$ . Series expansion yields, for every  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \|L[u]\|_{L^2}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle L[u], \varphi_k \rangle_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, L[\varphi_k] \rangle_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \langle u, \varphi_k \rangle_{L^2}^2 \\ &\geq \left( \min_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^2 \right) \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle_{L^2}^2 = \left( \min_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^2 \right) \|u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

which shows that (30) holds if (and only if)  $\lambda_j \neq 0$  for all  $j \in \mathbb{N}$ , and

$$K_0 \geq \left( \min_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j| \right)^{-1}. \quad (31)$$

Thus, bounds for the eigenvalue(s) of  $L$  neighboring 0 are needed to compute  $K_0$ . Such *eigenvalue bounds* can be obtained by computer-assisted means of their own. For example, *upper* bounds to  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  (with  $N \in \mathbb{N}$  given) are easily and efficiently computed by the *Rayleigh-Ritz* method [56]:

Let  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  denote linearly independent trial functions, for example approximate eigenfunctions obtained by numerical means, and form the matrices

$$A_1 := (\langle L[\tilde{\varphi}_i], \tilde{\varphi}_j \rangle_{L^2})_{i,j=1,\dots,N}, \quad A_0 := (\langle \tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j \rangle_{L^2})_{i,j=1,\dots,N}.$$

Then, with  $\Lambda_1 \leq \dots \leq \Lambda_N$  denoting the eigenvalues of the matrix eigenvalue problem

$$A_1 x = \Lambda A_0 x$$

(which can be enclosed by means of verifying numerical linear algebra; see [8]), the Rayleigh-Ritz method gives

$$\lambda_i \leq \Lambda_i \text{ for } i = 1, \dots, N.$$

However, for computing  $K_0$  via (31), also *lower* eigenvalue bounds are needed, which constitute a more complicated task than *upper* bounds. The most accurate method for this purpose has been proposed by Lehmann [42], and improved by Goerisch concerning its range of applicability [9]. Its numerical core is again (as in the Rayleigh-Ritz method) a matrix eigenvalue problem, but the accompanying analysis is more involved. In most cases, the Lehmann-Goerisch method must be combined with a *homotopy* method connecting the given eigenvalue problem to a simple “base” problem with known eigenvalues. A detailed description of these methods would be beyond the scope of this article. Instead, we refer to [53] for more details.

Once a constant  $K_0$  satisfying (30) is known, the desired constant  $K$  (satisfying (28)) can relatively easily be calculated by explicit *a priori estimates*: With  $\underline{c}$  denoting a constant lower bound for  $c$ , we obtain by partial integration, for each  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{L^2} \|L[u]\|_{L^2} \geq \langle u, L[u] \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + cu^2) dx \geq \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \underline{c} \|u\|_{L^2}^2,$$

which implies, together with (30), that

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq K_1 \|L[u]\|_{L^2}, \text{ where } K_1 := \begin{cases} \sqrt{K_0(1 - \underline{c}K_0)} & \text{if } \underline{c}K_0 \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2\sqrt{\underline{c}}} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (32)$$

To complete the  $H^2$ -bound required in (28), we need to estimate the  $L^2$ -norm of the (Frobenius matrix norm of the) Hessian matrix  $u_{xx}$  of  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . If  $\Omega$  is convex (as we shall assume now), we have

$$\|u_{xx}\|_{L^2} \leq \|\Delta u\|_{L^2} \text{ for all } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad (33)$$

(see e.g. [28, 37]); for the non-convex case, we refer to [28, 49]. Now, with  $\bar{c}$  denoting an additional upper bound for  $c$ , we choose  $\mu := \max\{0, \frac{1}{2}(\underline{c} + \bar{c})\}$ , and calculate

$$\|\Delta u\|_{L^2} \leq \| -\Delta u + \mu u \|_{L^2} \leq \|L[u]\|_{L^2} + \|\mu - c\|_{\infty} \|u\|_{L^2}.$$

Using that  $\|\mu - c\|_{\infty} = \max\{-\underline{c}, \frac{1}{2}(\bar{c} - \underline{c})\}$ , and combining with (30), we obtain

$$\|\Delta u\|_{L^2} \leq K_2 \|L[u]\|_{L^2}, \text{ where } K_2 := 1 + K_0 \max\{-\underline{c}, \frac{1}{2}(\bar{c} - \underline{c})\}. \quad (34)$$

Now, (30), (32), (34) give (28) as follows. For quantitative purposes, we use the modified inner product

$$\langle u, v \rangle_{H^2} := \gamma_0 \langle u, v \rangle_{L^2} + \gamma_1 \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + \gamma_2 \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{L^2} \quad (35)$$

(with positive weights  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ) on  $X$ , which due to (33) (and to the obvious reverse in-

equality  $\|\Delta u\|_{L^2} \leq \sqrt{n}\|u_{xx}\|_{L^2}$  is equivalent to the canonical one. Then, (28) obviously holds for

$$K := \sqrt{\gamma_0 K_0^2 + \gamma_1 K_1^2 + \gamma_2 K_2^2}, \quad (36)$$

with  $K_0, K_1, K_2$  from (30), (32), (34).

### 3.4 Local Lipschitz bound $g$ for $\mathcal{F}'$

By (23), (24), and (25), condition (9) reads

$$\left\| \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \omega + u) - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \omega) \right] v \right\|_{L^2} \leq g(\|u\|_{H^2}) \|v\|_{H^2} \text{ for all } u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (37)$$

We start with a monotonically non-decreasing function  $\tilde{g} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  satisfying

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x) + y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x)) \right| \leq \tilde{g}(|y|) \text{ for all } x \in \Omega, y \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

and  $\tilde{g}(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow 0+$ . In practice, such a function  $\tilde{g}$  can usually be calculated by hand, if a bound for  $\|\omega\|_\infty$  is available, which in turn can be computed by interval evaluations of  $\omega$  over small boxes (as described at the end of Subsection 3.2).

Using  $\tilde{g}$ , the left-hand side of (37) can be bounded by

$$\tilde{g}(\|u\|_\infty) \|v\|_{L^2}, \quad (39)$$

whence we are left to estimate both the norms  $\|\cdot\|_{L^2}$  and  $\|\cdot\|_\infty$  by  $\|\cdot\|_{H^2}$ . With  $\rho^*$  denoting the smallest eigenvalue of

$$-\Delta u = \rho u, \quad u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

we obtain by eigenfunction expansion that

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \langle u, -\Delta u \rangle_{L^2} \geq \rho^* \|u\|_{L^2}^2, \quad \|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq (\rho^*)^2 \|u\|_{L^2}^2,$$

and thus, by (35),

$$\|u\|_{L^2} \leq [\gamma_0 + \gamma_1 \rho^* + \gamma_2 (\rho^*)^2]^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2} \text{ for all } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (40)$$

Furthermore, in [49, Corollary 1], we calculate constants  $C_0, C_1, C_2$ , which depend on  $\Omega$  in a rather simple way allowing explicit computation, such that

$$\|u\|_\infty \leq C_0 \|u\|_{L^2} + C_1 \|\nabla u\|_{L^2} + C_2 \|u_{xx}\|_{L^2} \text{ for all } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

whence by (33) and (35) we obtain

$$\|u\|_\infty \leq [\gamma_0^{-1} C_0^2 + \gamma_1^{-1} C_1^2 + \gamma_2^{-1} C_2^2]^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2} \text{ for all } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (41)$$

Using (40) and (41) in (39), we find that (37) (and (10)) hold for

$$g(t) := [\gamma_0 + \gamma_1 \rho^* + \gamma_2 (\rho^*)^2]^{-\frac{1}{2}} \tilde{g} \left( [\gamma_0^{-1} C_0^2 + \gamma_1^{-1} C_1^2 + \gamma_2^{-1} C_2^2]^{\frac{1}{2}} t \right). \quad (42)$$

**Remark 2:** Via (36) and (42), the parameters  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  enter the crucial inequality (16). One can choose these parameters in order to minimize the error bound  $\alpha$  (under some normalization condition on  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ , e.g.  $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$ ), or to maximize  $\max\{\alpha/K - G(\alpha) : \alpha \geq 0\}$  (to allow a larger defect bound  $\delta$  in (16)). Of course, this optimization need only be carried out *approximately*.

### 3.5 A numerical example

Consider the problem

$$\Delta u + u^2 = s \cdot \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \quad (x = (x_1, x_2) \in \Omega := (0, 1)^2), \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (43)$$

The results reported here have been established in [10] in joint work with P. J. McKenna and B. Breuer.

It had been conjectured in the PDE community since the 1980's that problem (43) has at least 4 solutions for  $s > 0$  sufficiently large.

For  $s = 800$ , we were able to compute 4 essentially different approximate solutions by the numerical mountain pass algorithm developed in [15], where “essentially different” means that none of them is an elementary symmetry transform of another one. Using finite Fourier series of the form (26), and a Newton iteration in combination with a collocation method, we improved the accuracy of the mountain pass solutions, resulting in highly accurate approximations  $\omega_1, \dots, \omega_4$  of the form (26).

We applied our computer-assisted enclosure method to each of these four approximations, and were successful in verifying the corresponding four inequalities (16), with four error bounds  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ . Therefore, Theorem 1 guarantees the existence of four solutions  $u_1, \dots, u_4 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  of problem (43) such that

$$\|u_i - \omega_i\|_{H^2} \leq \alpha_i \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Using the embedding inequality (41), we obtain in addition

$$\|u_i - \omega_i\|_\infty \leq \beta_i \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (44)$$

for  $\beta_i := [\gamma_0^{-1} C_0^2 + \gamma_1^{-1} C_1^2 + \gamma_2^{-1} C_2^2]^{\frac{1}{2}} \alpha_i$ . Finally, it is easy to check on the basis of the numerical data that

$$\|S\omega_i - \omega_j\|_\infty > \beta_i + \beta_j \quad (i, j = 1, \dots, 4, i \neq j)$$

for each elementary (rotation or reflection) symmetry transformation  $S$  of the square  $\Omega$ , whence (44) shows that  $Su_i \neq u_j$  ( $i, j = 1, \dots, 4, i \neq j$ ) for each of these  $S$ , i.e. that  $u_1, \dots, u_4$  are indeed *essentially different*.

The following Figure 1 shows plots of  $\omega_1, \dots, \omega_4$  (we might say as well: of  $u_1, \dots, u_4$ , since the error bounds  $\beta_i$  are much smaller than the “optical accuracy” of the figure). The first two solutions are fully symmetric (with respect to reflection at the axes

$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = x_2, x_1 = 1 - x_2$ ), while the third is symmetric only with respect to  $x_2 = \frac{1}{2}$ , and the fourth only with respect to  $x_1 = x_2$ .

Table 1 shows the defect bounds  $\delta$  (see (7), (27)), the constants  $K$  satisfying (8) (or (28)), and the  $\|\cdot\|_\infty$ -error bounds  $\beta$  (see (44)) for the four solutions.

We wish to remark that, two years after publication of our result, Dancer and Yan [21] gave a more general analytical proof (which we believe was stimulated by our result); they even proved that the number of solutions of problem (43) becomes unbounded as  $s \rightarrow \infty$ .

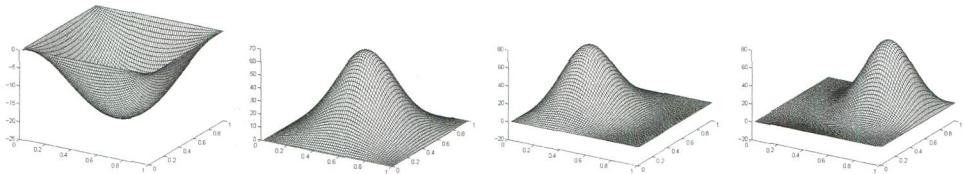


Figure 1: Four solutions to problem (43),  $s = 800$ .

approximate solution	defect bound $\delta$	$K$ (see (28))	error bound $\beta$
$\omega_1$	0.0023	0.2531	$5.8222 \cdot 10^{-4}$
$\omega_2$	0.0041	4.9267	0.0228
$\omega_3$	0.0059	2.8847	0.0180
$\omega_4$	0.0151	3.1436	0.0581

Table 1: Enclosure results for problem (43).

## 4 Weak solutions

We will now investigate problem (1), (2) under weaker assumptions on the domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  and on the numerical approximation method, but stronger assumptions on the nonlinearity  $f$ , compared with the “strong solutions” approach described in the previous section.  $\Omega$  is now allowed to be any (bounded or unbounded) domain with Lipschitz boundary. We choose the spaces

$$X := H_0^1(\Omega), Y := H^{-1}(\Omega) \quad (45)$$

for our abstract setting, where  $H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$  denotes the topological dual space of  $H_0^1(\Omega)$ , i.e. the space of all bounded linear functionals on  $H_0^1(\Omega)$ . We endow  $H_0^1(\Omega)$  with the inner product

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} := \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + \sigma \langle u, v \rangle_{L^2} \quad (46)$$

(with some parameter  $\sigma > 0$  to be chosen later), and  $H^{-1}(\Omega)$  with the “dual” inner product given by (14), with  $\Phi$  from (13).

To interpret our problem (1), (2) in these spaces, we first need to define  $\Delta u$  (for  $u \in H_0^1(\Omega)$ ), or more general,  $\operatorname{div} \rho$  (for  $\rho \in L^2(\Omega)^n$ ), as an element of  $H^{-1}(\Omega)$ . This definition simply imitates partial integration: The functional  $\operatorname{div} \rho : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  is given by

$$(\operatorname{div} \rho)[\varphi] := - \int_{\Omega} \rho \cdot \nabla \varphi \, dx \text{ for all } \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (47)$$

implying in particular that  $|(\operatorname{div} \rho)[\varphi]| \leq \|\rho\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} \leq \|\rho\|_{L^2} \|\varphi\|_{H_0^1}$ , whence  $\operatorname{div} \rho$  is indeed a *bounded* linear functional, and

$$\|\operatorname{div} \rho\|_{H^{-1}} \leq \|\rho\|_{L^2}. \quad (48)$$

Using this definition of  $\Delta u (= \operatorname{div}(\nabla u))$ , it is easy to check that the canonical isometric isomorphism  $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  defined in (13) is now given by (note (46))

$$\Phi[u] = -\Delta u + \sigma u \quad (u \in H_0^1(\Omega)), \quad (49)$$

where  $\sigma u \in H_0^1(\Omega)$  is interpreted as an element of  $H^{-1}(\Omega)$  as explained in the following.

Next, we give a meaning to a *function* being an element of  $H^{-1}(\Omega)$ , in order to define  $f(\cdot, u)$  in (1) (and  $\sigma u$  in (49)) in  $H^{-1}(\Omega)$ . For this purpose, let  $\mathcal{L}$  denote the linear space consisting of all (equivalence classes of) Lebesgue-measurable functions  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\sup \left\{ \frac{1}{\|\varphi\|_{H_0^1}} \int_{\Omega} |w\varphi| \, dx : \varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\} < \infty. \quad (50)$$

For each  $w \in \mathcal{L}$ , we can define an associated linear functional  $\ell_w : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$\ell_w[\varphi] := \int_{\Omega} w\varphi \, dx \text{ for all } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

$\ell_w$  is bounded due to (50) and hence in  $H^{-1}(\Omega)$ . Identifying  $w \in \mathcal{L}$  with its associated functional  $\ell_w \in H^{-1}(\Omega)$ , we obtain

$$\mathcal{L} \subset H^{-1}(\Omega), \quad (51)$$

and  $\|w\|_{H^{-1}}$  is less than or equal to the left-hand side of (50), for every  $w \in \mathcal{L}$ .

To get a better impression of the functions contained in  $\mathcal{L}$ , we recall that Sobolev’s Embedding Theorem [1, Theorem 5.4] gives  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ , with bounded embedding  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  (i.e. there exists some constant  $C_p > 0$  such that  $\|u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{H_0^1}$  for all  $u \in H_0^1(\Omega)$ ), for each

$$p \in [2, \infty) \text{ if } n = 2, \quad p \in \left[ 2, \frac{2n}{n-2} \right] \text{ if } n \geq 3. \quad (52)$$

Here,  $L^p(\Omega)$  denotes the Banach space of all (equivalence classes of) Lebesgue-measurable functions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  with finite norm

$$\|u\|_{L^p} := \left[ \int_{\Omega} |u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (53)$$

With  $p$  in the range (52), and  $p'$  denoting its dual number (i.e.  $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$ ), we obtain by Hölder's Inequality, combined with the above embedding, that for all  $w \in L^{p'}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |w\varphi| dx \leq \|w\|_{L^{p'}} \|\varphi\|_{L^p} \leq C_p \|w\|_{L^{p'}} \|\varphi\|_{H_0^1},$$

implying  $w \in \mathcal{L}$ , and  $\|w\|_{H^{-1}} \leq C_p \|w\|_{L^{p'}}$ . Consequently,

$$L^{p'}(\Omega) \subset \mathcal{L}, \quad (54)$$

and (note (51)) the embedding  $L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$  is bounded, with the same embedding constant  $C_p$  as in the “dual” embedding  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ . Note that the range (52) for  $p$  amounts to the range

$$p' \in (1, 2] \text{ if } n = 2, \quad p' \in \left[ \frac{2n}{n+2}, 2 \right] \text{ if } n \geq 3 \quad (55)$$

for the dual number  $p'$ .

By (54), the linear span of the union of all  $L^{p'}(\Omega)$ , taken over  $p'$  in the range (55), is a subspace of  $\mathcal{L}$ , and this subspace is in fact all of  $\mathcal{L}$  which we need (and can access) in practical applications.

Coming back to our problem (1), (2), we now simply require that

$$f(\cdot, u) \in \mathcal{L} \text{ for all } u \in H_0^1(\Omega), \quad (56)$$

in order to define the term  $f(\cdot, u)$  as an element of  $H^{-1}(\Omega)$ .

Our abstract setting requires furthermore that

$$\mathcal{F} : \begin{cases} H_0^1(\Omega) & \rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto -\Delta u + f(\cdot, u) \end{cases} \quad (57)$$

is Fréchet-differentiable. Since  $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  is linear and bounded by (48), this amounts to the Fréchet-differentiability of

$$\mathcal{G} : \begin{cases} H_0^1(\Omega) & \rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto f(\cdot, u) \end{cases} \quad (58)$$

For this purpose, we require (as in the previous section) that  $\partial f / \partial y$  is continuous on  $\bar{\Omega} \times \mathbb{IR}$ . But in contrast to the “strong solutions” setting, this is not sufficient here; the main reason is that  $H_0^1(\Omega)$  does not embed into  $C(\bar{\Omega})$ . We need additional growth restrictions on  $f(x, y)$  or  $(\partial f / \partial y)(x, y)$  as  $|y| \rightarrow \infty$ .

An important (but not the only) admissible class consists of those functions  $f$  which satisfy

$$f(\cdot, 0) \in \mathcal{L}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, 0) \text{ is a bounded function on } \Omega, \quad (60)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \right| \leq c_1|y|^{r_1} + c_2|y|^{r_2} \quad (x \in \Omega, y \in \mathbb{R}), \quad (61)$$

with non-negative constants  $c_1, c_2$ , and with

$$0 < r_1 \leq r_2 < \infty \text{ if } n = 2, \quad 0 < r_1 \leq r_2 \leq \frac{4}{n-2} \text{ if } n \geq 3. \quad (62)$$

(A “small”  $r_1$  will make condition (61) weak near  $y = 0$ , and a “large”  $r_2$  will make it weak for  $|y| \rightarrow \infty$ .)

**Lemma 1:** *Let  $f$  satisfy (59)–(61), besides the continuity of  $\partial f / \partial y$ . Then  $\mathcal{G}$  given by (58) is well-defined and Fréchet-differentiable, with derivative  $\mathcal{G}'(u) \in \mathcal{B}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  (for  $u \in H_0^1(\Omega)$ ) given by*

$$(\mathcal{G}'(u)[v])[\varphi] = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u)v\varphi dx \quad (v, \varphi \in H_0^1(\Omega)). \quad (63)$$

The proof of Lemma 1 is rather technical, and therefore omitted here.

According to (47) and (63), we have

$$(\mathcal{F}'(u)[\varphi])[\psi] = \int_{\Omega} \left[ \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u)\varphi\psi \right] dx = (\mathcal{F}'(u)[\psi])[\varphi] \quad (u, \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)) \quad (64)$$

for the operator  $\mathcal{F}$  defined in (57), which in particular implies condition (15) (for any  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ ; note (6)), in the setting (45), (57). Thus, the “dual and symmetric case” (see Section 2) is at hand.

**Remark 3:** If the domain  $\Omega$  is *bounded*, several simplifications and extensions are possible:

- a) The range  $\sigma > 0$  for the parameter in (46) can be extended to  $\sigma \geq 0$ .
- b) Condition (61) can be simplified to

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2|y|^r \quad (x \in \Omega, y \in \mathbb{R}) \quad (65)$$

for some  $r$  in the range (62). Condition (60) is satisfied automatically and can therefore be omitted.

c) In the case  $n = 2$ , the power-growth condition (61) (or (65)) is too restrictive (for bounded domains). Instead, *exponential* growth can be allowed, based on the Trudinger-Moser inequality [45, Theorem 1 and the first part of its proof] which states that

$$\frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} \exp \left[ \left( \frac{u(x)}{c\|u\|_{H_0^1}} \right)^2 \right] dx \leq 1 + \frac{1}{4\pi c^2 - 1} \quad (u \in H_0^1(\Omega)) \quad (66)$$

for each  $c > (4\pi)^{-\frac{1}{2}}$ . In [54], we showed that e.g. in the case  $f(x, y) = -\lambda e^y$ , the Fréchet differentiability (and other properties) of the mapping  $\mathcal{G}$  defined in (58) can easily be derived from (66); see also the second example in Subsection 4.5.

Again, we comment now on the computation of an approximate solution  $\omega$ , and of the terms  $\delta$ ,  $K$ , and  $g$  satisfying (7)–(10), needed for the application of Theorem 1, here in the setting (45), (57).

## 4.1 Computation of $\omega$

By (45),  $\omega$  needs to be in  $X = H_0^1(\Omega)$  only (and no longer in  $H^2(\Omega)$ ), as in the “strong solutions” approach of the previous Section). In the Finite Element context, this increases the class of allowed elements significantly; for example, the “usual” linear (or quadratic) triangular elements can be used. In case of an unbounded domain  $\Omega$ , we are furthermore allowed to use approximations  $\omega$  of the form

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 & \text{on } \Omega_0 \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases}, \quad (67)$$

with  $\Omega_0 \subset \Omega$  denoting some bounded subdomain (the “computational” domain), and  $\omega_0 \in H_0^1(\Omega_0)$  some approximate solution of the differential equation (1) on  $\Omega_0$ , subject to Dirichlet boundary conditions on  $\partial\Omega_0$ .

We pose the additional condition of  $\omega$  being *bounded*, which on one hand is satisfied anyway for all practical numerical schemes, and on the other hand turns out to be very useful in the following.

## 4.2 Defect bound $\omega$

By (45) and (57), condition (7) for the defect bound  $\delta$  now amounts to

$$\| -\Delta\omega + f(\cdot, \omega) \|_{H^{-1}} \leq \delta, \quad (68)$$

which is a slightly more complicated task than computing an upper bound for an integral (as it was needed in Section 3). The best general way seems to be the following. First we compute an additional approximation  $\rho \in H(\text{div}, \Omega)$  to  $\nabla\omega$ . (Here,  $H(\text{div}, \Omega)$  denotes the space of all vector-valued functions  $\tau \in L^2(\Omega)^n$  with weak derivative  $\text{div } \tau$  in  $L^2(\Omega)$ . Hence, obviously  $H(\text{div}, \Omega) \supset H^1(\Omega)^n$ .)  $\rho$  can be computed e.g. by interpolation (or some more general projection) of  $\nabla\omega$  in  $H(\text{div}, \Omega)$ , or in  $H^1(\Omega)^n$ . It should be noted that  $\rho$  comes “for free” as a part of the approximation, if *mixed* Finite Elements are used to compute  $\omega$ .

Furthermore, according to the arguments before and after (54), applied with  $p = p' = 2$ ,

$$\|w\|_{H^{-1}} \leq C_2 \|w\|_{L^2} \text{ for all } w \in L^2(\Omega). \quad (69)$$

For *explicit* calculation of  $C_2$ , we refer to the appendix. By (48) and (69),

$$\begin{aligned} \| -\Delta\omega + f(\cdot, \omega) \|_{H^{-1}} &\leq \| \operatorname{div}(-\nabla\omega + \rho) \|_{H^{-1}} + \| -\operatorname{div}\rho + f(\cdot, \omega) \|_{H^{-1}} \\ &\leq \| \nabla\omega - \rho \|_{L^2} + C_2 \| -\operatorname{div}\rho + f(\cdot, \omega) \|_{L^2}, \end{aligned} \quad (70)$$

which reduces the computation of a defect bound  $\delta$  (satisfying (68)) to computing bounds for two *integrals*, i.e. we are back to the situation discussed in Subsection 3.2 already.

There is an alternative way to compute  $\delta$  if  $\omega$  is of the form (67), with  $\omega_0 \in H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$ , and with  $\Omega_0$  having a Lipschitz boundary. This situation can arise e.g. if  $\Omega$  is the whole of  $\mathbb{R}^n$ , and the “computational” domain  $\Omega_0$  is chosen as a “large” rectangle, whence  $\omega_0$  can be put up e.g. in the form (26).

Using partial integration on  $\Omega_0$ , we obtain now

$$\begin{aligned} \| -\Delta\omega + f(\cdot, \omega) \|_{H^{-1}} &\leq \\ &\leq C_2 \left[ \| -\Delta\omega_0 + f(\cdot, \omega_0) \|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \| f(\cdot, 0) \|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + C_{tr} \left\| \frac{\partial\omega_0}{\partial\nu_0} \right\|_{L^2(\partial\Omega_0)}, \end{aligned} \quad (71)$$

with  $C_{tr}$  denoting a constant for the trace embedding  $H^1(\Omega_0) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega_0)$ , the explicit computation of which will be addressed in the appendix, and  $\partial\omega_0/\partial\nu_0$  the normal derivative on  $\partial\Omega_0$ .

### 4.3 Bound $K$ for $L^{-1}$

According to (45), condition (8) now reads

$$\|u\|_{H_0^1} \leq K \|L[u]\|_{H^{-1}} \text{ for all } u \in H_0^1(\Omega), \quad (72)$$

with  $L$ , defined in (6), now given by (note (57), (58))

$$L = -\Delta + \mathcal{G}'(\omega) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Under the growth conditions (59)–(62), Lemma 1 (or (63)) shows that, more concretely,

$$(L[\varphi])[\psi] = \int_{\Omega} \left[ \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \omega) \varphi\psi \right] dx \quad (\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)); \quad (73)$$

the same formula holds true also in the exponential case mentioned in Remark 3c). So we will assume from now on that  $L$  is given by (73).

Making use of the isomorphism  $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  given by (13) or (49), we obtain

$$\|L[u]\|_{H^{-1}} = \|\Phi^{-1}L[u]\|_{H_0^1} \quad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

Since moreover  $\Phi^{-1}L$  is  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$ -symmetric by (73) and (15), and defined on the whole Hilbert space  $H_0^1(\Omega)$ , and hence *selfadjoint*, we find that (72) holds for any

$$K \geq [\min \{|\lambda| : \lambda \text{ is in the spectrum of } \Phi^{-1}L\}]^{-1}, \quad (74)$$

provided that the  $\min$  is positive (which is clearly an unavoidable condition for  $\Phi^{-1}L$  being invertible with bounded inverse). Thus, in order to compute  $K$ , we need bounds for

**i)** the essential spectrum of  $\Phi^{-1}L$  (i.e. accumulation points of the spectrum, and eigenvalues of infinite multiplicity),

**ii)** isolated eigenvalues of  $\Phi^{-1}L$  of finite multiplicity, more precisely those neighboring 0.

**ad i)** If  $\Omega$  is unbounded, we suppose again that  $\omega$  is given in the form (67), with some bounded Lipschitz domain  $\Omega_0 \subset \Omega$ . If  $\Omega$  is bounded, we may assume the same, simply choosing  $\Omega_0 := \Omega$  (and  $\omega_0 := \omega$ ).

Now define  $L_0 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  by (73), but with  $(\partial f / \partial y)(x, \omega(x))$  replaced by  $(\partial f / \partial y)(x, 0)$ . Using the Sobolev/Kondratchev/Rellich Embedding Theorem [1], implying the compactness of the embedding  $H^1(\Omega_0) \hookrightarrow L^2(\Omega_0)$ , we find that  $\Phi^{-1}L - \Phi^{-1}L_0 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  is compact. Therefore, the perturbation result given in [32, IV, Theorem 5.35] shows that the essential spectra of  $\Phi^{-1}L$  and  $\Phi^{-1}L_0$  coincide. Thus, being left with the computation of bounds for the essential spectrum of  $\Phi^{-1}L_0$ , we can use e.g. Fourier transform methods if  $\Omega = \mathbb{R}^n$  and  $(\partial f / \partial y)(\cdot, 0)$  is constant, or Floquet theory if  $(\partial f / \partial y)(\cdot, 0)$  is periodic. Alternatively, if

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \geq c_0 > -\rho^* \quad (x \in \Omega), \quad (75)$$

with  $\rho^* \in [0, \infty)$  denoting the minimal point of the spectrum of  $-\Delta$  on  $H_0^1(\Omega)$ , we obtain by straightforward estimates of the Rayleigh quotient that the (full) spectrum of  $\Phi^{-1}L_0$ , and thus in particular the essential spectrum, is bounded from below by  $\min\{1, (c_0 + \rho^*)/(\sigma + \rho^*)\}$ .

**ad ii)** For computing bounds to eigenvalues of  $\Phi^{-1}L$ , we choose the parameter  $\sigma$  in the  $H_0^1$ -product (46) such that

$$\sigma > \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x)) \quad (x \in \Omega); \quad (76)$$

thus, we have to assume that the right-hand side of (76) is bounded above. Furthermore, we assume that the infimum  $s_0$  of the essential spectrum of  $\Phi^{-1}L$  is *positive*, which is true e. g. if (75) holds. As a particular consequence of (76) (and (49)) we obtain that  $s_0 \leq 1$

and all eigenvalues of  $\Phi^{-1}L$  are less than 1, and that, via the transformation  $\kappa = 1/(1 - \lambda)$ , the eigenvalue problem  $\Phi^{-1}L[u] = \lambda u$  is equivalent to

$$-\Delta u + \sigma u = \kappa \left( \sigma - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \omega) \right) u, \quad (77)$$

(to be understood as an equation in  $H^{-1}(\Omega)$ ), which is furthermore equivalent to the eigenvalue problem for the selfadjoint operator  $R := (I_{H_0^1(\Omega)} - \Phi^{-1}L)^{-1}$ . Thus, defining the essential spectrum of problem (77) to be the one of  $R$ , we find that it is bounded from below by  $1/(1 - s_0)$  if  $s_0 < 1$ , and is empty if  $s_0 = 1$ . In particular, its infimum is larger than 1, since  $s_0 > 0$  by assumption.

Therefore, the computer-assisted eigenvalue enclosure methods mentioned in Subsection 3.3 (which are applicable to eigenvalues *below* the essential spectrum; see [63]) can be used to enclose the eigenvalue(s) of problem (77) neighboring 1 (if they exist), whence by the transformation  $\kappa = 1/(1 - \lambda)$  we obtain enclosures for the eigenvalue(s) of  $\Phi^{-1}L$  neighboring 0 (if they exist). Taking also  $s_0$  into account, we can now easily compute the desired constant  $K$  via (74). (Note that  $K = s_0^{-1}$  can be chosen if no eigenvalues below the essential spectrum exist.)

#### 4.4 Local Lipschitz bound $g$ for $\mathcal{F}'$

In the setting (45), (57), condition (9) now reads

$$\left| \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x) + u(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x)) \right] v(x) \varphi(x) dx \right| \leq g(\|u\|_{H_0^1}) \|v\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1} \quad (78)$$

for all  $u, v, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Here, we have assumed that the Fréchet derivative of  $\mathcal{G}$  (defined in (58) is given by (63), which is true e. g. under the growth conditions (59)–(62), but also in the exponential case (with  $n = 2$  and  $\Omega$  bounded) mentioned in Remark 3c). We will now concentrate on the case where (59)–(62) hold true. For the exponential case, we refer to [54] and to the second example in Subsection 4.5.

As in the strong solutions approach treated in Section 3, we start with a monotonically non-decreasing function  $\tilde{g} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  satisfying

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x) + y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \omega(x)) \right| \leq \tilde{g}(|y|) \text{ for all } x \in \Omega, y \in \mathbb{R}, \quad (79)$$

and  $\tilde{g}(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow 0+$ , but now we require in addition that  $\tilde{g}(t^{1/r})$  is a *concave* function of  $t$ . Here,  $r := r_2$  is the (larger) exponent in (61).

In practice,  $\tilde{g}$  can often be put up in the form

$$\tilde{g}(t) = \sum_{j=1}^N a_j t^{\mu_j} \quad (0 \leq t < \infty),$$

where  $a_1, \dots, a_N > 0$  and  $\mu_1, \dots, \mu_N \in (0, r]$  are arranged in order to satisfy (79).

Now defining  $\psi(t) := \tilde{g}(t^{1/r})$ , the left-hand side of (78) can be bounded by (note (79))

$$\int_{\Omega} \tilde{g}(|u(x)|) |v(x)\varphi(x)| dx = \int_{\Omega} \psi(|u(x)|^r) |v(x)\varphi(x)| dx. \quad (80)$$

Without loss of generality we may assume that  $v\varphi$  does not vanish identically (almost everywhere) on  $\Omega$  (otherwise, (78) is trivial because the left-hand side is zero). Since  $v\varphi \in L^1(\Omega)$  and hence  $|v(x)\varphi(x)| dx$  induces a *finite* measure, and since  $\psi$  is concave, Jensen's Inequality [7] shows that

$$\frac{\int_{\Omega} \psi(|u(x)|^r) |v(x)\varphi(x)| dx}{\int_{\Omega} |v(x)\varphi(x)| dx} \leq \psi\left(\frac{\int_{\Omega} |u(x)|^r |v(x)\varphi(x)| dx}{\int_{\Omega} |v(x)\varphi(x)| dx}\right). \quad (81)$$

Furthermore, for  $\lambda \in (0, 1]$  and  $t \in [0, \infty)$ ,  $\psi(\lambda t) = \psi(\lambda t + (1 - \lambda)0) \geq \lambda\psi(t) + (1 - \lambda)\psi(0) = \lambda\psi(t)$ , i.e.  $\psi(t) \leq \lambda^{-1}\psi(\lambda t)$ . By Cauchy-Schwarz and the embedding  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ,

$$\lambda := \frac{\int_{\Omega} |v(x)\varphi(x)| dx}{C_2^2 \|v\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}} \in (0, 1],$$

whence the right-hand side of (81) is bounded by

$$\frac{C_2^2 \|v\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}}{\int_{\Omega} |v(x)\varphi(x)| dx} \cdot \psi\left(\frac{\int_{\Omega} |u(x)|^r |v(x)\varphi(x)| dx}{C_2^2 \|v\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}}\right). \quad (82)$$

According to (62), we can find some

$$q \in (1, \infty) \text{ if } n = 2, \quad q \in \left[\frac{n}{2}, \infty\right) \text{ if } n \geq 3, \quad (83)$$

such that  $qr$  is in the range (52). Since (83) implies that also  $p := 2q/(q - 1)$  is in the range (52), both the embeddings  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{qr}(\Omega)$  and  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  are bounded. Furthermore,  $q^{-1} + p^{-1} + p^{-1} = 1$ , whence the generalized Hölder Inequality gives

$$\int_{\Omega} |u(x)|^r |v(x)\varphi(x)| dx \leq \|u\|_{L^{qr}}^r \|v\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^p} \leq C_{qr}^r C_p^2 \|u\|_{H_0^1}^r \|v\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}.$$

Using this estimate in (82), and combining it with (81) and (80), we find that the left-hand side of (78) is bounded by

$$C_2^2 \|v\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1} \cdot \psi\left(C_{qr}^r (C_p/C_2)^2 \|u\|_{H_0^1}^r\right).$$

Since  $\psi(t) = \tilde{g}(t^{\frac{1}{\tilde{r}}})$ , (78) therefore holds for

$$g(t) := C_2^2 \cdot \tilde{g}\left(C_{qr}(C_p/C_2)^{\frac{2}{\tilde{r}}} t\right) \quad (0 \leq t < \infty), \quad (84)$$

which also satisfies (10) and is non-decreasing.

## 4.5 Examples

In our first example, we consider the problem of finding nontrivial solutions to

$$-\Delta u + V(x)u - u^2 = 0 \text{ on } \Omega := \mathbb{R}^2, \quad (85)$$

where  $V(x) = A + B \sin(\pi(x_1 + x_2)) \sin(\pi(x_1 - x_2))$ , with real parameters  $A$  and  $B$ . The results presented here have been obtained in joint work with B. Breuer and P. J. McKenna.

We are interested only in solutions which are symmetric with respect to reflection about both coordinate axes. Thus, we include these symmetries into all function spaces used, and into the numerical approximation spaces.

We treated the particular case  $A = 6, B = 2$ . On a “computational” domain  $\Omega_0 := (-\ell, \ell) \times (-\ell, \ell)$ , we computed an approximation  $\omega_0 \in H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$  of the differential equation in (85), with Dirichlet boundary conditions on  $\partial\Omega_0$ , in a finite Fourier series form like (26) (with  $N = M = 80$ ). For finding  $\omega_0$ , we started with a nontrivial approximate solution for Emden’s equation (which is (85) with  $A = B = 0$ ) on  $\Omega_0$ , and performed a path following Newton method, deforming  $(A, B)$  from  $(0, 0)$  into  $(6, 2)$ .

In the single Newton steps, we used a collocation method with equidistant collocation points. By increasing the sidelength of  $\Omega_0$  in an additional path following, we found that the approximation  $\omega_0$  remains “stable”, with rapidly decreasing normal derivative  $\partial\omega_0/\partial\nu_0$  (on  $\partial\Omega_0$ ), as  $\ell$  increases; this gives rise to some hope that a “good” approximation  $\omega$  for problem (85) is obtained in the form (67). For  $\ell = 8$ ,  $\|\partial\omega_0/\partial\nu_0\|_{L^2(\partial\Omega_0)}$  turned out to be small enough compared with  $\|-\Delta\omega_0 + V\omega_0 - \omega_0^2\|_{L^2(\Omega_0)}$ , and we computed a defect bound  $\delta$  (satisfying (68)) via (71) as

$$\delta = 0.7102 \cdot 10^{-2}; \quad (86)$$

note that, by the results mentioned in the appendix,  $C_2 = \sigma^{-\frac{1}{2}}$ , and  $C_{tr} = \sigma^{-\frac{1}{2}} [\ell^{-1} + \sqrt{\ell^{-2} + 2\sigma}]^{\frac{1}{2}}$ . Moreover, (76) requires  $\sigma > A + B = 8$  (since  $\omega$  turns out to be non-negative). Choosing  $\sigma := 9$ , we obtain  $C_2 \leq 0.3334$  and  $C_{tr} \leq 0.6968$ .

Since condition (75) holds for  $c_0 = A - B = 4$  (and  $\rho^* = 0$ ), the arguments following (75) give the lower bound  $s_0 := 4/9 \geq 0.4444$  for the essential spectrum of  $\Phi^{-1}L$ , and hence the lower bound  $1/(1 - s_0) = 1.8$  for the essential spectrum of problem (77).

By the eigenvalue enclosure methods mentioned in Subsection 3.3, we were able to compute the bounds

$$\kappa_1 \leq 0.5293, \kappa_2 \geq 1.1769$$

for the first two eigenvalues of problem (77), which by (74) leads to the constant

$$K = 6.653 \quad (87)$$

satisfying (72).

For computing  $g$  satisfying (9) or (78), we first note that (79) holds for

$$\tilde{g}(t) := 2t,$$

and (61) for  $r_1 = r_2 = 1$ , whence the additional concavity condition is satisfied. Choosing  $q := 2$  we obtain  $qr = 2$  and  $p = 4$  in the arguments following (83), whence (84) gives

$$g(t) = 2C_2 C_4^2 t = \frac{1}{9}t \quad (88)$$

since  $2C_2 C_4^2 = \sigma^{-1}$  by Lemma 2a) in the appendix.

Using (86)–(88), we find that (16) and (17) hold for  $\alpha = 0.04811$ , whence Theorem 1 implies the existence of a solution  $u^* \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$  to problem (85) such that

$$\|u^* - \omega\|_{H_0^1} \leq 0.04811. \quad (89)$$

It is easy to check on the basis of the numerical data that  $\|\omega\|_{H_0^1} > 0.04811$ , whence (89) shows in particular that  $u^*$  is non-trivial.

We wish to remark that it would be of great interest to achieve such results also for cases where  $0 < A < B$  in the potential  $V$ , because  $V$  is then no longer non-negative, which excludes an important class of purely analytical approaches to prove existence of a nontrivial solution. So far, we were not successful with such cases due to difficulties in the homotopy method which has to be used for our computer-assisted eigenvalue enclosures (see the brief remarks in Subsection 3.3); note that these difficulties occur on a rather “technical” level. We were however able to compute an (apparently) “good” approximation  $\omega$ , e.g. in the case  $A = 6, B = 26$ .

The following Figure 2 shows plots of  $\omega$  for the successful case  $A = 6, B = 2$ , and for the non-successful case  $A = 6, B = 26$ .

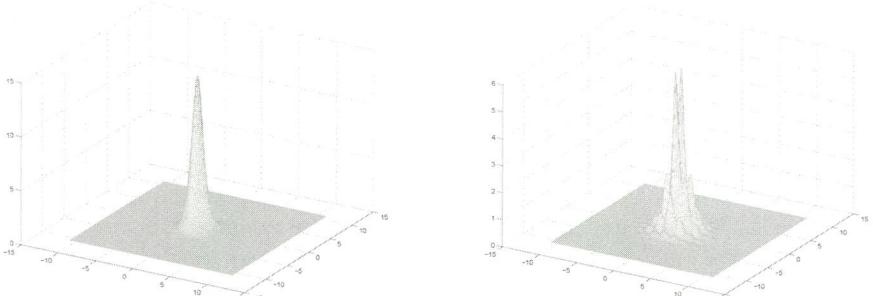


Figure 2: Example (85);  $A = 6, B = 2$  (left) and  $A = 6, B = 26$  (right).

In our second example, we consider the *Gelfand* equation

$$-\Delta u = \lambda e^u \text{ on } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (90)$$

depending on a real parameter  $\lambda$ . We are interested in parameter values  $\lambda \geq 0$  only; negative values of  $\lambda$  are less important. The results reported on here are joint work with C. Wieners and published in [54].

It is known that, on “simple” domains  $\Omega$  like the unit square or the unit ball, problem (90) has a “nose”-shaped branch  $(\lambda, u)$  of solutions, starting in  $(\lambda = 0, u \equiv 0)$ , going up to some maximal value of  $\lambda$  where the branch has a turning point, and then returning to  $\lambda = 0$  but with  $\|u\|_\infty$  tending to  $\infty$  as  $\lambda \rightarrow 0$ . Moreover, there are no other solutions (on these “simple” domains).

Here (and in [54]) we are concerned with a special *non-convex* domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  plotted in Figure 3. (For an exact quantitative definition of  $\Omega$ , see [54].)  $\Omega$  is symmetric with respect to the  $x_1$ -axis but not quite symmetric with respect to the  $x_2$ -axis; it is a bit shorter on the left-hand side than on the right. Starting at  $(\lambda = 0, u \equiv 0)$ , and performing numerical branch following, we obtained the usual “nose”-shaped branch (of approximate solutions) plotted in Figure 4; the plot consists in fact of an interpolation of many grid points.

Obviously, the approximations develop substantial unsymmetries along the branch. In order to find new (approximate) solutions, we *reflected* such an unsymmetric approximation about the  $x_2$ -axis, re-arranged the boundary values (which is necessary but easily possible due to the slight unsymmetry of  $\Omega$ ), and re-started the Newton iteration. Fortunately, it “converged” to a new approximation, and by branch following we could detect a new branch of approximate solutions plotted (together with the “old” one) in Figure 5; in order to obtain a nicely visible separation of the two branches, we introduced the difference  $d(u)$  between the two peak values of each approximation as a third dimension in the bifurcation diagram.

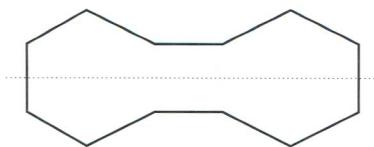


Figure 3: Domain  $\Omega$  for example (90).

In order to *prove* the existence of a new solution branch, we performed the computer-assisted method described above for the selected value  $\lambda = 15/32$ . Here, our “new” approximation  $\omega$  was computed with 65536 quadratic triangular finite elements, corresponding to 132225 unknowns.

For calculating a defect bound  $\delta$  (satisfying (68)), we used essentially (up to some technical refinements) the estimate (70), where the approximation  $\rho \in H(\text{div}, \Omega)$  to  $\nabla\omega$  was computed by linear Raviart-Thomas elements. The result is

$$\delta = 0.8979 \cdot 10^{-2}. \quad (91)$$

Since  $(\partial f / \partial y)(x, y) = -\lambda e^y < 0$  here, condition (76) is satisfied for  $\sigma = 0$ ; indeed, this choice is allowed because  $\Omega$  is bounded (see Remark 3a)). We computed eigenvalue bounds for problem (77) by the Rayleigh-Ritz and the Lehmann-Goerisch method, exploiting symmetry properties, with the final result that (72) holds for

$$K = 3.126; \quad (92)$$

note that problem (77) has no essential spectrum here since  $\Omega$  is bounded.

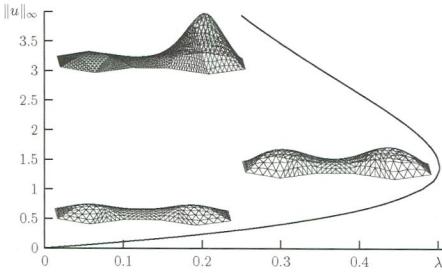


Figure 4: Main branch of (approximate) solutions for problem (90).

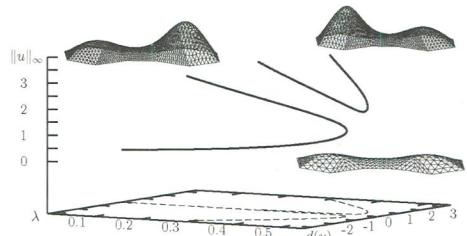


Figure 5: Main and new branch for problem (90).

For proving that  $\mathcal{G}$  defined in (58) is Fréchet differentiable and for computing a function  $g$  satisfying (9) or (78), we make essential use of the Trudinger-Moser inequality (66) (note that Lemma 1 does not apply here due to the exponential nonlinearity). For each  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ ,

$$4|u(x)| = 2 \cdot 2\|u\|_{H_0^1} \cdot \frac{|u(x)|}{\|u\|_{H_0^1}} \leq 4\|u\|_{H_0^1}^2 + \left( \frac{|u(x)|}{\|u\|_{H_0^1}} \right)^2,$$

whence (66) (with  $c := 1$ ) gives, since  $[4\pi/(4\pi - 1)]^{1/4} \leq 1.03$ ,

$$\|\exp(|u|)\|_{L^4} \leq 1.03 \text{ meas}(\Omega)^{\frac{1}{4}} \exp(\|u\|_{H_0^1}^2). \quad (93)$$

For all  $u_0, u, v, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ , the generalized Hölder Inequality and (93) imply

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |e^{u_0+u} - e^{u_0}| |v| |\varphi| dx &\leq \int_{\Omega} e^{u_0} e^{|u|} |u| |v| |\varphi| dx \leq \|e^{u_0}\|_{L^4} \|e^{|u|}\|_{L^4} \|u\|_{L^6} \|v\|_{L^6} \|\varphi\|_{L^6} \\ &\leq \|e^{u_0}\|_{L^4} \cdot 1.03 \text{ meas}(\Omega)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\|u\|_{H_0^1}^2\right) C_6^3 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (94)$$

By an argument similar to the abstract estimate (20), (21), we obtain the desired Fréchet differentiability from (94). Furthermore, for  $u_0 := \omega$ , (94) shows that (78) holds for

$$g(t) = \gamma t e^{t^2}, \text{ where } \gamma := \|\lambda e^{\omega}\|_{L^4} \cdot 1.03 \text{ meas}(\Omega)^{\frac{1}{4}} C_6^3, \quad (95)$$

and thus  $G(t) = \int_0^t g(s) ds = \frac{1}{2} \gamma (\exp(t^2) - 1) \leq \frac{1}{2} \gamma t^2 \exp(t^2)$ . From the numerical data,

Lemma 2 (appendix), and the result  $\rho^* \geq 1.4399$  (obtained by eigenvalue bounds), we obtain that  $\gamma \leq 5.62$ . Together with (91), (92), (95), we obtain that (16) and (17) hold for  $\alpha := 0.05066$ , whence Theorem 1 gives the existence of a solution  $u^* \in H_0^1(\Omega)$  of problem (90) (with  $\lambda = 15/32$ ) such that

$$\|u^* - \omega\|_{H_0^1} \leq 0.05066. \quad (96)$$

(It should be remarked that we could do without condition (17) being satisfied, since  $\Omega$  is bounded and hence we could use compactness properties, and Schauder's instead of Banach's Fixed Point Theorem.)

In the same way, we also obtained existence results with  $H_0^1$ -error bounds for two solutions of (90) on the “old” (nose-shaped) branch, again for  $\lambda = 15/32$ . From the numerical data, and all three error bounds, we can easily deduce that the three solutions are pairwise different, whence  $u^*$  established above lies on a new independent solution branch; the Implicit Function Theorem (plus some perturbation type argument showing that  $-\Delta - \lambda e^{u^*} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  is one-to-one and onto) shows that indeed a solution branch through  $(\lambda = 15/32, u^*)$  exists.

## 5 Appendix: Embedding constants

At various points in this paper, an explicit norm bound for the embedding  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , i.e. a constant  $C_p$  such that

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{H_0^1} \text{ for all } u \in H_0^1(\Omega), \quad (97)$$

is needed, for  $p$  in the range (52), and with  $\|\cdot\|_{H_0^1}$  and  $\|\cdot\|_{L^p}$  defined in (46) and (53), respectively. Here, we are not aiming at the optimal constants, but at “good” constants which are *easy to compute*.

**Lemma 2:** *Let  $\rho^* \in [0, \infty)$  denote the minimal point of the spectrum of  $-\Delta$  on  $H_0^1(\Omega)$ .*

*a) Let  $n = 2$  and  $p \in [2, \infty)$ . With  $\nu$  denoting the largest integer  $\leq p/2$ , (97) holds for*

$$C_p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{2\nu-3}{p}} \left[ \frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{p}{2} - \nu + 2 \right) \right]^{\frac{2}{p}} \frac{1}{\left( \rho^* + \frac{p}{2} \sigma \right)^{\frac{1}{p}}} \quad (98)$$

*(where the bracket-term is put equal to 1 if  $\nu = 1$ ).*

*b) Let  $n \geq 3$  and  $p \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]$ . With  $s := n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \in [0, 1]$ , (97) holds for*

$$C_p = \left( \frac{n-1}{\sqrt{n}(n-2)} \right)^{1-s} \left( \frac{s}{s\rho^* + \sigma} \right)^{\frac{s}{2}} \quad (99)$$

*(where the second factor is put equal to 1 if  $s = 0$ ).*

*Proof. ad a)* Since  $C_0^\infty(\Omega)$  is dense in  $H_0^1(\Omega)$ , it suffices to prove (97) for  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . By zero extension outside  $\Omega$ , we may regard  $u$  as a function in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

For all  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|u(x_1, x_2)|_2^p = \frac{p}{2} \int_{-\infty}^{x_1} |u(t, x_2)|_2^{p-1} \operatorname{sgn}(u(t, x_2)) \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) dt \leq \frac{p}{2} \int_{-\infty}^{x_1} |u(t, x_2)|_2^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt$$

and analogously,

$$|u(x_1, x_2)|_2^p \leq \frac{p}{2} \int_{x_1}^{\infty} |u(t, x_2)|_2^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt.$$

Adding these two inequalities gives

$$|u(x_1, x_2)|_2^p \leq \frac{p}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x_2)|_2^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt.$$

An analogous inequality is obtained by integration over  $x_2$  instead of  $x_1$ . Multiplication of these two inequalities yields

$$|u(x_1, x_2)|^p \leq \frac{p^2}{16} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x_2)|_2^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_1, t)|_2^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t) \right| dt \right).$$

Note that, on the right-hand side, the first factor depends only on  $x_2$ , and the second only on  $x_1$ . Thus, integrating this inequality over  $\mathbb{R}^2$  we obtain, using Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p dx \leq \frac{p^2}{32} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2} dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx \right). \quad (100)$$

By iteration of this inequality,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p dx \leq \frac{p^2}{32} \frac{(p-2)^2}{32} \dots \frac{(p-2\nu+4)^2}{32} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p-2\nu+2} dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx \right)^{\nu-1}. \quad (101)$$

Let  $q := p - 2\nu + 2$ . By the choice of  $\nu$ , we have  $2 \leq q < 4$ . Thus, Hölder's Inequality gives the following simple interpolation inequality:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q dx = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2q-4} |u|^{4-q} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx \right)^{\frac{q}{2}-1} \left( \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx \right)^{2-\frac{q}{2}}. \quad (102)$$

Using (100) with 4 in place of  $p$ , inserting the result into (102), and further inserting into (101) gives, since  $(q/2) - 1 = (p/2) - \nu$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p dx \leq \frac{p^2}{32} \frac{(p-2)^2}{32} \dots \frac{(p-2\nu+4)^2}{32} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}-\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}-1}. \quad (103)$$

Moreover,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \\ & \leq \left(\frac{1}{\rho^* + \frac{p}{2}\sigma} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \frac{p}{2}\sigma \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx\right]\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \\ & \leq \frac{1}{\left(\rho^* + \frac{p}{2}\sigma\right)^{\frac{2}{p}}} \left\{ \frac{2}{p} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \frac{p}{2}\sigma \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx \right] + \left(1 - \frac{2}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx \right\} \\ & = \frac{1}{\left(\rho^* + \frac{p}{2}\sigma\right)^{\frac{2}{p}}} \|u\|_{H_0^1}^2. \end{aligned} \quad (104)$$

Using this inequality in (103), and moreover calculating

$$\frac{p^2}{32} \frac{(p-2)^2}{32} \dots \frac{(p-2\nu+4)^2}{32} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}-\nu} = \left[\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{p}{2} - \nu + 2\right)\right]^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+2\nu-3},$$

we obtain the assertion.

*ad b)* In [24, proof of Theorem 9.2, (9.10)], it is shown that, again for  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq \frac{n-1}{n-2} \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^{\frac{1}{n}}.$$

Thus, by the arithmetic-geometric mean inequality,

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq \frac{n-1}{\sqrt{n}(n-2)} \|\nabla u\|_{L^2}, \quad (105)$$

which implies the result (even with  $\sigma = 0$  in (46)) if  $p = 2n/(n-2)$ . Now let  $p \in [2, 2n/(n-2))$ , whence  $s = n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \in (0, 1]$ . Again, we use the interpolation inequality (note that  $\frac{n-2}{2n} p(1-s) + \frac{1}{2} ps = 1$ )

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p(1-s)} |u|^{ps} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n} p(1-s)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2} ps},$$

whence, by (105),

$$\|u\|_{L^p} \leq \left( \frac{n-1}{\sqrt{n}(n-2)} \right)^{1-s} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}(1-s)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}s}. \quad (106)$$

Moreover, by arguments similar to (104)

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \right)^s \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{1-s} \leq \frac{1}{(\rho^* + \frac{\sigma}{s})^s} \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Inserting into (106) gives the assertion.  $\square$

**Remark 4:** The embedding constants given in Lemma 2 depend on the minimum  $\rho^*$  of the spectrum of  $-\Delta$  on  $H_0^1(\Omega)$ . If no information on  $\rho^*$  is available, one may simply use the lower bound 0 for  $\rho^*$ . If  $\Omega$  contains balls of arbitrarily large radius,  $\rho^*$  is 0. In these cases the parameter  $\sigma$  in (46) must of course be chosen positive.

In many cases, however, positive lower bounds for  $\rho^*$  can easily be computed, since  $\rho^*$  depends in an antitone way on the domain  $\Omega$ . If e.g.  $\Omega$  is contained in a rectangle  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ , where  $a_i = -\infty$  and  $b_i = \infty$  are admitted, then  $\rho^* \geq \pi^2 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^{-2}$ .

If  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  has finite measure, another simple lower bound for  $\rho^*$  is obtained by using (100) for  $p := 2$ , implying that the Rayleigh quotient for  $-\Delta$ , and hence  $\rho^*$ , is  $\geq 8/\text{meas}(\Omega)$ .

More accurate lower bounds for  $\rho^*$  can be computed by the eigenvalue enclosure methods mentioned in Subsection 3.3.

In Subsection 4.2, a *trace embedding* constant  $C_{tr}$  satisfying

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_{tr} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (u \in H^1(\Omega)) \quad (107)$$

is required, with  $\Omega$  denoting a bounded Lipschitz domain. Here, the norm  $\|\cdot\|_{H^1}$  is given by (the square root of) the right-hand side of (46). Clearly,  $\sigma > 0$  must be required now, since otherwise (107) would be violated for constant functions  $u$ . Again, we are not aiming at the optimal constant, but at a “good” and easily computable one.

**Lemma 3:** Let  $\rho : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  be continuous, with bounded weak first derivatives, such that

$$\rho \cdot \nu \geq 1 \text{ on } \partial\Omega, \quad (108)$$

where  $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  denotes the outer unit normal field (which exists almost everywhere on  $\partial\Omega$ ). Then, with  $\|\rho\|_\infty := \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i^2} \right\|_\infty$ , (107) holds for

$$C_{tr} = \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \rho\|_\infty + \sqrt{\frac{1}{4} \|\operatorname{div} \rho\|_\infty^2 + \sigma \|\rho\|_\infty^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Proof:* We have to show (107) for  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ . By (108) and Gauß' Divergence Theorem,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u^2 dS &\leq \int_{\partial\Omega} (u^2 \rho) \cdot \nu dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u^2 \rho) dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \rho) u^2 dx + 2 \int_{\Omega} u (\nabla u) \cdot \rho dx \\ &\leq \|\operatorname{div} \rho\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|\rho\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\operatorname{div} \rho\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_\infty \left( \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\lambda} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \frac{\|\rho\|_\infty}{\lambda} \left[ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{\lambda}{\|\rho\|_\infty} \|\operatorname{div} \rho\|_\infty + \lambda^2 \right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \end{aligned}$$

for arbitrary  $\lambda > 0$ . Choosing  $\lambda := \|\rho\|_\infty^{-1} \left[ -\frac{1}{2} \|\operatorname{div} \rho\|_\infty + \sqrt{\frac{1}{4} \|\operatorname{div} \rho\|_\infty^2 + \sigma \|\rho\|_\infty^2} \right]$  gives the assertion.  $\square$

If for example  $\Omega$  is a bounded rectangle  $(-\ell_1, \ell_1) \times \cdots \times (-\ell_n, \ell_n)$ , we can choose  $\rho(x) := (x_1/\ell_1, \dots, x_n/\ell_n)$ , satisfying (108). Lemma 3 therefore yields

$$C_{tr} = \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ell_i} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ell_i} \right)^2 + n\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

If  $\Omega$  is a ball with radius  $R$ , centered at 0, we choose  $\rho(x) := R^{-1}x$ , which satisfies (108), whence Lemma 3 gives

$$C_{tr} = \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{n}{2R} + \sqrt{\frac{n^2}{4R^2} + \sigma} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Note that the shear *existence* of a vector field  $\rho$  with the required properties is ensured by the Lipschitz continuity of  $\partial\Omega$  (see [28, Lemma 1.5.1.9]).

**Acknowledgement:** The author is grateful to Hans-Christoph Grunau for his excellent suggestions to improve this article.

## References

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] H. Amann, *Existence of multiple solutions for nonlinear boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1972) 925–935.
- [3] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev. 18 (1976) 620–709.

- [4] H. Amann, P. Hess, *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 84 (1–2) (1979) 145–151.
- [5] A. Ambrosetti, G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. 93 (1973) 231–247.
- [6] C. Bandle, *Existence theorems, qualitative results and a priori bounds for a class of nonlinear Dirichlet problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 58 (1975) 219–238.
- [7] H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, 3rd edition, de Gruyter, Berlin, 1978.
- [8] H. Behnke, *Inclusion of eigenvalues of general eigenvalue problems for matrices*, in: U. Kulisch, H. J. Stetter (Eds.), *Scientific Computation with Automatic Result Verification*, Computing 6 (Suppl.) (1987) 69–78.
- [9] H. Behnke, F. Goerisch, *Inclusions for eigenvalues of selfadjoint problems*, in: J. Herzberger (Ed.), *Topics in Validated Computations*, Series Studies in Computational Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1994, 277–322.
- [10] B. Breuer, P. J. McKenna, M. Plum, *Multiple solutions for a semilinear boundary value problem: a computational multiplicity proof*, J. Differential Equations 195 (2003) 243–269.
- [11] B. Breuer, J. Horak, P. J. McKenna, M. Plum, *A computer-assisted existence and multiplicity proof for travelling waves in a nonlinearly supported beam*, J. Differential Equations 224 (2006) 60–97.
- [12] H. Brezis, R. E. L. Turner, *On a class of superlinear elliptic problems*, Comm. Partial Differential Equations 2 (1977) 601–614.
- [13] A. Castro, S. Gadad, *The Lazer-McKenna conjecture for radial solutions in the  $R^n$  ball*, Electron. J. Differential Equations (1993) 1–6.
- [14] G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni, *Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng. 10 (7) (2000) 1565–1612.
- [15] Y. S. Choi, P. J. McKenna, *A mountain pass method for the numerical solutions of semilinear elliptic problems*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 20 (1993) 417–437.
- [16] L. Collatz, *Aufgaben monotoner Art*, Arch. Math. 3 (1952) 366–376.
- [17] L. Collatz, *The numerical treatment of differential equations*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1960.
- [18] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 58 (1975) 207–218.
- [19] E. N. Dancer, *On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations*, J. Math. Pures Appl. (9) 57 (4) (1978) 351–366.
- [20] E. N. Dancer, *A counterexample to the Lazer-McKenna conjecture*, Nonlinear Anal. TMA 13 (1989) 19–22.
- [21] E. N. Dancer, S. S. Yan, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture*, J. Diff. Equations 210 (2) (2005) 317–351.
- [22] S. Day, Y. Hiraoka, K. Mischaikow, T. Ogawa, *Rigorous numerics for global dynamics: a study of the Swift-Hohenberg equation*, SIAM J. Appl. Dynamical Systems 4 (2005) 1–31.
- [23] B. Fazekas, M. Plum, Ch. Wiener, *Enclosure for biharmonic equation*, Dagstuhl Online Seminar Proceedings 05391, <http://drops.dagstuhl.de/portal/05391/> (2005).
- [24] A. Friedman, *Partial differential equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [25] I. M. Gelfand, *Some problems in the theory of quasilinear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 29 (1963), 295–381.
- [26] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 (1979) 209–243.
- [27] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd edition, Springer, Berlin-Heidelberg, 1983.
- [28] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston, MA, 1985.
- [29] Y. Hiraoka, *Topological verification in infinite dimensional dynamical systems*, Doctoral Dissertation, Department of Informatics and Mathematical Science, Graduate School of Engineering Science, Osaka University, 2004.

- [30] H. Hofer, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. 261 (1982) 493–514.
- [31] D. D. Joseph, T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. 49 (1973) 241–269.
- [32] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1966.
- [33] J. L. Kazdan, F. Warner, *Remarks on quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975) 567–597.
- [34] H. B. Keller, J. P. Keener, *Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems*, J. Differential Equations 16 (1974) 103–125.
- [35] R. Klatte, U. Kulisch, C. Lawo, M. Rausch, A. Wiethoff, *C-XSC-A C++ Class Library for Extended Scientific Computing*, Springer, Berlin, 1993.
- [36] M. K. Kwong, *On the unboundedness of the number of solutions of a Dirichlet problem*, J. Nonlinear Anal. 18 (1992) 993–1001.
- [37] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, 1968.
- [38] J.-R. Lahmann, M. Plum, *A computer-assisted instability proof for the Orr-Sommerfeld equation with Blasius profile*, ZAMM 84, No. 3 (2004) 188–204.
- [39] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, J. Math. Anal. Appl. 84 (1981) 282–294.
- [40] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Proc Roy. Soc. Edinburgh 95A (1983) 275–283.
- [41] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *A symmetry theorem and applications to nonlinear partial differential equations*, J. Differential Equations 71 (1988) 95–106.
- [42] N. J. Lehmann, *Optimale Eigenwerteinschließungen*, Numer. Math. 5 (1963) 246–272.
- [43] P. L. Lions, *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, SIAM Rev. 24 (1982) 441–467.
- [44] F. Mignot, J.-P. Puel, *Sur une classe de problèmes non linéaires avec non linéarité positive, croissante, convexe*, Comm. Partial Differential Equations 5 (1980) 791–836.
- [45] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971) 1077–1092.
- [46] K. Nagatou, M. T. Nakao, N. Yamamoto, *An approach to the numerical verification of solutions for nonlinear elliptic problems with local uniqueness*, Numer. Funct. Anal. Optim. 20 (1999) 543–565.
- [47] M. T. Nakao, *Solving nonlinear elliptic problems with result verification using an  $H^{-1}$  type residual iteration*, Computing (Suppl. 9) (1993), 161–173.
- [48] M. T. Nakao, N. Yamamoto, *Numerical verifications for solutions to elliptic equations using residual iterations with higher order finite elements*, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995), 271–279.
- [49] M. Plum, *Explicit  $H_2$ -estimates and pointwise bounds for solutions of second-order elliptic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 165 (1992), 36–61.
- [50] M. Plum, *Enclosures for solutions of parameter-dependent nonlinear elliptic boundary value problems: Theory and implementation on a parallel computer*, Interval Computations 3 (1994) 106–121.
- [51] M. Plum, *Existence and enclosure results for continua of solutions of parameter-dependent nonlinear boundary value problems*, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995) 187–200.
- [52] M. Plum, *Enclosures for two-point boundary value problems near bifurcation points*. In: *Scientific Computing and Validated Numerics*, (Eds. G. Alefeld, A. Frommer, B. Lang), Akademie Verlag (1996) 265–279.
- [53] M. Plum, *Guaranteed numerical bounds for eigenvalues*, in: D. Hinton, P. W. Schaefer (Eds.), *Spectral Theory and Computational Methods of Sturm-Liouville Problems*, Marcel Dekker, New York, 1997, 313–332.
- [54] M. Plum, Ch. Wieners, *New solutions of the Gelfand problem*, J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), 588–606.

- [55] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C.B.M.S. Reg. Conf. Ser. Math. 65 (1986) 1–44.
- [56] K. Rektorys, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, second ed., Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1980.
- [57] S. M. Rump, *INTLAB-INTerval LABoratory, a Matlab toolbox for verified computations*, version 4.2.1, Inst. Informatik, TU Hamburg-Harburg (2002),  
<http://www.ti3.tu-harburg.de/~rump/intlab/~>.
- [58] J. Schröder, *Vom Defekt ausgehende Fehlerabschätzungen bei Differentialgleichungen*, Arch. Rat. Mech. Anal. 3 (1959) 219–228.
- [59] J. Schröder, *Operator inequalities*, Academic Press, New York, 1980.
- [60] J. Schröder, *Operator inequalities and applications*, in: Inequalities, Fifty Years on from Hardy, Littlewood and Polya, (Ed. W. N. Everitt) Marcel Dekker Inc., 1991, 163–210.
- [61] S. Solimini, *Some remarks on the number of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Anal. Nonlinear IHP 2 (1985) 143–156.
- [62] W. Walter, *Differential and integral Inequalities*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1970.
- [63] S. Ziemermann, U. Mertins, *Variational bounds to eigenvalues of self-adjoint eigenvalue problems with arbitrary spectrum*, Z. Anal. Anwendungen 14 (1995) 327–345.

## Neue Lehrbücher bei de Gruyter

Rolf Walter

### ■ Einführung in die Analysis 1

2007. X, 567 Seiten. Broschur.  
€ [D] 34,95 / sFr 56,- / \*US\$ 49,-  
ISBN 978-3-11-019539-2

In diesem Lehrbuch werden reelle und komplexe Zahlen, grundlegende Konvergenzbedingungen für Folgen und Funktionen und natürlich die Differential- und Integralrechnung bei einer Veränderlichen behandelt. Alle Themen sind sehr ausführlich diskutiert, was vielen Studierenden in der ersten Phase ihres Studiums helfen wird. Das Lehrbuch enthält zahlreiche Beispiele, Übungsaufgaben und grafische Darstellungen.

Rolf Walter

### ■ Einführung in die Analysis 2

2007. X, 465 Seiten. Broschur.  
€ [D] 34,95 / sFr 56,- / \*US\$ 49,-  
ISBN 978-3-11-019540-8

Das Lehrbuch behandelt zunächst die Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher und wichtige Anwendungen wie zum Beispiel Minimierungsprobleme. Anschließend wird das Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher im Lebesgueschen Sinne umfassend diskutiert. Ergänzendes Kapitel über Lebesgue-Räume und Topologie bieten weitere Aspekte, z.B. über Mittelwertsätze, die Gammafunktion und den Abbildungsgrad in der Ebene. Das Lehrbuch enthält zahlreiche Beispiele, Übungsaufgaben und grafische Darstellungen.



de Gruyter  
Berlin · New York

[www.degruyter.de](http://www.degruyter.de)

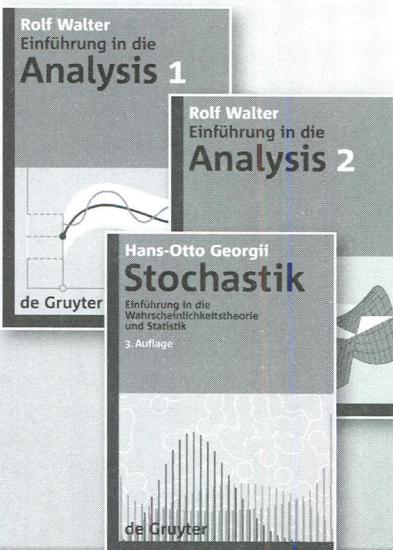
Hans-Otto Georgii

### ■ Stochastik

### Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

3. überarb. und erw. Aufl. 2007.  
XI, 378 Seiten. Broschur.  
€ [D] 28,- / sFr 45,- / \*US\$ 37,80.  
ISBN 978-3-11-019349-7

Der Text bietet eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, wobei die beiden genannten Fachgebiete in zwei separaten Teilen gleichberechtigt nebeneinander gestellt sind. Im Unterschied zu vielen anderen einführenden Lehrbüchern erfolgt keine Trennung in diskrete und allgemeine Modelle. Die dritte Auflage enthält zahlreiche neue Illustrationen und aktualisierte Übungsaufgaben.



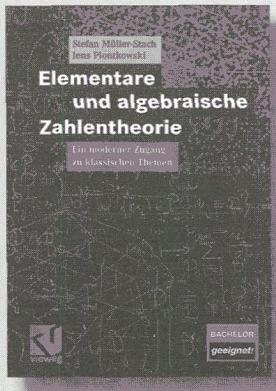
Die €-Preise bezeichnen die in Deutschland verbindlichen Ladenpreise.  
sFr-Preise verstehen sich als unverbindliche Preisempfehlung.

\* For orders placed in North America.

Preisänderungen behalten wir uns vor.

Prices are subject to change without notice.

# Zahlentheorie: Klassische Themen - aktuelle Darstellung



Stefan Müller-Stach/Jens Piontkowski

## Elementare und algebraische Zahlentheorie

Ein moderner Zugang zu klassischen Themen

2007. IX, 240 S. Br. EUR 19,90

ISBN 978-3-8348-0211-8

## INHALT

Primzahlen - Teilbarkeitstheorie - Der ggT und der euklidische Algorithmus - Kongruenzrechnung - Die Ringe  $Z/nZ$  - Endlich erzeugte abelsche Gruppen - Die Struktur der Einheitengruppen  $Un$  - Quadratische Reste - Quadratsätze - Kettenbrüche - Primzahltests - Faktorisierungsalgorithmen -  $p$ -adische Zahlen - Quadratrestklassen und Hilbert-Symbole - Der Satz von Hasse-Minkowski - Zahlkörper - Teilertheorie im Ring ganzer Zahlen - Die Idealklassengruppe - Die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper  
Anhänge: Elementare Gruppentheorie - Elementare Ringtheorie - Elementare Körpertheorie - Lösungshinweise zu den Aufgaben

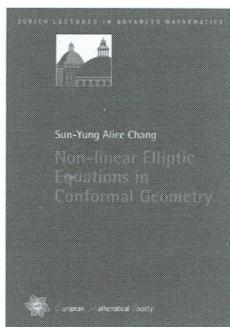
## DAS BUCH

Das Buch wendet sich an alle, die in die klassischen Themen der Zahlentheorie einsteigen wollen. Viel Wert wird auf die konkrete Berechenbarkeit bei allen Problemlösungen gelegt. So gibt es auch Abschnitte über moderne Primzahltests und Faktorisierungsalgorithmen und am Ende des Buches wird ein Weg zur Bestimmung der Klassenzahl der quadratischen Zahlkörper aufgezeigt. Im Rahmen der Bachelor-/Master-Studiengänge eignet sich das Buch als Grundlage für zwei Semester: einen Aufbaumodul in elementarer Zahlentheorie mit einem Vertiefungsmodul in algebraischer Zahlentheorie.



Abraham-Lincoln-Straße 46  
D-65189 Wiesbaden  
Fax 0611.78 78-420  
[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)

Änderungen vorbehalten.  
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.



S.-Y. A. Chang

## Non-linear Elliptic Equations in Conformal Geometry

Zürich Lecture Notes  
in Adv. Math.

Zürich, European Math. Soc., 2004, 92 S.,  
€ 32,37

Gegenstand des vorliegenden Buches, dem Mitschriften einer Nachdiplomvorlesung der Autorin an der ETH Zürich zu Grunde liegen, sind – wie der Titel sagt – nicht-lineare partielle Differentialgleichungen der konformen Geometrie, genauer solche, die im Zusammenhang mit Untersuchungen von Krümmungsvarianten stehen und dies vor allem in den Dimensionen  $n = 2$  und  $n = 4$ .

Ausgangspunkt ist die folgende intensiv untersuchte Frage. Sei  $M^2$  eine kompakte Fläche ohne Rand versehen mit einer Riemann'schen Metrik  $g$ . Wann ist eine Funktion  $f \in C^\infty(M^2)$  die Gauß-Krümmung einer Riemann'schen Metrik in der konformen Klasse  $[g]$  von  $g$ ? Ist  $(M^2, g)$  die zweidimensionale Standardsphäre  $(S^2, g_{st})$ , so ist diese Frage als Nirenberg-Problem bekannt. Setzen wir  $g_w = e^{2w}g$  für eine Funktion  $w \in C^\infty(M^2)$  und bezeichnen wir mit  $K$  und  $K_w$  die Gauß-Krümmungen zu  $g$  bzw.  $g_w$ , so gilt

$$-\Delta w + K = K_w e^{2w}. \quad (1)$$

Dabei ist  $\Delta = -\delta d$  der Laplace-Operator bezüglich  $g$ . Demnach sind also diejenigen Funktionen  $f$  gesucht, für die es eine Lösung  $w$  der Gleichung (1) mit  $K_w = f$  gibt. Erfüllt  $f$  die aus dem Satz von Gauß-Bonnet resultierende notwendige Vorzeichenbedingung, so existieren nach einem Resultat von Kazdan und Warner (*Existence and conformal*

*deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures*, Ann. Math. (2) 101, 317–331 (1975)) eine Funktion  $w$  und ein Diffeomorphismus  $\varphi$  von  $M^2$  derart, dass  $f$  die Gauß-Krümmung der Riemann'schen Metrik  $\varphi^* g_w$  ist. Die ursprüngliche Frage hingegen konnte vollständig bisher nur für Flächen  $M^2$  mit Euler-Charakteristik  $\chi(M^2) = 0$  (J. L. Kazdan, F. W. Warner: *Curvature functions for compact 2-manifolds*. Ann. Math. (2) 99, 14–47 (1974)) und für den reell projektiven Raum  $\mathbb{RP}^2$  mit der Standardmetrik (J. Moser: *On a nonlinear problem in differential geometry*. Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971, 273–280 (1973)) beantwortet werden. Die entsprechenden Zitate im Buch sind leider falsch bzw. fehlerhaft.

Eine weitere zentrale Frage der konformen Geometrie in der Dimension  $n = 2$  ist die Charakterisierung von Riemann'schen Metriken mit konstanter Gauß-Krümmung. Im Buch wird auf das folgende Resultat von Onofri und von Osgood, Phillips und Sarnak eingegangen. Bezeichne  $\Delta_w$  den Laplace-Operator zur Riemann'schen Metrik  $g_w$  und sei  $\det(-\Delta_w)$  die  $\zeta$ -regularisierte Determinante von  $-\Delta_w$ . Dann nimmt  $\det(-\Delta_w)$  ihr Maximum unter der Nebenbedingung  $\text{vol}(M, g_w) = \text{vol}(M, g)$  in solchen Funktionen  $w$  an, für die  $K_w$  konstant ist. Der Beweis dieser Aussage beruht wesentlich auf der so genannten Polyakov-Formel (A. M. Polyakov: *Quantum geometry of bosonic strings*. Phys. Lett. B 103, 207–210 (1981)), welche besagt, dass

$$\log \det(-\Delta_w) - \log \det(-\Delta)$$

$$= -\frac{1}{12\pi} \int_{M^2} (|\nabla w|^2 + 2Kw) d\mu$$

für alle  $w$  mit  $\text{vol}(M, g_w) = \text{vol}(M, g)$ , wobei  $d\mu$  das Flächenelement zur Referenzmetrik  $g$  ist. Obwohl das Buch über eine umfangreiche und zur Einarbeitung in die Thematik sehr hilfreiche Bibliographie verfügt, ist ein Zitat für diese Formel nicht angegeben.

Betrachtet man nun Mannigfaltigkeiten  $M^n$  der Dimension  $n \geq 3$ , so ist eine nahe liegende Frage, ob man eine gegebene Riemann'sche Metrik  $g$  auf  $M^n$  so konform ändern kann, dass gewisse skalare Krümmungsgrößen konstant werden. Im Fall der Skalarkrümmung ist dies das bekannte Yamabe-Problem. Die Frage nach konformen Riemann'schen Metriken mit konstanter  $Q$ -Krümmung besitzt eine Reihe von Parallelen zum oben erwähnten Problem der Beschreibung aller Gauß-Krümmungen. Sei  $n = 4$  und sei  $\mathcal{P}$  der durch

$$\mathcal{P}u = \Delta^2 u + \delta \left( \frac{2}{3} R - 2 \text{Ric} \right) du$$

auf Funktionen  $u$  wirkende Paneitz-Operator bezüglich  $g$ . Außerdem sei  $\mathcal{Q}$  die  $Q$ -Krümmung, d. h.

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{12} \left( R^2 - 3|\text{Ric}|^2 - \Delta R \right).$$

Dabei ist  $R$  die Skalarkrümmung und  $\text{Ric}$  der Ricci-Tensor. Bezeichnet  $\mathcal{Q}_w$  die  $Q$ -Krümmung zur Riemann'schen Metrik  $g_w = e^{2w}g$ , so gilt in Analogie zur Gleichung (1)

$$\mathcal{P}w + 2\mathcal{Q} = 2\mathcal{Q}_w e^{4w}.$$

Ist  $M^2$  eine kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, so gilt nach dem Satz von Gauß-Bonnet

$$2\pi\chi(M^2) = \int_{M^2} K d\mu.$$

In der Dimension  $n = 4$  besagt die Chern-Gauß-Bonnet-Formel, dass

$$4\pi^2\chi(M^4) = \int_{M^4} \left( \frac{|W|^2}{8} + \mathcal{Q} \right) d\mu.$$

Dabei ist  $W$  der Weyl-Tensor. Dieser misst gerade, wie weit die Riemann'sche Metrik  $g$  davon entfernt ist, lokal konform flach zu sein. Da für  $n = 2$  bekanntlich jede Riemann'sche Mannigfaltigkeit lokal konform flach ist, ergibt sich eine Analogie zwischen den Ausdrücken  $\int_{M^2} K d\mu$  und  $\int_{M^4} \mathcal{Q} d\mu$ . Beide Terme sind konform invariant. Der zweite Ausdruck stimmt bis auf einen Faktor

mit dem Integral über die  $\sigma_2$ -Skalarkrümmung  $\sigma_2(A)$  überein und steht in enger Beziehung zum so genannten  $\sigma_2$ -Yamabe-Problem, das im Folgenden beschrieben werden soll.

Sei  $(M^n, g)$  eine kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension  $n \geq 3$  und sei

$$A = \text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g,$$

also der mit  $n-2$  multiplizierte Schouten-Tensor. Des Weiteren sei  $\sigma_k(A) \in C^\infty(M)$  für  $k = 1, \dots, n$  dadurch definiert, dass  $\sigma_k(A)$  an der Stelle  $p \in M$  die  $k$ -te elementar-symmetrische Funktion angewandt auf die Eigenwerte von  $A_p$  bezüglich  $g$  ist. Wie man leicht sieht, ist  $\sigma_1(A)$  ein positives Vielfaches der Skalarkrümmung  $R$ . Die Frage nach der Existenz einer Riemann'schen Metrik  $g_w$  in der konformen Klasse  $[g]$  mit

$$\sigma_k(A_w) = \text{const.} \quad (2)$$

ist folglich eine natürliche Verallgemeinerung des Yamabe-Problems und wird das  $\sigma_k$ -Yamabe-Problem genannt. Das Studium der voll nicht-linearen Differentialgleichung (2) wurde von Viaclovsky initiiert. Als eines der ersten Resultate in dieser Richtung wurde von ihm gezeigt, dass unter der Voraussetzung, dass  $(M^n, g)$  lokal konform flach ist, für  $k \neq n/2$  die kritischen Funktionen  $w$  von  $\int_{M^n} \sigma_k(A_w)$  Lösungen von (2) sind. Entsprechend unserer bisherigen Notation ist  $\sigma_k(A_w)$  hier die bezüglich der Metrik  $g_w$  gebildete Funktion.

Den Schwerpunkt des vorliegenden Buches bilden die Resultate von Chang, Gursky und Yang zur Lösung des  $\sigma_2$ -Yamabe-Problems in der Dimension  $n = 4$ , d. h. der Beweis der folgenden Aussage. Ist  $(M^4, g)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung und ist  $\int_{M^4} \sigma_2(A) d\mu > 0$ , so gibt es eine Funktion  $w \in C^\infty(M)$  derart, dass  $\sigma_2(A_w)$  eine positive Konstante ist. Der vorgestellte Beweis beruht auf dem Studium von Funktionalen, die ihren Ursprung in der Beschreibung der  $\zeta$ -regularisierten Determinanten haben.

nante gewisser konform kovarianter Differentialoperatoren unter konformer Änderung, ähnlich der Polyakov-Formel, haben, und ist technisch sehr anspruchsvoll.

Ich hoffe vermittelt zu haben, dass die Inhalte des Buches überaus interessant sind. Allerdings hätte ich mir mehr Sorgfalt bei der Gestaltung gewünscht. Dies betrifft zum einen die zahlreichen Tippfehler, die zu einem Teil auch von einem Nichtfachmann bemerkt werden können, so dass sich mir die Frage stellt, inwieweit der Verlag seiner Verantwortung gerecht geworden ist. Zum anderen sind es aber auch inhaltliche Ungenauigkeiten. So ist z. B. Theorem 2.11 nicht präzise formuliert. Gilt nämlich für  $w$  in der Gleichung (2.16) die Gleichheit, so trifft das auch zu, wenn man zu  $w$  eine Konstante addiert. Für die Gleichung (2.17) ist das aber nicht der Fall.

Nichtsdestotrotz bietet das Buch einen anregenden Einblick in ein hoch aktuelles Gebiet differentialgeometrischer Forschung. Wie die Autorin in der Einleitung ihres Buches bemerkt, hat es seit ihrer Nachdiplomvorlesung an der ETH Zürich wesentliche Fortschritte beim Studium konformer Krümmungsvarianten gegeben. Für Näheres sei auf ihren Artikel *Conformal invariants and partial differential equations*. Bull. Am. Math. Soc. 42, 365–393 (2005) verwiesen.

Hannover

L. Habermann

B. Simon

**Orthogonal Polynomials on the Unit Circle.**  
Part 1:  
Classical Theory,  
Part 2:  
Spectral Theory

B. Simon  
**Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1: Classical Theory, Part 2: Spectral Theory**  
AMS Coll. Publ. 54

Providence, Am. Math. Soc., 2004, 1044 S.,  
\\$ 213,35

Orthogonale Polynome, die auf der komplexen Einheitslinie  $\partial\mathbb{D}$  (parametrisiert durch  $z = e^\theta$ ) definiert sind, wurden 1920 von G. Szegö eingeführt. Ihr Studium durchlief Phasen sowohl erhöhten Interesses wie auch Seitwärtsbewegungen. Beginnend mit den 90ern ist das Interesse an orthogonalen Polynomen stark angestiegen. Die tiefere Ursache dafür mag in dem Umstand liegen, dass ihre Rolle in einer Reihe von mathematischen Disziplinen erst kürzlich wahrgenommen wurde bzw. Querverbindungen zu anderen Gegenständen gefunden wurden. Dieses Buch ist der Versuch, die Theorie der orthogonalen Polynome auf dem Einheitskreis und ihre Relevanz für andere Disziplinen darzulegen.

Ein Maß  $\mu$  auf  $\partial\mathbb{D}$  wird nichttrivial genannt, wenn sein Träger eine unendliche Menge ist. Ein solches Maß besitzt offenbar die Eigenschaft, dass die Funktionen  $1, z, z^2, \dots$  im Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2(\partial\mathbb{D}, \mu)$  linear unabhängig sind. Daher können diese Funktionen orthogonalisiert werden:

$$\Phi_n = P_n[z^n],$$

wobei  $P_n$  die orthogonale Projektion auf den Teilraum ist, der zu  $1, z, \dots, z^{n-1}$  orthogonal ist. Diese Polynome sind nach Konstruktion monisch. Neben den orthogonalen Polynomen  $\Phi_n$  werden die orthonormierten Polynome  $\varphi_n = \frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|}$  betrachtet. Die im 1. Kapitel bewiesene Szegö-Rekursion

$$\Phi_{n+1} = z\Phi_n - \bar{\alpha}_n \Phi_n^*(z), \quad \alpha_n \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad (1)$$

mit  $\Phi_n(z) = \sum_{j=0}^n q_j z^j$ ,  $\Phi_n^*(z) = \sum_{j=0}^n \bar{q}_{n-j} z^j$  er-

laubt es nun, den Inhalt des Buches besser zu umreißen. Die in (1) auftretenden Koeffizienten  $\alpha_j$  werden Verblunsky-Koeffizienten genannt. Diese sind auch unter dem Namen Reflexionskoeffizienten, Schur-Koeffizienten, Szegö-Koeffizienten oder Geronimus-Koeffizienten bekannt. B. Simon argumentiert, warum diese Koeffizienten Verblunsky-Koeffizienten heißen sollten, und ver-

schafft somit S. Verblunsky, dessen Arbeiten weitgehend unbeachtet blieben, späte Genugtuung.

Ein zentrales Thema dieses Buches ist die Frage, wie die Eigenschaften eines nichttrivialen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  und  $\partial\mathbb{D}$  sich in den Verblunsky-Koeffizienten niederschlagen und umgekehrt.

Die ersten neun Kapitel ranken sich vornehmlich um sieben zentrale Theoreme, in denen Zusammenhänge zwischen den nichttrivialen Maßen auf  $\partial\mathbb{D}$  und den zugehörigen Verblunsky-Koeffizienten hergestellt werden.

Diese sieben zentralen Theoreme sind die Theoreme von Szegő, Verblunsky, Geronimus, Baxter und Rakhmanov, wobei allein mit Szegő's Namen drei Theoreme verbunden sind. Eines der Szegő'schen Theoreme, das sogenannte 1. Szegő'sche Grenzwerttheorem, stellte ursprünglich ein Theorem über das asymptotische Verhalten von Toeplitzmatrizen dar. Für seine Formulierung benötigen wir den bekannten Fakt, dass jedes (nichttriviale) Maß  $\mu$  auf  $\partial\mathbb{D}$  nach dem Radon-Nikodym Theorem in die Summe zweier Maße zerlegt werden kann, wovon eines absolut stetig und das andere singular bezüglich des auf 1 normierten Lebesgue'schen Maßes ist.

Dies kann kompakt durch

$$d\mu(\theta) = w(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s(\theta) \quad (2)$$

ausgedrückt werden, wobei die (nichtnegativen) Funktion  $w$  zu  $L^1(\partial\mathbb{D}, d\theta)$  gehört. Jedem nichttrivialen Maß  $\mu$  auf  $\partial\mathbb{D}$  ordnen wir eine Folge komplexer Zahlen  $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ , nämlich seine Momente

$$c_n = \int e^{-in\theta} d\mu(\theta)$$

zu und erklären  $c_n$  für  $n < 0$  durch  $c_n = \bar{c}_n$ . Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß erhalten wir damit gerade die Fourier-Koeffizienten dieses Maßes. Damit sind für alle  $n \geq 0$  die Toeplitzmatrizen

$$T^{(n)}(\mu) := (c_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$$

erklärt; sei  $D_n(d\mu) = \det(T^{(n+1)}(\mu))$ .

Das ursprünglich von Szegő bewiesene Theorem (1915) besagt nun Folgendes: Sei  $\mu$  ein nichttriviales Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\partial\mathbb{D}$  und  $w$  durch (2) gegeben. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}(\mu)}{D_n(\mu)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_n(\mu)} = \exp\left(\int \log w(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}\right), \quad (3)$$

und zwar unabhängig davon, ob das auftretende Integral gleich  $-\infty$  oder endlich ist. Interessant ist dabei der Umstand, dass in (2) die singuläre Komponente des Maßes  $\mu$  keine Rolle spielt. Szegő's Theorem in diesem Buch beinhaltet folgende Aussage:

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 - |\alpha_j|^2) = \exp \int \log w(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) ist ersichtlich, dass mindestens 4 Größen einander gleich sind. Im 2. Kapitel wird diese Liste um weitere sieben Größen ergänzt, die sämtlich nichttrivial sind und interessante Schlaglichter auf diesen Gegenstand werfen.

Obwohl diese Thematik nur einen (kleinen) Teil des gesamten Buches einnimmt, habe ich sie exemplarisch angeführt, da sie etwas vom Geist und Stil dieses Buches vermittelt: Der Autor nähert sich dem jeweiligen Themenkreis von verschiedenen Seiten und entwirft von ihm ein weitestgehend komplettes und detailliertes Bild. Dabei wird möglichen Verallgemeinerungen und Zusammenhängen nachgegangen, verschiedene Zugänge werden diskutiert und dem Leser interessante geschichtliche Fakten nahegebracht. Bisweilen wird ein Thema später erneut aufgegriffen und weitergeführt. Ein markantes Beispiel ist das sogenannte starke Szegő'sche Grenzwerttheorem, das in Kapitel 6 ausgiebig diskutiert wird.

Damit sind die drei mit dem Namen von Szegő verknüpften Theoreme bereits genannt. Verblunsky's Theorem (auch Farvord's Theorem für den Kreis genannt) beinhaltet die interessante Tatsache, dass die Zu-

ordnung  $\mu \mapsto \{\alpha_j\}$  eine eindeutige Zuordnung zwischen der Menge aller auf  $\partial \mathbb{ID}$  definierten nichttrivialen Wahrscheinlichkeitsmaße und der Menge aller Folgen  $\times_{j=0}^{\infty} \mathbb{ID}$  darstellt, deren Glieder Elemente aus  $\mathbb{ID}$  sind. Golinsky's Theorem beleuchtet den Zusammenhang zwischen nichttrivialen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\partial \mathbb{ID}$  und Schurfunktionen. Dieses besagt, dass die Schurparameter  $\{\gamma_j\}$  der Schurfunktion  $f$ , die einem nichttrivialen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  zugeordnet ist, gerade die Verblunsky-Koeffizienten des Maßes  $\mu$  sind. Baxter's Theorem führt aus, dass die Verblunsky-Koeffizienten  $\{\alpha_j\}$  eines nichttrivialen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  genau dann die Bedingung  $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$  erfüllt, wenn

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty, \quad c_j := \langle z^j, 1 \rangle = \int e^{-ij\theta} d\mu(\theta),$$

und

$$\inf\{w(e^{i\theta}) : e^{i\theta} \in \partial \mathbb{ID}\} > 0$$

gilt. Rakhmanov's Theorem behauptet schließlich, dass aus  $w(\theta) > 0$  fast überall  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 0$  folgt.

Die Aussagen dieser Theoreme werden ausführlich analysiert, ihre Konsequenzen und Hintergründe beleuchtet und für ihre Beweise verschiedene Zugänge vorgeschlagen. Allein für Verblunsky's Theorem werden fünf Beweise angegeben, die sich im Verlauf der Darlegungen natürlich ergeben. Neben diesen Dingen werden selbstredend die Punkte diskutiert, die kanonisch zur Theorie der orthogonalen Polynome gehören, vor allem Aussagen über die Verteilung der Nullstellen der Polynome  $\Phi_n$  und die schwache Konvergenz der Maße  $|\varphi_n(e^{i\theta})|^{-2} \frac{d\theta}{2\pi}$  gegen  $\mu$ .

Das Buch selbst ist in zwei Teile aufgegliedert, stellt aber eine Einheit dar, d. h. diese Aufspaltung ist dem Umfang dieses Werkes geschuldet. Der zweite Teil beschäftigt sich verstärkt mit dem, was der Autor unter Spektraltheorie versteht. Hier sind mehrere Aspekte im Spiel. In Analogie zur Klassifizierung der Punkte des Spektrums eines uni-

tären Operators werden anhand der Zerlegung  $d\mu = w \frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s$  eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf  $\partial \mathbb{ID}$  bez. des Lebesque'schen Maßes die Begriffe absolut stetiger, singulärer, singular stetiger und reiner Punktteil des Maßes  $d\mu$  eingeführt. Diese Teile des Maßes werden intensiv studiert anhand qualitativer Vorgaben an die Verblunsky-Koeffizienten. Das Gleiche bezieht sich auf den wesentlichen Träger des Maßes. Als Beispiele seien folgende Aussagen angeführt.

**Satz.** Seien  $\mu, \mu'$  zwei nichttriviale Wahrscheinlichkeitsmaße und  $\{\alpha_j\}, \{\alpha'_j\}$  ihre Verblunsky-Koeffizienten:

1. Wenn  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\alpha_j - \alpha'_j| = 0$ , dann stimmen die wesentlichen Spektren (= wesentlichen Träger) überein.
2. Wenn  $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j - \alpha'_j| < \infty$ , dann stimmen die Mengen  $\{\theta : w(\theta) \neq 0\}, \{\theta : w'(\theta) \neq 0\}$  bis auf die Mengen vom Lebesque'schen Maße 0 überein.

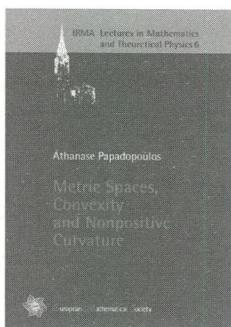
Diese Theoreme können als Teil einer allgemeinen Störungstheorie angesehen werden, die im Buch entwickelt wird. Als eine wesentliche Methode für das Studium einer derartigen Spektraltheorie tritt die Übersetzung analoger und schon früher bekannter Aussagen für eindimensionale Schrödingeroperatoren in Erscheinung. Dies beinhaltet auch, dass die bis 2003/2004 bekannten Resultate zur Spektraltheorie eindimensionaler Schrödingeroperatoren in diesem Buch ebenfalls ihren Niederschlag finden.

Simons Werk ist nicht nur ein Buch über orthogonale Polynome, sondern gleichermaßen über Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\partial \mathbb{ID}$ , eindimensionale Schrödingeroperatoren und Operatortheorie. Es ist außerordentlich komplex, vielschichtig, faszinierend und anregend, und dabei gut lesbar (selbst für Studenten höherer Semester). Diese Monographie wird, darin besteht nicht der geringste Zweifel, das Standardwerk zur Theorie der orthogonalen Polynome auf dem Ein-

heitskreis für einen beträchtlichen Zeitabschnitt werden.

Chemnitz

B. Silbermann



A. Papadopoulos  
**Metric Spaces,  
 Convexity and Non-  
 positive Curvature**  
 IRMA Lect. in Math.  
 and Theor. Physics 6

Zürich, Europ. Math. Soc., 2005, 287 S.,  
 € 48,-

Ein zentrales Thema der modernen metrischen Geometrie ist die Verallgemeinerung geometrischer Begriffsbildungen der klassischen Differentialgeometrie auf allgemeine metrische Räume. Beispielsweise hat das geometrische Verständnis Riemann'scher Mannigfaltigkeiten nicht positiver Schnittkrümmung zur Theorie der sogenannten *CAT(0)*-Räume geführt (hierbei steht 'CAT' für die Namen Cartan, Alexandrov und Toponogov). In diesen geodätischen metrischen Räumen sind geodätische Dreiecke dünner als ihre Vergleichsdreiecke in der Euklid'schen Ebene.

Während sich diverse Lehrbücher mit metrischen Räumen einer solchen nicht positiven Krümmung detailliert befassen, konzentriert sich Athanase Papadopoulos in seinem Buch in erster Linie auf die etwas allgemeineren geodätischen metrischen Räume nicht positiver Krümmung im Sinne von Busemann. Solche Räume sind dadurch ausgezeichnet, dass Abstandsfunktionen entlang zweier geodätischer Segmente konvex sind.

Nach einer kurzen Einleitung, die die historischen Zusammenhänge der Arbeiten von

Hadamard, Menger, Busemann und Alexandrov in Bezug auf den Begriff der nicht positiven Krümmung geodätischer metrischer Räume erläutert, beginnt der Autor in den ersten beiden Kapiteln systematisch damit, die Theorie der Längenräume und der geodätischen metrischen Räume zu entwickeln. Hierbei legt er einerseits großen Wert auf Präzision, veranschaulicht andererseits neue Begriffe stets mit zahlreichen Beispielen. Für ein eingehenderes Studium vieler dieser Beispiele sind die gegebenen Referenzen ebenso interessant wie dafür, einen historischen Überblick zu bekommen. Die Beweise sämtlicher Aussagen werden vollständig ausgeführt, ohne dass Beweislücken durch das Heranziehen anderer Literatur geschlossen werden müssten. Ein jedes Kapitel schließt mit weiteren historischen Bemerkungen und diesem Stil, der sowohl für das Selbststudium von Studenten, als auch für Wissenschaftler, die das eine oder andere Detail nachschlagen wollen, geeignet ist, bleibt der Autor durchgängig treu.

Im dritten Kapitel widmet er sich den Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Lipschitz Abbildungen, bi-Lipschitz Homöomorphismen, nicht kontrahierende und nicht expandierende Abbildungen, Isometrien und lokale Isometrien werden nicht nur eingeführt und veranschaulicht. Vielmehr wird sofort damit begonnen, mit ihnen zu arbeiten. Neben vielen anderen interessanten klassischen Resultaten werden u. a. auch der Banach'sche Fixpunktsatz und der Satz von Freudenthal-Hurewicz bewiesen. Schließlich folgt eine Einführung in die Theorie der Überlagerungen.

Im vierten Kapitel werden zunächst der hinlänglich bekannte Hausdorff Abstand und der etwas weniger geläufige Busemann-Hausdorff Abstand zwischen Teilmengen metrischer Räume diskutiert. Im Anschluss daran führt der Autor verwandte Konstruktionen von Metriken auf Isometriegruppen metrischer Räume ein.

Die folgenden drei Kapitel widmen sich diversen Aspekten der Konvexität. Das

fünfte Kapitel beinhaltet affin konvexe Mengen in Vektorräumen, die konvexe Kern- und die konvexe Hülle-Konstruktion, normierte Vektorräume, Grenzwerte konvexer Mengen und Hilbert Geometrien. Konvexe Funktionen werden im sechsten Kapitel diskutiert. Hier sind die zentralen Aussagen, die bewiesen werden, die, dass die Menge der Punkte, an der eine konvexe Funktion nicht differenzierbar ist, abzählbar ist, und dass die lokale Konvexität einer Funktion schon ihre Konvexität impliziert. Das siebte Kapitel behandelt normierte Vektorräume mit strikt konvexem Einheitsball; die Standardbeispiele metrischer Räume also, die (mit Ausnahme des Euklid'schen Raumes) nicht positiv gekrümmt im Sinne von Busemann, nicht aber im Sinne von Alexandrov sind.

Im achten Kapitel werden Busemann Räume explizit definiert, viele äquivalente Charakterisierungen solcher Räume vorgestellt und konvexe Funktionen auf diesen Räumen betrachtet.

Das neunte Kapitel befasst sich dann mit lokal konvexen Räumen und sogenannten 'local to global' Argumenten. Die zentralen Aussagen, die hier bewiesen werden, sind einerseits der Überlagerungssatz von Alexander und Bishop und andererseits ein Satz von Gromov, der besagt, dass ein einfach zusammenhängender Längenraum, der vollständig, lokal kompakt und lokal konvex ist, ein Busemann Raum ist.

Im zehnten Kapitel wird der visuelle Rand eines punktierten metrischen Raumes eingeführt. Für eigentliche Busemann Räume ist dieser Rand schließlich von der Punktierung selber unabhängig. Auf der Vereinigung eines solchen eigentlichen Busemann Raumes und seinem Rand wird eine Topologie definiert.

Das elfte Kapitel behandelt Isometrien metrischer Räume. Parabolische, elliptische, hyperbolische und axiale Isometrien werden eingeführt und diskutiert; zunächst ganz allgemein und dann im Speziellen für Busemann Räume. Für diese wird z. B. gezeigt,

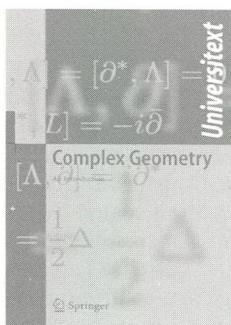
dass eine Isometrie genau dann hyperbolisch ist, wenn sie axial ist.

Im zwölften und letzten Kapitel werden Busemann Funktionen, Ko-Strahlen und Horosphären eingeführt. All diese wichtigen Begriffe gehen auf Busemann selber zurück, und das Kapitel schließt mit noch offenen Fragestellungen, die Ko-Strahlen und Horosphären im Teichmüller Raum betreffen.

Mit diesem Buch ist es Athanase Papadopoulos sicherlich gelungen, eine für Studenten sehr gut nachvollziehbare Darstellung der nicht positiven Krümmung metrischer Räume im Sinne von Busemann zu geben. Auf dem Weg dorthin lernt der Leser all das über Längenräume, geodätische Räume, konvexe Mengen und konvexe Funktionen, was er zum Verständnis der letzten Kapitel wissen muss, was aber auch ganz unabhängig von dem in den letzten Kapiteln behandelten Stoff von Interesse ist. Insbesondere die vielen Beispiele, die mit vollständigen Referenzen zum eingehenderen Studium angegeben sind, werden nicht nur für Studenten interessant sein. Dabei ist es dem Autor besonders wichtig, immer wieder auf Sachverhalte in der Theorie der Teichmüller Räume hinzuweisen, aber auch Hilbert Geometrien, Kobayashis Pseudoabstand, Carathéodorys Pseudoabstand und Floyds Rand einer endlich erzeugten Gruppe gehören neben vielen anderen zu den nicht trivialen Beispielen, die sich durch den gesamten Text ziehen. Das Buch ist sehr sorgfältig geschrieben und der Aufbau keinesfalls zufällig, sondern sehr gut durchdacht. Alles in allem hat es sehr großen Spaß gemacht, darin zu lesen.

Bonn

T. Foertsch



D. Huybrechts  
**Complex Geometry**

Berlin u. a., Springer, 2005, 301 S., € 49,95

Komplexe Geometrie ist das Studium von (oft kompakten) komplexen Mannigfaltigkeiten mit analytischen (transzendenten), algebraischen oder topologischen Methoden. Es gibt auch viele Beziehungen zur theoretischen Physik (Stringtheorie, Calabi-Yau, ...). Dadurch ist das Gebiet sehr attraktiv, aber aufgrund der Vielzahl der Methoden auch nicht so leicht zugänglich. Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in die komplexe Geometrie von einem analytischen Standpunkt aus. An Vorkenntnissen werden nur die Funktionentheorie einer Variablen, etwas über differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ein paar grundlegende Dinge über Garben (aber nichts über Kohärenz) benötigt. Das Buch kann also durchaus als Vorlage für eine Vorlesung für Studenten bereits des fünften Semesters dienen, jedenfalls im bewährten Diplomstudiengang Mathematik.

Zum Inhalt: In einem einführenden Kapitel werden grundlegende Dinge über holomorphe Funktionen mehrerer Variablen, über komplexe und hermitesche Strukturen (punktale Theorie) sowie über Differentialformen bereitgestellt. Das zweite Kapitel führt komplexe Mannigfaltigkeiten ein mit vielen Beispielen und bespricht grundlegende Konzepte (Divisoren etc). Diese beiden Kapitel nehmen etwa ein Drittel des Buches ein. Das erste zentrale Kapitel (3) handelt von Kählermannigfaltigkeiten: Kählermetri-

ken, Hodgetheorie und Lefschetzsätze. Die Endlichkeit der Kohomologie auf kompakten Mannigfaltigkeiten wird dabei vorausgesetzt. Kapitel 4 bespricht hermitesche Metriken auf holomorphen Vektorbündeln, deren Krümmung und Chernklassen – in einem Anhang werden Hermite-Einstein-Metriken und Kähler-Einstein-Metriken gestreift. Im 5. Kapitel wird zunächst der Satz von Riemann-Roch vorgestellt, natürlich ohne Beweis, sodann wird der Kodaira'sche Verschwindungssatz bewiesen und der Kodaira'sche Einbettungssatz abgeleitet. Das letzte Kapitel gibt schließlich eine kurze Einführung in die Theorie der Deformationen komplexer Strukturen.

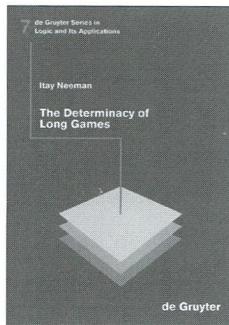
Der Inhalt des besprochenen Buches deckt sich in großen Teilen mit dem Inhalt der Monographie „Differential analysis on complex manifolds“ von R. O. Wells von ca. 1980, es ist aber, nach meiner Meinung, leichter lesbar. Eine andere, elementarere Einführung ist das neulich renovierte Buch von Fritzsche und Grauert. Auf dem Markt gibt es dann noch ein Buch von Kobayashi mit einer etwas anderen, mehr differential-geometrischen Stoßrichtung (hin zu Kähler-Einstein), natürlich den Schinken von Griffiths-Harris (weit darüber hinausgehend, aber weniger präzise) und das nur auf dem web vorhandene exzellente Buch von Demainly. Hier lasse ich natürlich Werke aus der algebraischen Geometrie unberücksichtigt, und selbstredend gibt es noch einiges andere, wie Douay-Verdier, was ich hier nicht erwähne. Man sieht, dass der Markt durchaus nicht üppig bestückt ist, und dass das gut geschriebene Buch von Huybrechts hier zwar keine Lücke füllt, aber eine wichtige willkommene neue Quelle bietet. Wertvoll sind übrigens auch die vielen schönen Übungsaufgaben und die vielen Beispiele.

Huybrechts' Buch stellt im Wesentlichen grundlegende Methoden der komplexen Geometrie vor. Was man natürlich eigentlich möchte, ist, Mannigfaltigkeiten zu „verstehen“, zu klassifizieren, zu beschreiben. Dazu liefert das Buch – naturgemäß – nicht

so viel, es stellt vielmehr wichtige Voraussetzungen bereit, zu den eigentlichen Aufgaben der komplexen Geometrie vorzustoßen.

Bayreuth

Th. Peternell



Itay Neeman  
**The Determinacy  
of Long Games**

Berlin, de Gruyter Verlag, 2005, 317 S.,  
€ 128,-

Das Buch „The Determinacy of Long Games“ von Itay Neeman untersucht das Zusammenspiel von großen Kardinalzahlen und Determiniertheit von Spielen abzählbarer Länge. Bei den Spielen, die untersucht werden, wählen zwei Spieler abwechselnd eine natürliche Zahl und produzieren auf diese Weise eine Folge natürlicher Zahlen einer gewissen Länge  $\alpha < \omega_1$ . Ist diese Folge ein Element einer vorher festgelegten ko-analytischen Menge  $C$ , so gewinnt Spieler 1, ansonsten gewinnt Spieler 2. Das Spiel ist determiniert, wenn einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt. Unter der Annahme der Existenz großer Kardinalzahlen entwickelt Neeman einen Werkzeugkasten und zeigt mit dessen Hilfe die Determiniertheit dieser Spiele.

Das Buch beginnt mit einer Einleitung, welche die Geschichte der Determiniertheitsresultate in der Mengenlehre beschreibt: Ausgehend von dem ersten Beweis von Gale-Stewart im Jahr 1953, dass offene Spiele determiniert sind, wird der Bogen gespannt

über Borel-Determiniertheit von Martin und projektive Determiniertheit von Martin-Steel bis hin zum Inhalt dieses Buches. Ideen früherer Beweise, ihre Grenzen und aus dem Verständnis der Grenzen entwickelte neue Techniken werden präsentiert. Dabei wird insbesondere auf das steigende Bewusstsein der Rolle großer Kardinalzahlen eingegangen. Des Weiteren wird die Motivation, die Determiniertheit langer Spiele zu untersuchen, dargelegt: Die Determiniertheit eines Spieles der Länge  $\omega$  mit einer projektiven Menge als Gewinnmenge für Spieler 1 ist nichts anderes als die Determiniertheit eines transfiniten Spieles einer gewissen Länge  $\omega \cdot n$  mit einer ko-analytischen Gewinnmenge. Die Zulassung einer beliebigen abzählbaren Spiellänge unter Beibehaltung der Komplexität der Gewinnmenge ist eine mögliche Richtung der Generalisierung des Resultates über die projektive Determiniertheit von Martin-Steel.

Die Grundidee, die Determiniertheit langer Spiele zu zeigen, ist, sie auf sogenannte Iterationsspiele zurückzuführen, wie sie bereits im Beweis der projektiven Determiniertheit von Martin-Steel zu finden sind. Die Technik der Iterationsspiele wird von Neeman weiterentwickelt, um stärkere Determiniertheitsresultate zu erhalten.

In Kapitel 1 wird der Grundstock für den Rest des Buches gelegt: es werden Basisdefinitionen und -techniken eingeführt.

In den anderen Kapiteln werden drei Arten von langen Spielen untersucht. Kapitel 2 handelt von Spielen, deren Länge vorab fixiert ist. Die Determiniertheit dieser Spiele liefert als Spezialfall die projektive Determiniertheit. In Kapitel 3 werden komplexere Spiele eingeführt. Es handelt sich um Spiele variabler Länge, wobei die Länge stetig kodiert ist. Zunächst wird der Baire-Raum, d. h. der Raum der Folgen natürlicher Zahlen der Länge  $\omega$ , in abzählbar viele Partitionen unterteilt. Jedesmal nach  $\omega$ -vielen Zügen ist eine Folge  $y_\xi = \langle y_\xi(i) \mid i < \omega \rangle$  entstanden, welche zu einer dieser Partitionen gehört. Sobald eine Partition zweimal getrof-

fen wird, endet das Spiel. Da die Länge des Spieles nicht vorab feststeht, erfordert die Konstruktion einer Gewinnstrategie genügend „Luft“, um auf die flexible Länge reagieren zu können. Dies wird erreicht durch die Anwendung von Extendern, welche bereits geplante Spielzüge hoch genug liften, so dass ihre Bilder später durch einen nächsten Extender wieder geliftet werden können.

Die restlichen Kapitel des Buches befassen sich mit Spielen, deren Länge eine lokale Kardinalzahl ist, d. h. eine Ordinalzahl, welche in einer vorgegebenen Menge von definierbaren Funktionen keine Bijektion mit  $\omega$  besitzt. Die große technische Schwierigkeit hierbei besteht darin, diese Spiele nicht mehr wie in den vorigen Kapiteln durch lineare Iterationen in den Griff bekommen zu können. Um die Determiniertheit der Spiele zu zeigen, werden nicht-lineare Iterationen betrachtet. In diesem Zusammenhang wird eine Reihe von Werkzeugen entwickelt, welche in einem komplexen Zusammenwirken letztendlich das gewünschte Determiniertheitsresultat liefern. Dieser Teil des Buches ist der bei weitem anspruchsvollste Teil.

Das Buch ist gut geschrieben, insbesondere die Einleitung ist lesenswert. Durch das gesamte Buch hinweg werden Ideen klar motiviert, bevor sie formalisiert werden und ein technischer Beweis erfolgt. Einige Kapitel werden mit Übungen ergänzt.

Das Buch richtet sich an fortgeschrittene Studierende sowie Spezialisten. Zum Verständnis des Buches ist es notwendig, Grundwissen in der Theorie der großen Kardinalzahlen sowie in Forcing zu besitzen. Grundlegende Begriffe und Theoreme werden in einem Anhang in Erinnerung gerufen.

Edinburgh

S. Quickert

# Aktuelles der Mathematik



## Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

**W. Dahmen, A. Reusken, RWTH Aachen**

- Weitgehende Einführung in alle wesentlichen grundlegenden numerischen Methodenbausteine
- Viele Querverweise konzeptioneller Art
- Zahlreiche illustrierende Beispiele helfen, den konkreten Ablauf von Methoden zu vermitteln und konkrete Bezüge herzustellen
- Zahlreiche Übungsaufgaben am Ende jedes Kapitels

2., korr. Aufl. 2008. XVIII, 633 S. 125 Abb., 5 in Farbe. (Springer-Lehrbuch) Brosch.

ISBN 978-3-540-76492-2

► € (D) 29,95 | € (A) 30,80 | \*sFr 49,00



## Mathematische Modellierung

**C. Eck, Universität Bielefeld; H. Garcke, Universität Regensburg; P. Knabner, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg**

- Lebendige und anschauliche Einführung in die mathematische Modellierung
- Vorlage für Vorlesungen auf unterschiedlichem Niveau durch Auswahl geeigneter Kapitel
- Einziges Buch zum Thema im deutschsprachigen Raum
- Hat das Potential zu einem Standardwerk

1. Aufl. 2008. XIV, 503 S. 86 Abb. (Springer-Lehrbuch) Brosch.

ISBN 978-3-540-74967-7

► € (D) 29,95 | € (A) 30,80 | \*sFr 49,00

Bei Fragen oder Bestellung wenden Sie sich bitte an ► Springer Distribution Center GmbH, Haberstr. 7, 69126 Heidelberg

► Telefon: +49 (0) 6221-345-4301 ► Fax: +49 (0) 6221-345-4229 ► Email: SDC-bookorder@springer.com ► € (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt; € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt. Die mit \* gekennzeichneten Preise für Bücher und die mit \*\* gekennzeichneten Preise für elektronische Produkte sind unverbindliche Preisempfehlungen und enthalten die landesübliche MwSt. ► Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten.

► Springer-Verlag GmbH, Handelsregisteramt: Berlin-Charlottenburg, HR B 91022. Geschäftsführer: Haank, Mos, Hendriks

013612X



## Wahrscheinlichkeitstheorie

**A. Klenke, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz**

- Umfassende moderne Einführung in die wichtigsten Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer maßtheoretischen Grundlagen
- Im Gegensatz zu anderen modernen deutschsprachigen Büchern über Wahrscheinlichkeitstheorie wird die Theorie voll entwickelt
- Breite und Auswahl der Themen sind einmalig in der deutschsprachigen Literatur
- Umfasst umfangreichen Index, Lebensdaten ausgewählter Mathematiker sowie ein Verzeichnis der wichtigsten Notationen

2., korr. Aufl. 2008. XII, 624 S. 34 Abb. Brosch.

ISBN 978-3-540-76317-8

► € (D) 39,95 | € (A) 41,07 | \*sFr 65,50



## Einführung in die Zahlentheorie

**P. Bundschuh, Universität zu Köln**

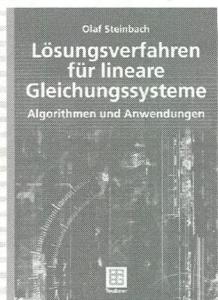
- Ausführliche Darstellung der wichtigsten Grundlagen
- Mit historischen Zusammenhängen und Entwicklungen
- Leichter Einstieg in die moderne Zahlentheorie

6., überarb. u. aktual. Aufl. 2008. XIV, 336 S. 9 Abb. (Springer-Lehrbuch) Brosch.

ISBN 978-3-540-76490-8

► € (D) 29,95 | € (A) 30,80 | \*sFr 49,00

# Lösungsverfahren in der Praxis: verständlich und effizient



Olaf Steinbach  
**Lösungsverfahren für  
lineare Gleichungssysteme**  
*Algorithmen und  
Anwendungen*  
2005, 200 S. Br. EUR 29,90  
ISBN 978-3-519-00502-5

## Inhalt

Grundlagen - Direkte Verfahren - Klassische Iterationsverfahren - Moderne Iterationsverfahren - Gleichungssysteme mit Blockstruktur - Hierarchische Matrizen

## Das Buch

Die Simulation technischer Prozesse erfordert in der Regel die Lösung von linearen Gleichungssystemen großer Dimension. Hierfür werden moderne vorkonditionierte Iterationsverfahren (z.B. CG, GMRES, BiCGStab) hergeleitet und die zur Realisierung notwendigen Algorithmen beschrieben. Für Systeme mit strukturierten Matrizen werden effiziente direkte Lösungsverfahren angegeben. Numerische Beispiele für praktische Problemstellungen illustrieren die Effizienz der vorgestellten Verfahren.

Teubner Lehrbücher:  
einfach clever



Abraham-Lincoln-Str. 46  
65189 Wiesbaden  
Fax 0611.7878-420  
[www.teubner.de](http://www.teubner.de)

# Teubner Studienbücher Wirtschaftsmathematik, hrsg. von Bernd Luderer



Albrecht Irle/Claas Prelle  
**Übungsbuch**  
**Finanzmathematik**  
*Leitfaden, Aufgaben und Lösungen zur Derivatbewertung*  
2007. 221 S. Br. EUR 24,90  
ISBN 978-3-8351-0086-2

Bernd Luderer/Uwe Würker  
**Einstieg in die**  
**Wirtschaftsmathematik**  
6., überarb. Aufl. 2005.  
443 S. Br. EUR 24,90  
ISBN 978-3-8351-0044-2

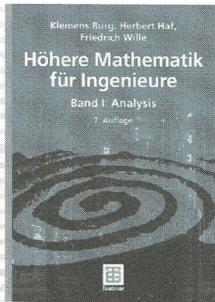
Klaus Neusser  
**Zeitreihenanalyse in den**  
**Wirtschaftswissenschaften**  
2006. XVI, 264 S. Br. EUR 29,90  
ISBN 978-3-8351-0117-3

Heidrun Matthäus/  
Wolf-Gert Matthäus  
**Mathematik für BWL-Bachelor**  
*Schritt für Schritt mit ausführlichen Lösungen*  
2006. 318 S. Br. EUR 24,90  
ISBN 978-3-8351-0099-2

Stephan Dempe/  
Heiner Schreier  
**Operations Research**  
*Deterministische Modelle und Methoden*  
2006. 381 S. Br. EUR 34,90  
ISBN 978-3-519-00448-6



# Mathematik in Beispiel, Theorie und Anwendung



Klemens Burg/Herbert Haf/  
Friedrich Wille

## Höhere Mathematik für Ingenieure Band I

### Analysis

7., überarb. u. erw. Aufl. 2006.  
XVIII, 604 S. mit 230 Abb. Br.  
EUR 39,90

ISBN 978-3-8351-0045-9

### Inhalt

Grundlagen: Reelle Zahlen; Elementare Kombinatorik; Funktionen; Unendliche Folgen reeller Zahlen; Unendliche Reihen reeller Zahlen; Stetige Funktionen - Elementare Funktionen - Differentialrechnung einer reellen Variablen - Integralrechnung einer reellen Variablen - Folgen und Reihen von Funktionen - Differentialrechnung mehrerer reeller Variablen - Integralrechnung mehrerer reeller Variablen

Burg/Haf/Wille  
**Höhere Mathematik  
für Ingenieure Band II**

Lineare Algebra  
5., überarb. u. erw. Aufl. 2007.  
XVIII, 415 S. Br. EUR 39,90  
ISBN 978-3-8351-0111-1

### Inhalt

Vektoren in der Ebene - Vektoren im dreidimensionalen Raum - Vektorräume - Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus - Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper - Vektorräume über beliebigen Körpern - Matrizenmultiplikation - Reguläre und inverse Matrizen - Determinanten - Spezielle Matrizen - Lineare Gleichungssysteme und Matrizen - Eigenwerte und Eigenvektoren - Die Jordansche Normalform - Matrix-Funktionen - Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen - Lineare Ausgleichsprobleme - Technische Strukturen - Roboter-Bewegungen

Burg/Haf/Wille

## Höhere Mathematik für Ingenieure Band III

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen  
4., durchges. u. erw. Aufl.  
2002. XIV, 437 S. Br. EUR 39,90  
ISBN 978-3-519-32957-2

### Inhalt

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Differentialgleichungen n-ter und Systeme 1. Ordnung - Ebene autonome Systeme - Lineare Differentialgleichungen - Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten - Potenzreihenansätze und Anwendungen - Rand- und Eigenwertprobleme - Distribution: Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs - Rechnen mit Distributionen - Anwendungen - Integraltransformationen: Fouriertransformation - Hilberttransformation - Diskrete und Schnelle Fouriertransformation - Laplacetransformation

Teubner Lehrbücher:  
einfach clever



Abraham-Lincoln-Str. 46  
65189 Wiesbaden  
Fax 0611.7878-420  
[www.teubner.de](http://www.teubner.de)



# Mathematikunterricht wird zum Erlebnis!



Stephan Hußmann/  
Brigitte Lutz-Westphal (Hrsg.)

## Kombinatorische Optimierung erleben

In Studium und Unterricht  
Unter Mitarbeit von Andreas Brieden,  
Peter Gritzmann, Martin Grötschel,  
Timo Leuders.

2007. XVI, 311 S. Br. EUR 29,90  
ISBN 978-3-528-03216-6

### INHALT

Kürzeste Wege - Minimale aufspannende Bäume - Das chinesische Postbotenproblem - Das Travelling-Salesman-Problem - Färbungen - Kombinatorische Spiele - Matchings - Flüsse in Netzwerken - Das P-NP Problem - Kombinatorische Optimierung für die Landwirtschaft

### DAS BUCH

Kombinatorische Optimierung ist allgegenwärtig: Ob Sie elektronische Geräte oder Auto-Navigationssysteme verwenden, den Mobilfunk nutzen, den Müll von der Müllabfuhr abholen lassen oder die Produkte einer effizient arbeitenden Landwirtschaft konsumieren, immer steckt auch Mathematik dahinter. Dieses Buch gibt eine Einführung in die wichtigsten Themen der kombinatorischen Optimierung. Alle diese Themen werden problemorientiert aufbereitet und mit Blick auf die Verwendung im Mathematikunterricht vorgestellt. So wird Lehrerinnen und Lehrern, Studierenden im Grundstudium und anderen Interessierten der Zugang zu einem angewandten Gebiet der modernen Mathematik ermöglicht, das sich an vielen Stellen im Alltag wieder findet.

Die Autoren zeigen in diesem Lehr-, Lern- und Arbeitsbuch, wie Mathematik zum Erlebnis werden kann, in Schule, Studium oder Selbststudium.



Abraham-Lincoln-Straße 46  
65189 Wiesbaden  
Fax 0611.78 78-420  
[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)

Auf lösungen, auf Wissen!  
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag

