107. Band Heft 1, März 2005

D 20577

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

1 – 2005

Herausgegeben von K. Hulek
unter Mitwirkung von
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar

Teubner

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. K. Hulek zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:
B. G. Teubner Verlag/GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:
Eva Brechtel-Wahl
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: eva.brechtel-wahl@gwv-fachverlage.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 107,– (172,90 sF o. MwSt.) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Wilhelm & Adam, Heusenstamm

ISSN 0012-0456

Inhalt

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 107. Bd. 2005, Nr. 1

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 107. Bd. 2005, Nr. 1

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

G. Winkler, O. Wittich, V. Liebscher, A. Kempe: Don't Shed Tears over Breaks
E. Kaniuth, G. Schlichting: Nachruf auf Prof. Dr. Elmar Thoma

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Mathematik, Universität Hannover,
Welfengarten 1, 30167 Hannover
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth
E-Mail: rambau@zib.de

Prof. Dr. A. Schied, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
E-Mail: schied@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig, Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 107. Bd. 2005, Nr. 1

Vorwort

Zunächst möchte ich Herrn A. Krieg und allen Mitgliedern des Herausgebergremiums des Jahresberichts sehr herzlich für die geleistete Arbeit danken. Dem neuen Herausgebergremium, das zu Beginn diesen Jahres seine Tätigkeit aufgenommen hat, gehören einige Kolleginnen und Kollegen des alten Teams an; zugleich ist es aber auch gelungen, neue Mitglieder zu gewinnen, die in den nächsten Monaten ihre Ideen zur Gestaltung des Jahresberichts einbringen werden.

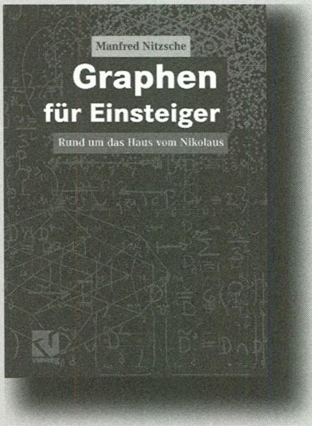
Der Jahresbericht wird auch weiterhin versuchen, ein möglichst weites Spektrum der Mathematik abzudecken. Dies schließt bewusst Bereiche der Anwendungen ebenso ein wie Berichte über Themen der Grundlagenforschung. Neben die Rubriken „Übersichtsartikel“, „Historisches“ und „Buchbesprechungen“ wird ab sofort noch die Sparte „Berichte aus der Forschung“ treten. Den Anfang dieser Beiträge wird in einem der nächsten Hefte ein Aufsatz über die Arbeit des Matheon in Berlin bilden.

Vor knapp zwei Jahren fand eine Befragung der Leserinnen und Leser des Jahresberichts statt, deren Ergebnisse mir Frau Schmickler-Hirzebruch vom Teubner-Verlag freundlicherweise zur Verfügung gestellt hat. Gerne werde ich einige der hier geäußerten Anregungen aufnehmen. Darüberhinaus bin ich für jeden Wunsch und jede Kritik dankbar, die mich von interessierten Lesern erreicht. Besonders würde ich mich auch über Vorschläge zu den Bereichen „Mathematik in der Industrie“ und „Mathematik in der Schule“ freuen.

In diesem Heft finden Sie einen Aufsatz von V. Strassen über „Komplexität und Geometrie bilinearer Abbildungen“ sowie einen Nachruf auf Professor Dieter Gaier von M. von Renteln. Ergänzt werden beide Beiträge durch eine Reihe von aktuellen Buchbesprechungen.

K. Hulek

Mathematik - aktuell und verständlich



Manfred Nitzsche
Graphen für Einsteiger
Rund um das Haus vom Nikolaus

2004. XII, 233 S. Br. EUR 22,90
ISBN 3-528-03215-4

INHALT

Erste Graphen - Über alle Brücken: Eulersche Graphen - Durch alle Städte: Hamiltonsche Graphen - Mehr über Grade von Ecken - Bäume - Bipartite Graphen - Graphen mit Richtungen - Körper und Flächen - Farben

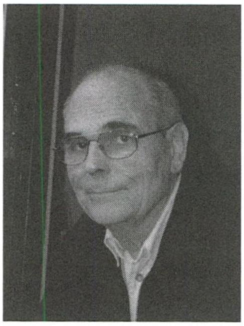
DAS BUCH

Die Graphentheorie gehört wie die gesamte diskrete Mathematik zu den Gebieten der Mathematik, die sich heute am stärksten entwickeln, zum Teil angestoßen durch Erfordernisse der Praxis, aber auch aus rein mathematischem Interesse. Dieses Buch soll dazu beitragen, dass die Verfahren und Ergebnisse der Graphentheorie unter Nicht-Fachleuten stärker beachtet werden. Es ist deshalb so geschrieben, dass es im Wesentlichen mathematisch exakt, aber auch ohne mathematische Vorkenntnisse verständlich und vor allem leicht lesbar ist. In Beispielen wird die Denkweise der modernen Mathematik nachvollziehbar und es werden auch Probleme dargestellt, die heute noch ungelöst sind.

vieweg

Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420

Änderungen vorbehalten.
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.



Komplexität und Geometrie bilinearer Abbildungen

Volker Strassen

Abstract

- Keywords and Phrases: algebraic complexity theory, numerical linear algebra, matrix multiplication, bilinear map, rank, degeneration, asymptotic spectrum, reductive linear group, geometric representation theory, moment map
- Mathematics Subject Classification: 12Y05, 14L24, 15A69, 22E46, 53D20, 65Y20, 68 Q17, 68W30

Complexity and degeneration of bilinear maps may be described asymptotically by a single data structure: the asymptotic spectrum. We give an introduction to this theory. As a red thread we use ω, the exponent of matrix multiplication.

Eingegangen: 01.01.2004, in überarbeiteter Form am 07.03.2004

Volker Strassen, Universität Konstanz;
Oskar-Pletsch-Straße 12, 01324 Dresden

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

Dies ist die schriftliche Ausarbeitung eines Vortrags für ein allgemeines mathematisches Publikum, den ich zuletzt auf der Jahrestagung der DMV in Dresden gehalten habe. Die Fussnoten richten sich an Leser, die es genauer wissen wollen, der Anhang ist eine Einladung an anwendungsinteressierte Algebraiker und Geometer, sich in den Gegenstand einzuarbeiten. Im Anhang gebe ich kurze neue Beweise für einige Resultate des Haupttextes, stelle Vermutungen auf und Beziehungen zu anderen Themen her.

1 Matrixmultiplikation

Wie schnell lassen sich grosse Matrizen multiplizieren, etwa über den komplexen Zahlen? Die Frage wird auf den Punkt gebracht durch den so genannten *Exponenten* ω der Matrixmultiplikation:

(1) $\omega := \inf\{\tau : L(\mathbb{C}^{m\times m}) = O(m^\tau)\}.$

Hier steht $\mathbb{C}^{m\times m}$ für die Multiplikationsabbildung m-reihiger Matrizen, und $L(\mathbb{C}^{m\times m})$ bezeichnet ihre Komplexität, deren natürliche Definition die minimale Anzahl arithmetischer Operationen ist, die zur Berechnung des Produkts zweier generischer Matrizen ausreicht.[1]

Das Natürliche ist nicht immer das Bequeme. Im Folgenden wollen wir beliebige lineare Operationen, also Additionen von Zwischenresultaten und Multiplikationen von solchen mit Elementen des Grundkörpers, kostenlos zur Verfügung stellen und L entsprechend interpretieren. Diese von Alexander Ostrowski vorgeschlagene Bewegungsfreiheit bietet erhebliche technische Vorteile und hat keinen Einfluss auf die Werte asymptotischer Exponenten wie ω.

[1] Das in dieser Arbeit verwendete algebraische Berechnungsmodell gründet auf der Vorstellung eines gewöhnlichen endlichen Computers, der allerdings mit der Fähigkeit ausgestattet ist, Zahlen aus einer Klasse zugelassener Grundkörper exakt zu speichern und arithmetische Operationen oder Verzweigungen der Form „$f = 0$“ in je einem Schritt exakt auszuführen. Das Ergebnis ist nach einer beschränkten Anzahl von Schritten ebenfalls exakt abzuliefern. Es können deshalb nur algebraische Aufgabenstellungen behandelt werden. Bei gegebener Gewichtung der Rechenoperationen (zum Beispiel =1) versteht man unter der Komplexität einer solchen Aufgabe den minimalen zu ihrer Lösung hinreichenden Rechenaufwand. In der Regel hängt der Aufwand eines Algorithmus von der Eingabe ab, so dass man zunächst über diese zu maximieren hat. Bei der Auswertung von Polynomen und rationalen Funktionen verwendet man statt dessen meist Unbestimmte als Eingaben und schliesst Verzweigungen aus. Auf diese Weise erhält man die *generische* Komplexität, das heisst den minimalen Aufwand für „fast alle“ Eingaben.

Wir nehmen den generischen Standpunkt ein. Die Hauptresultate dieser Arbeit sind nicht nur über $\mathbb{C}$, sondern über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper gültig, der numerische Wert von ω mag aber von der Charakteristik abhängen. Die für die Anwendungen wichtige Klasse aller endlichen Körper ist automatisch mitberücksichtigt: Sie erweist sich als gleichwertig mit dem (einzigen) Grundkörper $\mathbb{C}$.

Das algebraische Berechnungsmodell und die zugehörigen Komplexitätsbegriffe sind das definitorische Rüstzeug der *Algebraischen Komplexitätstheorie*. Eine grundlegende Darstellung findet man in der Monographie „Algebraic Complexity Theory“ von P. Bürgisser, M. Clausen und A. Shokrollahi [8]. Den Schwerpunkt dieses Buches bilden die unteren Komplexitätsschranken. Algorithmische Aspekte werden auch in der Monographie „Modern Computer Algebra“ von J. von zur Gathen und J. Gerhard [16] vortrefflich behandelt.

Die praktische Bedeutung der Matrixmultiplikation resultiert vor allem aus ihrer zentralen Rolle in der Numerischen Linearen Algebra. So lässt sich zeigen, dass die Matrixinversion, die Auswertung der Determinante, die Berechnung aller Koeffizienten des charakteristischen Polynoms, die Konstruktion verschiedener Normalformen von Matrizen sämtlich den gleichen asymptotischen Exponenten besitzen wie die Matrixmultiplikation [32], [28], [2], [21].

Die Beweise hierfür beruhen auf der Idee der Reduktion eines Problems auf ein anderes. Um etwa zu zeigen, dass die Determinantenberechnung nicht viel aufwändiger ist als die Matrixmultiplikation, organisiert man einen Standard-Algorithmus zur Determinantenauswertung als rekursive Prozedur entlang einer Blockzerlegung mit Blöcken ungefähr der halben Matrizengrösse. Das wird so gemacht, dass auf jeder Ebene der Rekursion im Wesentlichen nur eine konstante Anzahl von Matrixmultiplikationen halber Grösse ausgeführt werden muss zusammen mit zwei Aufrufen der Prozedur, also zwei Determinantenberechnungen für Matrizen halber Grösse. Man sieht leicht, dass das zu der gewünschten Ungleichung zwischen den Exponenten führt. In ähnlicher, wenn auch bisweilen komlizierterer Weise kann man jedes der oben genannten Probleme auf die Matrixmultiplikation reduzieren.

Reduktionen in der umgekehrten Richtung sind nicht immer so naheliegend. Zum Beispiel ist nicht klar, welchen Nutzen ein schneller Determinantenalgorithmus bei der Multiplikation von Matrizen haben könnte, schon deshalb, weil das letztere Problem die Auswertung vieler Funktionen (der Koeffizienten der Produktmatrix) erfordert, während die Determinantenberechnung nur eine einzige Funktion liefert. Trotzdem ist eine effiziente Reduktion möglich, und zwar auf Grund der folgenden Ungleichung für die Komplexität eines Polynoms $f = f(x_1, \dots, x_n)$ und seiner Ableitungen (Baur-Strassen [2]):

$$(2) \quad L(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \leq 3 \cdot L(f).$$

Die Ungleichung wurde ursprünglich bewiesen, um nicht-triviale untere Komplexitätsschranken für *einzelne* Polynome mit Hilfe der Gradschranke [33] zu gewinnen: Diese schätzt die Komplexität von Polynomen $f_1, \dots, f_r$ in Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ nach unten ab durch den binären Logarithmus des algebraisch-geometrischen Grades des Graphen der durch $(f_1, \dots, f_r)$ vermittelten polynomialen Abbildung $\mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^r$.[2] Die Gradschranke liefert die besten Resultate, wenn n und r gleichzeitig gross sind. So erhält man zum Beispiel untere Komplexitätsabschätzungen der Grössenordnung $n \log n$ für die Berechnung der Koeffizienten eines Polynoms vom Grade n aus seinen Nullstellen (elementarsymmetrische Funktionen), die Auswertung eines Polynoms vom Grade n an n Stellen und die Berechnung des Interpolationspolynoms vom Grad n aus n Stützstellen und zugehörigen Werten.[3]

[2] Der algebraisch-geometrische Grad ist die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen mit einem generischen affinen Unterraum von $\mathbb{C}^{n \times r}$ der Dimension r. Gradschranke und Ungleichung (2) sind auch für rationale Funktionen $f_1, \dots, f_r$ richtig.

[3] Beim hier verwendeten Ostrowki-Modell haben die Abschätzungen die optimale Grössenordnung.

Andererseits ist der Grad des Graphen eines einzigen Polynoms einfach der Grad des Polynoms, so dass eine triviale Komplexitätsschranke resultiert. Hier kommt die Ungleichung (2) ins Spiel, indem die Komplexität von f zunächst durch die Komplexität von f zusammen mit seinen ersten Ableitungen nach unten abgeschätzt und erst darauf die Gradschranke angewandt wird. Auf diese Weise erhält man untere Abschätzungen der Grössenordnung $n \log n$ für die Komplexität verschiedener interessanter Einzelpolynome, wie die Potenzsumme $\sum_{i=1}^{n} x_i^n$, die Diskriminante $\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)$ und jede elementarsymmetrische Funktion im mittleren Bereich [2]. Die gleiche Abschätzung ergibt sich für die Interpolation an einer einzigen Stelle [31].

Die Anwendung der Ungleichung (2) auf die Determinantenfunktion zeigt, dass es nicht viel schwieriger ist, die Determinante einer Matrix der Ordnung m zusammen mit allen Minoren der Ordnung $m-1$ zu berechnen, als die Determinante allein. Nach der Cramerschen Regel ist also die Matrixinversion nicht viel schwieriger als die Determinantenauswertung. Ein alter Trick reduziert die Matrixmultiplikation auf die Matrixinversion:

$$\begin{pmatrix} I & A & \\ & I & B \\ & & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A & AB \\ & I & -B \\ & & I \end{pmatrix}.$$

Hier bedeuten A, B Matrizen der Ordnung m und I die entsprechende Einheitsmatrix. Also lassen sich Matrizen der Ordnung m mittels der Inversion einer Matrix der Ordnung $3m$ multiplizieren.[4] Kombiniert man die drei beschriebenen Reduktionen, so sieht man, dass ein schneller Determinantenalgorithmus eine schnelle Matrixmultiplikation nach sich zieht, wie behauptet wurde.

Kehren wir zum Exponenten ω zurück. Der Standardalgorithmus zur Matrixmultiplikation zeigt, dass 3 in der Konkurrenzmenge des Infimums in (1) liegt, woraus $\omega \leq 3$ folgt. Klar ist andererseits $\omega \geq 2$, da jeder Multiplikationsalgorithmus m^2 linear unabhängige Funktionen zu berechnen hat, nämlich die Koeffizienten der Produktmatrix. Keine untere Schranke > 2 ist bekannt, schlimmer noch: Es könnte $L(\mathbb{C}^{m \times m}) = O(m^2)$ gelten.

Die folgende Tabelle zeigt die bisherigen Fortschritte bei der Abschätzung des Exponenten von oben zusammen mit Hinweisen auf verallgemeinerungsfähige theoretische Konzepte, die hierzu entwickelt wurden.

[4] Tatsächlich ist das Argument nicht zwingend für das hier verwendete generische Berechnungsmodell, da man zulassen muss, dass der Gültigkeitsbereich eines solchen Algorithmus bei Verwendung von Divisionen kleiner ist als der Definitionsbereich (hier $GL(m, \mathbb{C})$) der zu berechnenden rationalen Abbildung (hier die Matrixinversion). Ein schneller Algorithmus für die Matrixinversion könnte deshalb auf *keiner* Matrix definiert sein, die die Form der linken Seite der obigen Matrixgleichung hat. Diese Schwierigkeit kann durch ein Störungsargument behoben werden [34], wenigstens für den Vergleich der asymptotischen Exponenten.

$\omega <$			
2,81	(1969)	[32]	*Rang*
2,79	(1979)	[25]	
2,78	(1979)	[5], [4]	*Grenzrang*
2,55	(1981)	[29]	τ – *Theorem*
2,53	(1981)	[26]	
2,52	(1982)	[27]	
2,50	(1982)	[9]	
2,48	(1987/8)	[36], [37]	*Asymptotisches Spektrum*
2,38	(1990)	[10]	*Randomisierung*

2 Bilineare Abbildungen

Wir betrachten nun beliebige bilineare Abbildungen

$$f : U \times V \longrightarrow W$$

zwischen endlich-dimensionalen komplexen Vektorräumen. Interessante solche Abbildungen gibt es wie Sand in der Wüste; ich erinnere nur an die Multiplikation in assoziativen Algebren oder in Liealgebren. In diesen Fällen verwenden wir die Bezeichnung der Algebra auch für deren Strukturabbildung, schreiben also zum Beispiel $\mathbb{C}^{m\times m}$ für die Multiplikation m-reihiger Matrizen, $\mathbb{C}^n$ für die koordinatenweise Multiplikation von Vektoren in $\mathbb{C}^n$ und, falls $F \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom vom Grade n ist, $\mathbb{C}[T]/(F)$ für die Multiplikation modulo F von Polynomen vom Grad $< n$.

$f \simeq g$ bedeute, dass f und g isomorph sind. Ein Isomorphismus ist natürlich durch *drei* (mit f und g verträgliche) lineare Isomorphismen gegeben. Sind aber f und g Multiplikationsabbildungen assoziativer Algebren mit 1, so erweist sich $f \simeq g$ als gleichwertig mit der Isomorphie dieser Algebren.

Die *direkte Summe* $f \oplus g$ ist in kanonischer Weise definiert: Man schaltet f und g parallel. Für Multiplikationsabbildungen von Algebren entspricht das dem direkten Produkt der Algebren. Als einfache Illustration diene ein Spezialfall des Chinesischen Restsatzes:

$$(3) \quad \mathbb{C}[T]/(T^n - \gamma) \simeq \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^n$$

für $\gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0$.

Auch das *Tensorprodukt* $f \otimes g$ zweier bilinearer Abbildungen verallgemeinert den entsprechenden Begriff für assoziative Algebren. $f \otimes g$ besitzt eine „Blockzerlegung" derart, dass jeder Block bis auf eine Skalierung wie g aussieht, während der Überbau der Skalierungen durch f modelliert ist. Man veranschaulicht sich das am besten an einem Beispiel: Matrixmultiplikation der Ordnung $2m$ kann als Multiplikation 2-reihiger Matrizen angesehen werden, deren Koeffizienten keine komplexen Zahlen, sondern Matrizen der Ordnung m sind. Diese Tatsache können wir in der Sprache der Tensorprodukte elegant so ausdrücken:

$$\mathbb{C}^{2m\times 2m} \simeq \mathbb{C}^{2\times 2} \otimes \mathbb{C}^{m\times m},$$

woraus durch Induktion

(4) $\mathbb{C}^{2^\nu \times 2^\nu} \simeq (\mathbb{C}^{2\times 2})^{\otimes \nu}$

folgt. Verallgemeinernd und etwas vergröbernd können wir sagen, dass grosse Matrixmultiplikationen hohe Tensorpotenzen von kleinen Matrixmultiplikationen sind. Das wird uns später nützlich sein.

3 Restriktion und Rang

Was verstehen wir unter der Komplexität einer bilinearen Abbildung $f : U \times V \longrightarrow W$? Die naheliegende Definition ist: Man wähle Basen für U, V, W; dann ist die Komplexität $L(f)$ von f bezüglich dieser Basen der minimale Rechenaufwand, der zur Berechnung der Koordinaten von $f(u, v)$ aus den Koordinaten von u und v ausreicht. Wie gut, dass wir Linearkombinationen kostenlos verwenden dürfen: $L(f)$ hängt nicht von der Basenwahl ab, wir haben es mit einer Invariante der Abbildung f zu tun.

Die explizite Definition von $L(f)$ ist ein wenig langatmig, da sie auf dem Berechnungsbegriff fusst. Wir machen den Leser nun mit einem Komplexitätsmass für bilineare Abbildungen vertraut, das eine einfachere Definition besitzt als $L(f)$, bei asymptotischen Betrachtungen mit $L(f)$ aber völlig gleichwertig ist. Eine bilineare Abbildung $f : U \times V \longrightarrow W$ heisst *Restriktion* einer weiteren $f' : U' \times V' \longrightarrow W'$, wenn es lineare Abbildungen $\alpha : U \to U'$, $\beta : V \to V'$ und $\gamma : W' \to W$ gibt mit

(5) $f(u, v) = \gamma f'(\alpha u, \beta v)$.

Wir schreiben dafür $f \leq f'$. Ist f Restriktion von f', so lässt sich f durch einen einzigen Aufruf von f' zusammen mit (für uns kostenlosen) linearen Operationen berechnen. Dies führt uns auf das oben angekündigte Komplexitätsmass, die *bilineare Komplexität* oder der *Rang* von f:

(6) $R(f) := \min\{r : f \leq \mathbb{C}^r\}$.

Die Abbildung $\mathbb{C}^r$ steht für r Zahlenmultiplikationen. Aus $f \leq \mathbb{C}^r$ können wir deshalb folgern, dass sich f mit r Multiplikationen (nebst linearen Operationen, aber ohne Divisionen) berechnen lässt. Insbesondere haben wir damit die erste der folgenden Ungleichungen eingesehen:

(7) $L(f) \leq R(f) \leq 2L(f)$.

Der Beweis der zweiten reduziert sich im Wesentlichen auf den Nachweis, dass wir bei der Berechnung bilinearer Abbildungen auf Divisionen verzichten können, ohne den kostenpflichtigen Rechen-Aufwand zu vergrössern [34]. Aus (7) ergibt sich die asymptotische Gleichwertigkeit von Rang und Komplexität, insbesondere

(8) $\omega = \inf\{\tau : R(\mathbb{C}^{m\times m}) = O(m^\tau)\}$.

Wir empfehlen unseren Lesern, für das Folgende einfach den Rang als Komplexitätsmass zu akzeptieren und sich nicht weiter um den ursprünglichen Berechnungsbegriff zu kümmern.

Die Definitionen (5) und (6) gehen auf Gastinels Untersuchung [15] der Struktur des Algorithmus zur Matrixmultiplikation in [32] zurück. Eine äquivalente Definition des Rangs findet sich in [34].[5]

Seine grössere Einfachheit ist nicht der einzige Vorteil des Rangbegriffs gegenüber dem der Komplexität; R hat auch bessere formale Eigenschaften als L, nämlich

(10) $R(f \oplus g) \leq R(f) + R(g)$,

(11) $R(f \otimes g) \leq R(f) \cdot R(g)$.

Die Subadditivität wird von der Komplexität geteilt, bei der Submultiplikativität hingegen versagt die Komplexität völlig. Nun ist es gerade diese Eigenschaft, mit der sich schnelle Algorithmen zur Matrixmultiplikation gewinnen lassen: Angenommen wir haben ein gute obere Abschätzung für den Rang irgendeiner kleinen Matrixmultiplikation, zum Beispiel $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Induktive Anwendung von (11) liefert dann eine gute Abschätzung des Rangs hoher Tensorpotenzen von $\mathbb{C}^{2\times 2}$, also nach (4) grosser Matrixmultiplikationen. Nach (8) sind solche Abschätzungen aber gerade das, was für eine gute obere Schranke für ω gebraucht wird. Allgemein zeigt der Gedankengang[6]

(12) $R(\mathbb{C}^{m\times m}) \leq r \Longrightarrow m^{\omega} \leq r$.

Diese Implikation führte im Verein mit $R(\mathbb{C}^{2\times 2}) \leq 7$ zur ersten nichttrivialen Abschätzung des Matrix-Exponenten: $\omega < 2,81$.

4 Degeneration und Grenzrang

Nachdem wir einen zweckmässigen Komplexitätsbegriff für bilineare Abbildungen entwickelt haben, wenden wir uns ihrer Geometrie zu. Der Raum aller bilinearen Abbildungen $U \times V \longrightarrow W$ zerfällt in Isomorphieklassen.[7] Jede Isomorphieklasse ist offen in ihrem Abschluss. Beim Abschliessen wird also ihr Rand disjunkt hinzugefügt. Er besteht wieder aus vollen Isomorphieklassen. Ein wichtiges geometrisches Thema ist die Frage, welche Isomorphieklassen im Rand von welchen anderen liegen. Man spricht dann von *Degeneration* oder *Entartung*, wobei wir als entartete Entartung noch die Gleichheit der Isomorphieklassen einschliessen wollen. Das führt unmittelbar auf die folgende Definition: f ist Degeneration von g ($f \trianglelefteq g$), wenn f der Limes isomorpher Kopien von g ist.

Sind f und g isomorph, so haben die Räume, auf denen f erklärt ist, zwingend die gleichen Dimensionen wie die entsprechenden Räume von g. (Wir wollen sagen: f und g haben das gleiche *Format*.) Diese starre Situation wird aufgelockert durch den Begriff der *Äquivalenz*: f und g heissen *äquivalent*, wenn $f \oplus z_1 \simeq g \oplus z_2$ für geeignet dimensionierte Nullabbildungen z_1 und z_2. Wir erlauben uns also auf beiden Seiten einer Äquiva-

[5] Identifizieren wir f mit seinem Strukturtensor $f \in U^* \otimes V^* \otimes W$, so ist

(9) $R(f) = \min\{r : \exists p_i \in U^*, q_i \in V^*, w_i \in W \ f = \sum_i p_i \otimes q_i \otimes w_i\}$

[6] Mit Blick auf spätere Verallgemeinerungen ziehen wir (12) der gleichwertigen und kürzeren Formulierung $m^{\omega} \leq R(\mathbb{C}^{m\times m})$ vor.

[7] Das sind einfach die Bahnen der Gruppe $GL(U) \times GL(V) \times GL(W)$ unter der Wirkung $((\alpha, \beta, \gamma)f)(u, v) = \gamma f(\alpha^{-1}u, \beta^{-1}v)$.

lenz, zunächst die Räume ohne Schaden für die Abbildung zu vergrössern, um so für gleiches Format zu sorgen.

Auch in der Definition der Degeneration wollen wir zulassen, dass f und g zuvor durch äquivalente Abbildungen ersetzt werden, so dass sie nicht a priori gleiches Format zu haben brauchen.[8] Hier ist ein Beispiel für die Degeneration (bei dem eine solche Anpassung nicht nötig ist):

(13) $\mathbb{C}[T]/(T^n) \trianglelefteq \mathbb{C}^n$,

denn für jede Nullfolge (γ_j) nichtverschwindender komplexer Zahlen gilt einerseits

$$\mathbb{C}[T]/(T^n - \gamma_j) \longrightarrow \mathbb{C}[T]/(T^n)$$

für $j \to \infty$ (plausibel), andererseits ist $\mathbb{C}[T]/(T^n - \gamma_j) \simeq \mathbb{C}^n$ nach (3). Die hinter dem n-ten Koeffizienten abgeschnittene Polynom- oder Potenzreihenmultiplikation $\mathbb{C}[T]/(T^n)$ ist also Degeneration der koordinatenweisen Multiplikation in $\mathbb{C}^n$. Für $n \geq 2$ sind diese beiden Abbildungen keineswegs isomorph (nicht einmal äquivalent), denn sonst wären nach einer früheren Bemerkung die zugehörigen Algebren isomorph, während doch nur eine von ihnen nicht-triviale nilpotente Elemente besitzt.

Restriktion ebenso wie Degeneration sind Präordnungen (reflexiv und transitiv), und die Restriktion impliziert die Degeneration.[9] Es liegt deshalb nahe, in Analogie zu (6) ein Funktional $\underline{R}$ durch

(14) $\underline{R}(f) := \min\{r : f \trianglelefteq \mathbb{C}^r\}$

zu definieren. $\underline{R}(f)$ bezeichnet man als *Grenzrang* von f. Ein Beispiel kennen wir schon:

$$\underline{R}(\mathbb{C}[T]/(T^n)) \leq n,$$

denn das ist gleichbedeutend mit (13).[10]

Rang und Grenzrang sind nahe Verwandte: $\underline{R}$ ist die grösste unterhalbstetige Funktion $\leq R$. Damit folgt aus (10) und (11) leicht, dass auch der Grenzrang subadditiv und submultiplikativ ist. Überraschender ist, dass in (8) der Rang ebenfalls durch den Grenzrang ersetzt werden darf (Bini [4]). Damit ergibt sich wie beim Rang eine Methode zur Abschätzung von ω:

(15) $\underline{R}(\mathbb{C}^{m\times m}) \leq r \Longrightarrow m^{\omega} \leq r$.

Besitzt der Grenzrang Vorteile gegenüber dem Rang? Ja, denn einmal ist $\underline{R}(f)$ manchmal strikt kleiner als $R(f)$, so dass (15) effektiver ist als (12). Zum andern stellt die Definition

[8] Bei Räumen gleichen Formats tritt dadurch nichts Neues hinzu.

[9] Dass Restriktion und Degeneration nicht identisch sind, sieht man an (13).

[10] In (13) wird die Algebra $\mathbb{C}[T]/(T^n)$ durch isomorphe Kopien der Algebra $\mathbb{C}^n$ approximiert, die selbst wieder Algebren und deshalb als Algebren isomorph zu $\mathbb{C}^n$ sind. Im Allgemeinen muss man bei der Degeneration von Algebren als bilinearen Abbildungen die Kategorie der Algebren verlassen.

Zum Beispiel würde sonst aus $f \trianglelefteq \mathbb{C}^n$ folgen, dass f kommutativ ist, denn Kommutativität ist eine abgeschlossene Eigenschaft, die unter Algebrenisomorphie erhalten bleibt. Tatsächlich ist aber jede bilineare Abbildung, insbesondere jede Algebra, Degeneration von $\mathbb{C}^n$ für genügend grosses n. Das gilt für die Restriktion, wie man aus der Definition (9) abliest, und die Restriktion impliziert die Degeneration.

(14) einen Bezug zur geometrischen Darstellungstheorie her, so dass der etwas enge Pfad der Komplexitätstheorie der Matrixmultiplikation sich zu einer breiteren Landschaft mathematischer Kompetenz und Schönheit öffnet. (Siehe zum Beispiel Kraft [22].)

Der Begriff des Grenzrangs wurde in analytischer Form von Bini, Capovani, Lotti, Romani [5] eingeführt.[11] Diesen Autoren selbst gelang mit Hilfe von (15) nur eine kleine Verschärfung von $\omega < 2,81$, nämlich $\omega < 2,78$, deren Eindrücklichkeit von einer kurz vorher von Pan [25] erzielten Ungleichung $\omega < 2,79$ noch geschmälert wird. Während aber Pans Methode ohne nachhaltige Wirkung blieb, wurde der Begriff des Grenzrangs der Ausgangspunkt aller folgenden Untersuchungen und führte in den Händen von Schönhage bald zu einem Quantensprung bei der Abschätzung von ω. Schönhages methodische Innovation, das sogenannten τ-Theorem [29], ist eine Verallgemeinerung von (15):

$$(16) \quad \underline{R}\Big(\bigoplus_i \mathbb{C}^{m_i \times m_i}\Big) \leq r \Longrightarrow \sum_i m_i^{\omega} \leq r.$$

Das τ-Theorem unterscheidet sich von (15) durch die Einbeziehung direkter Summen. Wäre der Grenzrang additiv statt nur subadditiv, so wäre das τ-Theorem eine einfache numerische Konsequenz von (15). Wie die Dinge liegen, musste Schönhage eine neuartige Rekursionstechnik entwickeln, um (16) zu beweisen. Umgekehrt könnte man die Gültigkeit des τ-Theorems als eine Art asymptotischer Rückendeckung für die Additivität des Grenzrangs ansehen. Überraschenderweise zeigt Schönhage in der gleichen Arbeit an einem Beispiel, dass der Grenzrang nicht additiv ist. Der Schwerpunkt dieses Beispiels ist eine Grenzrangabschätzung, die die Form der Prämisse des τ-Theorems hat; setzt man diese Grenzrangabschätzung in das τ-Theorem ein, so erhält man $\omega < 2,55$.[12]

[11] Die geometrische Definition (14) findet sich in [36], siehe auch [35] und Alder [1].

[12] Tatsächlich formulieren und beweisen Bini, Capovani, Lotti, Romani und Schönhage ihre Resultate nicht nur für quadratische, sondern für beliebige rechteckige Matrixmultiplikationen: Mit der Schönhage-Notation

$$\langle m, p, q\rangle : \mathbb{C}^{m\times p} \times \mathbb{C}^{p\times q} \to \mathbb{C}^{m\times q}$$

für die Multiplikation von $(m \times p)$- mit $(p \times q)$-Matrizen lautet die allgemeine Fassung von Schönhages τ-Theorem

$$(17) \quad \underline{R}\Big(\bigoplus_i \langle m_i, p_i, q_i\rangle\Big) \leq r \Longrightarrow \sum_i (m_i p_i q_i)^{\omega/3} \leq r.$$

(17) kann durch Bildung von Tensorpotenzen aus (16) mit Hilfe eines Resultats von Hopcroft-Musinski [18] gefolgert werden. Dieses drückt die Symmetrieeigenschaften des Grenzrangs und des Matrixtensors aus:

$$(18) \quad \underline{R}\Big(\bigoplus_i \langle m_i, p_i, q_i\rangle\Big) = \underline{R}\Big(\bigoplus_i \langle p_i, q_i, m_i\rangle\Big).$$

Schönhages Grenzrangabschätzung, die einerseits die Additivität des Grenzrangs widerlegt und andererseits $\omega < 2,55$ liefert, ist

$$(19) \quad \underline{R}(\langle 4,1,4\rangle \oplus \langle 1,9,1\rangle) \leq 17.$$

Dabei sieht man leicht $\underline{R}(\langle 4,1,4\rangle) = 16$ und $\underline{R}(\langle 1,9,1\rangle) = 9$ ein.

Ausser in trivialen Fällen ist das τ-Theorem niemals scharf (d. h. in seiner Konklusion kann man stets $\leq$ durch $<$ ersetzen), wie Coppersmith-Winograd [9] aufgedeckt haben. Mit Hilfe einer quantitativen Fassung dieser Aussage gelang ihnen der Beweis der „Meilenstein-Abschätzung“ $\omega < 2,5$.

Nun wollen wir erklären, was wir unter asymptotischer Betrachtungsweise im Zusammenhang mit beliebigen bilinearen Abbildungen verstehen. Bei der Matrixmultiplikation gibt es kein Problem, weil diese Abbildungen eine unendliche Folge bilden. Eine natürliche Verallgemeinerung wird durch (4) nahegelegt: Wir können jede bilineare Abbildung f als das erste Glied der Folge ihrer Tensorpotenzen ansehen. Das führt auf die folgenden Definitionen des *Exponenten*

$$(20) \quad \omega(f) := \inf\{\tau : R(f^{\otimes\nu}) = O((2^\nu)^\tau)\}$$

und des *asymptotischen Rangs* (Gartenberg [14])

$$(21) \quad \underset{\sim}{R}(f) := \lim_{\nu} R(f^{\otimes\nu})^{1/\nu}.$$

Einfache Überlegungen zeigen

$$(22) \quad \underset{\sim}{R}(f) = 2^{\omega(f)}$$

und

$$(23) \quad \omega = \omega(\mathbb{C}^{2\times 2}).$$

Exponent und asymptotischer Rang von f spiegeln die Berechnungskomplexität hoher Tensorpotenzen von f wider: Statt R hätten wir auf Grund von (7) in beiden Definitionen auch L schreiben können. Wie beim Matrixexponenten dürfen wir R aber auch durch $\underline{R}$ ersetzen, ohne die Definitionen zu verfälschen.[13] Um einer Inflation der Begriffe vorzubeugen, wollen wir im Folgenden auf die Komplexität, den Rang und den Grenzrang verzichten zugunsten der Degeneration als Inbegriff der Geometrie und dem Exponenten (bzw. dem dazu äquivalenten asymptotischen Rang) als Inbegriff der Komplexität. Wie können wir dann Schönhages τ-Theorem (16) formulieren? Einfach so:

$$(24) \quad \bigoplus_i \mathbb{C}^{m_i\times m_i} \trianglelefteq \mathbb{C}^r \Longrightarrow \sum_i m_i^\omega \leq r.$$

5 Asymptotisches Spektrum

Inspiriert durch die K-Theorie verschieben wir unsere Aufmerksamkeit von individuellen bilinearen Abbildungen auf deren Äquivalenzklassen. Die Menge[14] dieser Klassen bezeichnen wir mit $\mathcal{B}$. Die direkte Summe und das Tensorprodukt bilinearer Abbil-

[13] Hierfür geben wir im Anhang (Satz 7) einen kurzen Beweis.
[14] Man repräsentiere jede Klasse durch eine Abbildung zwischen numerischen Räumen.

dungen induzieren Operationen in $\mathcal{B}$, die wir als Addition und Multiplikation deuten. So wird $\mathcal{B}$ zu einem kommutativen Semiring, mit der Klasse von $\mathbb{C}^0$ (triviale bilineare Abbildung) als Nullelement und der Klasse von $\mathbb{C}^1$ (Multiplikation in $\mathbb{C}$) als Einselement. Die Klasse von $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}$ ist nichts anderes als die natürliche Zahl $n = 1 + \ldots + 1$, interpretiert im Semiring $\mathcal{B}$.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, die Degeneration, den Exponenten und den asymptotischen Rang auf $\mathcal{B}$ zu übertragen. Auf diese Weise erhalten wir eine partielle Ordnung $\trianglelefteq$, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist, sowie zwei numerische Funktionen ω und $\underset{\sim}{R}$ auf $\mathcal{B}$. Um sparsam zu sein, wollen wir in Notation und Sprache keinen Unterschied machen zwischen bilinearen Abbildungen und ihren Äquivalenzklassen. Wir werden also wie bisher von Abbildungen sprechen, aber in der Regel deren Äquivalenzklassen meinen. So können wir auch die Formeln (22) bis (24) einfach übernehmen.

Auf Grund seiner Definition (21) erbt der asymptotische Rang die Eigenschaften, subadditiv und submultiplikativ zu sein, vom Rang. Es zeigt sich, dass $\underset{\sim}{R}$ eine zusätzliche Tugend besitzt: Nach Einschränkung auf irgendeinen Unter-Semiring von $\mathcal{B}$, der von einem einzigen Element f erzeugt wird, ist $\underset{\sim}{R}$ additiv und multiplikativ. Für $f = \mathbb{C}^{2\times 2}$ folgt das aus dem τ-Theorem, für beliebige f aus einer Verallgemeinerung seines Beweises.

Vielleicht kommt dem Leser in den Sinn, dass das Maximum-Funktional, etwa auf dem Semiring $C^+(\Delta)$ der nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum Δ, die gleichen Eigenschaften besitzt. (Offenbar ist es subadditiv und submultiplikativ. Ist ferner $f \in C^+(\Delta)$, so wird das Maximum dieser Funktion an einem Punkt $\delta \in \Delta$ angenommen. Der von f erzeugte Unter-Semiring von $C^+(\Delta)$ besteht aus allen nichtnegativ ganzzahligen Polynomen in f, die natürlich alle in δ maximal sind. Also stimmt das Maximum-Funktional auf diesem Unter-Semiring mit der Auswertung an der Selle δ überein und ist deshalb additiv und multiplikativ.)

Es besteht somit eine formale Analogie zwischen zwei ganz verschiedenen Situationen: Auf der einen Seite Klassen bilinearer Abbildungen mit einem Funktional, das auf deren Komplexität beruht, auf der andern Seite nichtnegative stetige Funktionen mit dem Maximum-Funktional. Gibt es vielleicht einen tieferen Zusammenhang?

In der Tat, und der Schlüssel dazu ist eine asymptotische Spielart der Degeneration, die wir *asymptotische Degeneration* nennen und mit $\underset{\sim}{\trianglelefteq}$ bezeichnen:

$$(25)\quad f \underset{\sim}{\trianglelefteq} g : \Longleftrightarrow f^{\otimes\nu} \trianglelefteq \bigoplus_{1}^{2^{o(\nu)}} g^{\otimes\nu}.$$

In Worten: f ist asymptotische Degeneration von g, wenn $f^{\otimes\nu}$ Degeneration einer direkten Summe von wenigen Kopien von $g^{\otimes\nu}$ ist.

Natürlich impliziert die Degeneration die asymptotische Degeneration. Auch letztere ist eine Partialordnung in $\mathcal{B}$, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist. Der fundamentale Unterschied zwischen $\trianglelefteq$ und $\underset{\sim}{\trianglelefteq}$ kommt erst zum Vorschein, wenn wir $\mathcal{B}$ zu einem Ring erweitern. Ähnlich wie der Semiring der natürlichen Zahlen eingebettet ist in den Ring der ganzen Zahlen, kann der Semiring $\mathcal{B}$ kanonisch eingebettet werden in einen kommutativen Ring $\mathcal{R}$, so dass $\mathcal{R} = \mathcal{B} - \mathcal{B}$.[15] Überraschenderweise lässt sich die asymptotische Degeneration $\precsim$ eindeutig zu einer mit den Ringoperationen verträglichen Partialordnung auf $\mathcal{R}$ fortsetzen. (Für die Degeneration ist das nicht möglich, wie Bürgisser [7] gezeigt hat). Diese Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit $\precsim$. Sie erfüllt eine technische Bedingung, die $\mathcal{R}$ in einen so genannten Stone-Ring verwandelt. Die Arbeit, die für einen Beweis dieser Tatsachen investiert werden muss, bringt einen erheblichen Mehrwert: Wir können die schöne Strukturtheorie für Stone-Ringe ins Spiel bringen, die von Stone, Kadison und Dubois [30], [20], [3] entwickelt wurde.

Um nicht immer alle möglichen bilinearen Abbildungen gleichzeitig im Auge behalten zu müssen, formulieren wir unser Hauptergebnis [37] relativ zu einem Untersemiring $\mathcal{S}$ von $\mathcal{B}$.

Spektralsatz 1. *Zu jedem Semiring $\mathcal{S}$ von bilinearen Abbildungen gibt es einen kompakten Raum $\Delta(\mathcal{S})$ und einen Homomorphismus*

$$\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow C^+(\Delta(\mathcal{S}))$$

von $\mathcal{S}$ in den Semiring der nichtnegativen stetigen Funktionen auf $\Delta(\mathcal{S})$ derart, dass $\varphi(\mathcal{S})$ Punkte trennt und dass gilt:

$$(26) \quad \forall f, g \in \mathcal{S} \qquad f \precsim g \Longleftrightarrow \varphi(f) \leq \varphi(g).$$

$\Delta(\mathcal{S})$ (zusammen mit φ) ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt und heisst das *asymptotische Spektrum* von $\mathcal{S}$. Sind $f_1, \ldots, f_q$ bilineare Abbildungen, so bezeichne $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$ das asymptotische Spektrum des von $f_1, \ldots, f_q$ erzeugten Semirings. Aus der Spektraltheorie folgt, dass $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$ eine natürliche Realisierung als kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^q$ besitzt.[16]

Offenbar gibt das asymptotische Spektrum erschöpfende Auskunft über die asymptotische Degeneration bilinearer Abbildungen: Sind $f, g \in \mathcal{S}$, so bestimme man $\varphi(f)$ und $\varphi(g)$. Gibt es dann einen Punkt $\delta \in \Delta$ mit $\varphi(f)(\delta) > \varphi(g)(\delta)$, so ist f keine Degene-

[15] Hierzu braucht man die additive Kürzungsregel. Nun gilt sogar: Jede bilineare Abbildung ist im Wesentlichen eindeutig bestimmte direkte Summe von direkt unzerlegbaren Abbildungen. (Für halbeinfache Algebren ist das die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Wedderburn.) Die additive Struktur von $\mathcal{B}$ ist also die eines freien kommutativen Monoids.

[16] Wie berechnet man diese Realisierung? Der von $f_1, \ldots, f_q$ erzeugte Semiring besteht aus allen $P(f_1, \ldots, f_q)$, wo $P(x_1, \ldots, x_q)$ ein Polynom mit natürlichen Koeffizienten ist. $\Delta(f_1, \ldots, f_q) \subset \mathbb{R}^q$ wird nun durch die Menge aller Ungleichungen zwischen Polynomen mit natürlichen Koeffizienten

$$(27) \quad P(x_1, \ldots, x_q) \leq Q(x_1, \ldots, x_q)$$

ausgeschnitten, für die gilt

$$(28) \quad P(f_1, \ldots, f_q) \trianglelefteq Q(f_1, \ldots, f_q).$$

Der Homomorphismus φ ordnet jeder bilinearen Abbildung $P(f_1, \ldots, f_q) \in \mathcal{S}$ die Einschränkung von $P(x_1, \ldots, x_q)$ auf $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$ zu; auf Grund der obigen Beschreibung von $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$ ist φ wohldefiniert.

Natürlich ist es in der Regel einfacher, äussere Abschätzungen von $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$ zu gewinnen als innere, denn im ersten Fall braucht man nur einzelne Degenerationen vom Typ (28) aufzuzeigen, während man sich im zweiten Fall gegen alle gleichzeitig wehren muss.

ration von g, nicht einmal eine asymptotische; ist andererseits $\varphi(f) \leq \varphi(g)$, so hat man wenigstens asymptotische Degeneration.

Aber auch der Exponent $\omega(f)$ lässt sich vom asymptotischen Spektrum ablesen, denn die früher beobachtete Analogie zwischen dem asymptotischen Rang und dem Maximum-Funktional erhärtet sich wie folgt:

Korollar 2. $\forall f \in \mathcal{S} \qquad 2^{\omega(f)} = \underset{\sim}{R}(f) = \max \varphi(f)$.

Der Spektralsatz in Verbindung mit dem Korollar weisen das asymptotische Spektrum gleichsam als magnetischen Nordpol aus, an dem sich sowohl die Geometrie der bilinearen Abbildungen als auch ihre Komplexität orientieren.

Wir haben früher bemerkt, dass der asymptotische Rang einer Abbildung f ebenso gut asymptotischer Grenzrang von f heissen könnte. Damit besitzt er auch eine geometrische Deutung, nämlich als geeignet normierte Minimalzahl von Zahlen-Multiplikationen, aus denen sich hohe Tensorpotenzen von f degenerieren lassen (im Limes). Als Eselsbrücke dürfen wir $\underset{\sim}{R}(f)$ vielleicht als *asymptotischen Preis* von f (in der Währung der Zahlen-Multiplikationen) interpretieren. In dieser Sprechweise lautet die zweite Gleichung des Korollars so:

(29) asymptotischer Preis von $f = \max \varphi(f)$.

Es gilt auch das gespiegelte Resultat:

(30) asymptotischer Wert von $f = \min \varphi(f)$,

wobei der *asymptotische Wert* von f die normierte *maximale* Anzahl von Multiplikationen beschreibt, die man aus hohen Tensorpotenzen von f durch Degeneration *herauspressen* kann. Natürlich liegt der Wert stets unter dem Preis, und das Verhältnis kann beliebig klein werden.[17]

6 Halbeinfache Algebren

Wenden wir die Spektraltheorie als Erstes auf den Semiring der halbeinfachen assoziativen Algebren an! Wie sieht sein asymptotisches Spektrum aus? Ein Satz von Wedderburn lehrt, dass die halbeinfachen Algebren über $\mathbb{C}$ bis auf Isomorphie gerade die direkten Summen von Matrixalgebren $\mathbb{C}^{m \times m}$ sind. Nach (4) sind grosse Matrixmultiplikationen „beinahe“ Tensorpotenzen von $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Der Semiring der halbeinfachen Algebren wird also „beinahe“ von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ erzeugt. Das genügt zum Nachweis, dass das asymptotische Spektrum der halbeinfachen Algebren kanonisch isomorph ist zum Spektrum der zweireihigen Matrixmultiplikation, also als kompakte Teilmenge der reellen Zahlengeraden realisiert werden kann. Mit der Abkürzung $\Delta := \Delta$(halbeinfache Algebren) erhalten wir

(31) $\Delta = \Delta(\mathbb{C}^{2\times 2}) \subset \mathbb{R}$,

[17] Zum Beispiel hat die Matrixmultiplikation $\langle 1, n, 1\rangle$ (Skalarprodukt) den asymptotischen Preis n und den asymptotischen Wert 1.

wobei die getroffene Identifikation zu folgender Beschreibung des Homomorphismus φ führt:

$$(32)\quad \varphi(\mathbb{C}^{n\times n}) = x^{\log_2 n}\Big|_\Delta.$$

Können wir einen Punkt von Δ aufspüren? Ja, den grössten, denn aus der obigen Beschreibung von Δ und φ folgt mit Korollar 2 und (23)

$$(33)\quad \max\Delta = \max\Delta(\mathbb{C}^{2\times 2}) = \max_{\Delta(\mathbb{C}^{2\times 2})} x = \max\varphi(\mathbb{C}^{2\times 2}) = 2^\omega,$$

inbesondere

$$(34)\quad 2^\omega \in \Delta.$$

Diese Tatsache, die sich fast mühelos aus der Spektraltheorie ergibt, erlaubt einen 3-Zeilen-Beweis des τ-Theorems (24), sogar in der folgenden verallgemeinerten Form:[18]

$$(35)\quad \bigoplus_i \mathbb{C}^{m_i\times m_i} \underset{\sim}{\trianglelefteq} \bigoplus_j \mathbb{C}^{n_j\times n_j} \Longrightarrow \sum_i m_i^{\,\omega} \le \sum_j n_j^{\,\omega}.$$

Das geht so: Zunächst liefert der Spektralsatz $\sum_i \varphi(\mathbb{C}^{m_i\times m_i}) \le \sum_j \varphi(\mathbb{C}^{n_j\times n_j})$, also nach (32)

$$(36)\quad \sum_i x^{\log_2 m_i} \le \sum_j x^{\log_2 n_j} \qquad \text{auf } \Delta.$$

Nun werte man an der Stelle $2^\omega \in \Delta$ aus.

Es ist nicht zu erwarten, dass wir Δ schon heute vollständig bestimmen können, denn wir kennen sein Maximum 2^ω nicht genau. Der nächste Satz [37] macht das Beste aus dieser Situation.

Satz 3. Δ(*halbeinfache Algebren*) $= [4, 2^\omega]$.

Bei Kenntnis des Matrix-Exponenten gibt der Satz vollständig Auskunft über die asymptotische Degeneration halbeinfacher Algebren. Aber auch ohne diese Annahme erhalten wir interessante Information, zum Beispiel, dass 4 der asymptotische Wert von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist. (Das kann man mit einer zu (33) gespiegelten Schlusskette einsehen.) Anders als der Zyniker, der nach Oskar Wilde von jedem Ding den Preis und von keinem den Wert kennt, wissen wir also über den asymptotischen Wert von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ genau Bescheid, während unser Blick auf den asymptotischen Preis durch unsere mangelhafte Kenntnis von ω getrübt ist.

Überraschenderweise können wir das linke Ende von Δ dazu benutzen, um das rechte Ende schärfer einzugrenzen, nämlich durch die Abschätzung $\omega < 2,48$. Das dabei verwendete Verfahren [36] heisst Laser-Methode, da es an die Erzeugung von Laser-Licht aus inkohärenter Quelle erinnert. Coppersmith-Winograd [10] haben die Laser-Methode vervollkommnet: Mit einer raffinierten probabilistischen Konstruktion bewiesen sie $\omega < 2,38$, den derzeitigen Weltrekord. (Siehe auch Bürgisser, Clausen, Shokrollahi [8].)

[18] Schönhages τ-Theorem (24) erhält man, wenn man alle $n_j = 1$ annimmt und in der Prämisse $\underset{\sim}{\trianglelefteq}$ durch das schärfere $\trianglelefteq$ ersetzt.

Der dornigste Teil des Beweises von Satz 3 besteht in dem Nachweis, dass auch die Punkte im Innern des Intervalls $[4, 2^\omega]$ zum Spektrum gehören. Diesen führen wir auf dem Umweg über das asymptotische Spektrum sämtlicher (auch nicht-quadratischer) Matrixmultiplikationen. Wir zeigen, dass dieses Spektrum, das als kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ realisiert werden kann, logarithmisch sternförmig ist. Daraus folgt leicht die Konvexität von Δ.

Kann man auch diese Information zur Abschätzung von ω benutzen? Ohne Zweifel! Wenden wir auf Satz 3 den Spektralsatz in Verbindung mit (32) an, so erhalten wir ein τ-Theorem für quadratische Matrixmultiplikationen, welches ich vollendet nennen möchte, denn es ist eine Äquivalenz von Aussagen und enthält zudem wirklich ein τ:[19]

$$(37) \quad \bigoplus_i \mathbb{C}^{m_i \times m_i} \underset{\sim}{\lhd} \bigoplus_j \mathbb{C}^{n_j \times n_j} \Longleftrightarrow \forall \tau \in [2, \omega] \quad \sum_i m_i{}^\tau \leq \sum_j n_j{}^\tau .$$

Hier liegt ungenutztes Kapital! Halbeinfache Algebren kommen in vielen Verkleidungen vor, nicht nur als direkte Summen von Matrixalgebren, sondern zum Beispiel auch als Gruppenalgebren beliebiger endlicher Gruppen oder als $A/rad(A)$ für beliebige assoziative Algebren A. Verkleidungen bedeuten Isomorphismen, und wo Isomorphismen sind, da sind auch Degenerationen.

7 Punkte im Spektrum

Das klingt wie „Leben auf dem Mars". Haben wir denn nicht gerade kontinuierlich viele Punkte im Spektrum der halbeinfachen Algebren gefunden, nämlich ein ganzes Intervall $[4, 2^\omega]$?

Nicht unbedingt: Ist $\omega = 2$ (zur Freude der Algorithmiker, zur Enttäuschung der Mathematiker), so verkümmert das Intervall zu einem einzigen trivialen Punkt, und schon ist die Mehrzahl „Punkte" fehl am Platz. In diesem Abschnitt wollen wir nachweisen, dass asymptotische Spektren im Allgemeinen nicht trivial sind.

Ebenso wie wir eine lineare Abbildung nach Basen-Wahl durch eine Matrix darstellen können, lässt sich eine bilineare Abbildung f durch eine räumliche Matrix beschreiben, den so genannten Koordinaten-Tensor (f_{ijk}) von f. Wir definieren den *Träger* von f als die Menge aller Tripel (i, j, k) mit $f_{ijk} \neq 0$. Die Abbildung f heisse *schräg*, wenn es Basen gibt, für die der Träger von f eine Antikette ist bezüglich der Produktordnung von $\mathbf{N}^3$. Das bedeutet, dass es keine zwei verschiedenen Punkte (i, j, k) und (p, q, r) im Träger von f gibt, so dass koordinatenweise gilt $(i, j, k) \leq (p, q, r)$. Nehmen wir zum Beispiel für die Abbildung $f = \mathbb{C}[T]/(T^n)$ zweimal die Basis $(1, T, \ldots, T^{n-1})$ (für U und V) und einmal die Basis $(T^{n-1}, \ldots, 1)$ (für W), so ist der Träger eine Antikette, nämlich $\{(i, j, k) \in \mathbf{N}^3 : i + j + k = n - 1\}$. Also ist $\mathbb{C}[T]/(T^n)$ schräg. Die schrägen Abbildungen bilden einen Semiring. Nach dem Chinesischen Restsatz sind deshalb alle

[19] Hat die linke Seite von (37) speziell die Gestalt $\bigoplus_i \mathbb{C}^{m_i \times m_i} \underset{\sim}{\lhd} \mathbb{C}^r$, so liefert (37) die Umkehrung von Schönhages τ-Theorem (24) nach Ersetzung der Degeneration durch die asymptotische Degeneration. Im Allgemeinen ist die Quantifizierung auf der rechten Seite von (37) natürlich nicht überflüssig.

$\mathbb{C}[T]/(F)$ schräg. Ebenso leicht sieht man, dass alle halbeinfachen Algebren schräg sind.

Sei nun θ ein Punkt im Standard-Zwei-Simplex (mit anderen Worten: $\theta \in \mathbf{R}^3$ sei ein Wahrscheinlichkeitsvektor) und sei f eine schräge Abbildung. Wir wählen Basen so, dass der Träger von f eine Antikette ist, und definieren

$$(38) \quad \zeta(\theta, f) := \max_P 2^{\sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P_\kappa)},$$

wobei P über alle Wahrscheinlichkeitsmasse auf dem Träger von f (einer Teilmenge von $\mathbf{N}^3$) variiert, die P_κ die drei Randverteilungen von P sind und H die Entropiefunktion bezeichnet. Es zeigt sich, dass $\zeta(\theta, f)$ nicht von der (zulässigen) Basenwahl abhängt, so dass wir ein Funktional $\zeta(\theta, -)$ auf dem Semiring aller schrägen bilinearen Abbildungen erhalten. Dieses Funktional erweist sich als Homomorphismus von Semiringen und als monoton bezüglich $\trianglelefteq$.[20]

Das genügt, um Folgendes zu zeigen: Sind $f_1, \ldots, f_q$ schräge bilineare Abbildungen, so ist $\zeta(\theta) := (\zeta(\theta, f_1), \ldots, \zeta(\theta, f_q)) \in \mathbf{R}^q$ ein Punkt des asymptotischen Spektrums $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$.[21] Es ist leicht zu sehen, dass $\zeta(\theta)$ stetig von θ abhängt; wir erhalten also ein singuläres 2-Simplex des kompakten Raumes $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$, das wir das *Träger-Simplex* von $\Delta(f_1, \ldots, f_q)$ nennen.

Schrägheit ist keine generische Eigenschaft, aber viele prominente Abbildungen sind schräg. Das Bild des Träger-Simplexes ist dann ein Hindernis für die asymptotische Degeneration, insbesondere für die Degeneration. Selbst in einfachen Fällen ist dieses Bild topologisch nicht trivial. Zum Beispiel sieht für die Gesamtheit aller Nullalgebren (die Radikale haben Codimension 1) und ihrer Rotationen (die Koordinaten-Tensoren werden gedreht) das Bild des Träger-Simplexes aus wie ein dreieckiges Taschentuch, das man zu einer Pyramide hochgefaltet hat mit Selbstdurchdringungen entlang der Kanten. Es handelt sich um eine Homotopie-2-Sphäre.

Eine bilineare Abbildung f heisse *straff*, wenn bezüglich geeigneter Basen Folgendes gilt: Es gibt injektive ganzzahlige Funktionen $\alpha(i)$, $\beta(j)$, $\gamma(k)$ derart, dass $\alpha(i) + \beta(j) + \gamma(k) = 0$ für alle Punkte (i, j, k) aus dem Träger von f. Ordnet man die Basen so an, dass $\alpha(i)$, $\beta(j)$ und $\gamma(k)$ monoton wachsen, so sieht man auf einen Blick, dass straffe Abbildungen schräg sind. Am Träger von $\mathbb{C}[T]/(T^n)$, den wir oben ausgerechnet haben, lesen wir ab, dass $\mathbb{C}[T]/(T^n)$ straff ist. Da auch die straffen Abbildungen einen Semiring bilden, sind alle $\mathbb{C}[T]/(F)$ straff. Ähnlich zeigt man, dass alle halbeinfachen Algebren straff sind. Für straffe Abbildungen haben das asymptotische Spektrum und das Bild des Träger-Simplexes die gleichen (bezüglich der Produktordnung in $\mathbb{R}^q$) minimalen Punkte [38]:

[20] Hierfür geben wir im Anhang einen kurzen Beweis.

[21] In der Tat: Gilt (28), so ist

$$\begin{aligned} P(\zeta(\theta)) &= \zeta(\theta, P(f_1, \ldots, f_q)) && \zeta(\theta,\text{-}) \text{ Homomorphismus von Semiringen} \\ &\leq \zeta(\theta, Q(f_1, \ldots, f_q)) && (28) \text{ und } \zeta(\theta,\text{-}) \text{ monoton} \\ &= Q(\zeta(\theta)). \end{aligned}$$

Das ist (27) an der Stelle $\zeta(\theta)$.

Satz 4. *Seien $f_1, \ldots, f_q$ straffe bilineare Abbildungen. Dann gilt*

$$\min \Delta(f_1, \ldots, f_q) \subset \mathrm{im}\zeta \subset \Delta(f_1, \ldots, f_q).$$

Manchmal genügt dies, um ein Spektrum vollständig zu berechnen, wie in dem folgenden Fall. Zunächst definieren wir eine Funktion z von den natürlichen zu den positiven reellen Zahlen durch

$$z(m) := \frac{\mu^m - 1}{\mu - 1}\mu^{-2(m-1)/3},$$

wo μ die einzige positive Lösung von

$$\frac{1}{\mu - 1} - \frac{m}{\mu^m - 1} = \frac{m - 1}{3}$$

ist. z kann mit Newton-Iteration effizient berechnet werden. Hier sind ein paar Werte:

m	$z(m) \approx$
2	1,89
3	2,76
4	3,61
5	4,46
6	5,31
7	6,16
8	7,00
9	7,85
10	8,69
100	84,4
1000	842

Wie Sie sehen, ist $z(m)$ stets kleiner als m. Der folgende Satz [38] zeigt, dass das kein Zufall ist.

Satz 5. *Sei $F \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom positiven Grades mit der Primfaktorzerlegung*

$$F = \beta \prod_1^r (T - \alpha_i)^{m_i},$$

wobei die α_i paarweise verschieden sind. Dann ist

$$\Delta(\mathbb{C}[T]/(F)) = [\sum_1^r z(m_i), \sum_1^r m_i].$$

Beachten Sie, dass der rechte Endpunkt des Spektral-Intervalls einfach der Grad des Polynoms ist und dass keiner der Endpunkte eine „fuzzy number“ enthält wie das ω in Satz 3. Wollen wir entscheiden, ob eine direkte Summe von Tensor-Potenzen von $\mathbb{C}[T]/(F)$ in eine andere asymptotisch degeneriert, so müssen wir nur die entsprechenden Polynome auf dem in Satz 5 mitgeteilten Intervall vergleichen. Das kann zum Beispiel mit Hilfe des Sturmschen Algorithmus geschehen.

Wir scheinen unseren roten Faden, die Matrixmultiplikation, verloren zu haben. Tatsächlich ist das nicht der Fall: Ebenso wie der linke Endpunkt des Spektral-Intervalls in Satz 3 der Schlüssel ist für die Abschätzung $\omega < 2,48$, so ist der linke Endpunkt des Intervalls in Satz 5 im Fall $F = T^3$ der Schlüssel für die Abschätzung $\omega < 2,39$ in Coppersmith und Winograd [10]. (Dieser Pointe zuliebe habe ich die Chronologie auf den Kopf gestellt: Zum Beweis der ersten Inklusion in Satz 4 und damit zur Bestimmung des linken Endpunktes in Satz 5 wurde die Methode von Coppersmith und Winograd verwendet.)

Vermutungen spornen an! Hier ist eine, deren Richtigkeit $\omega = 2$ implizieren würde. (Es handelt sich eigentlich um eine Befürchtung, und zum Glück ist sie vermutlich falsch.)

Vermutung 6. *Für straffe bilineare Abbildungen besteht das asymptotische Spektrum aus dem Bild des Träger-Simplexes.*

Was unseren Titel „Komplexität und Geometrie bilinearer Abbidungen" betrifft, so hat die vorangehende Diskussion gezeigt, wie schwierig es wäre, geometrische und komplexitätstheoretische Aspekte überhaupt zu trennen. Während die Komplexitätstheorie vielleicht den grösseren Nutzen aus dieser Symbiose zieht, kann auch die Erforschung der Bahngeometrie bilinearer Abbildungen davon profitieren: Der asymptotische Gesichtspunkt und der Begriff des asymptotischen Spektrums bieten eine neue Einfachheit und eine Reihe faszinierender neuer Probleme.

Anhang

Einige der hier gegebenen Beweise sind (im Unterschied zu denen in der Literatur) nicht ohne weiteres für endliche Charakteristik gültig.

Zu Kapitel 5

Wir erhalten eine zu (25) gleichwertige Definition, wenn wir auf der rechten Seite die Degeneration durch die Restriktion ersetzen (Proposition 5.10 von [36], siehe auch Bini [4] und Alder [1]).

Für dieses Resultat geben wir einen kurzen Beweis. Es ist ratsam, bilineare Abbildungen $f : U \times V \to W$ durch ihre Strukturtensoren $f \in U^* \otimes V^* \otimes W$ zu repräsentieren. Ein Bezeichnungswechsel führt zu Tensoren $v \in V := V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, deren Räume V_1, V_2, V_3 nun symmetrisch auftreten. Auch Restriktion und Degeneration lassen ihren symmetrischen Charakter erkennen: Für $u \in U := U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$ und $v \in V$ bedeutet $u \leq v$, dass es lineare Abbildungen $a_\kappa : V_\kappa \to U_\kappa$ gibt mit

(39) $\quad u = (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)v,$

und für $u, v \in V$ bedeutet $u \trianglelefteq v$, dass u im Zariski-Abschluss der G-Bahn von v liegt,

(40) $\quad u \in \overline{Gv},$

wobei die Gruppe $G := GL(V_1) \times GL(V_2) \times GL(V_3)$ auf V wirkt vermöge $gv := (g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)v$. Neben der in (25) definierten asymptotischen Degeneration erklären wir die *asymptotische Restriktion* durch

$$(41) \quad u \lesssim v : \iff u^{\otimes\nu} \leq \bigoplus_{1}^{2^{o(\nu)}} v^{\otimes\nu}.$$

Hier ist das erwähnte Resultat:

Satz 7. $u \trianglelefteq\!\!\!\!\!\sim v \iff u \lesssim v$.

Beweis Wir wissen schon, dass die Restriktion die Degeneration impliziert. Daraus folgt „$\Longleftarrow$". Zum Nachweis von „$\Longrightarrow$" genügt es,

$$(42) \quad u \trianglelefteq v \Longrightarrow u \lesssim v$$

zu zeigen. Wir dürfen annehmen, dass u und v auf den gleichen Räumen leben, etwa $u, v \in V$. Dann ist $u \in \overline{Gv}$. Eine Form F vom Grade ν auf dem Vektorraum V, die auf Gv verschwindet, verschwindet auch auf dem Zariski-Abschluss $\overline{Gv}$ und damit auf u. Ist l irgendeine Linearform auf $V^{\otimes\nu}$, so definiert $F(x) := l(x^{\otimes\nu})$ eine Form F vom Grade ν auf V. Wir haben also

$$(43) \quad \big(\forall g \in G \quad l((g.v)^{\otimes\nu}) = 0\big) \Longrightarrow l(u^{\otimes\nu}) = 0.$$

Fassen wir $V^{\otimes\nu}$ in der natürlichen Weise als G-Modul auf, so ist $(g.v)^{\otimes\nu} = g.(v^{\otimes\nu})$, die Prämisse von (43) bedeutet also $l(G(v^{\otimes\nu})) = 0$, und aus der Beliebigkeit von l folgt

$$(44) \quad u^{\otimes\nu} \in \mathrm{lin}(Gv^{\otimes\nu}).$$

$V^{\otimes\nu}$ ist nicht nur ein G-Modul, sondern auch ein Modul der Symmetrischen Gruppe S_ν, die auf $V^{\otimes\nu}$ durch die Permutation der Tensorkomponenten wirkt. Jedes $g.v^{\otimes\nu} = (g.v)^{\otimes\nu}$ ist symmetrisch, das heisst ein S_ν-Fixpunkt. Also ist $\mathrm{lin}(Gv^{\otimes\nu})$ im Unterraum $\mathrm{Sym}^\nu(V)$ der symmetrischen Tensoren enthalten, und deshalb gilt

$$(45) \quad \dim(\mathrm{lin}(Gv^{\otimes\nu})) \leq \dim(\mathrm{Sym}^\nu(V)) = \binom{\nu + \dim V - 1}{\dim V - 1} \leq \nu^c$$

für grosse ν mit $c := dim V$. Insbesondere gibt es dann ν^c Gruppenelemente $g_i \in G$ so, dass $u^{\otimes\nu}$ eine Linearkombination der $g_i v^{\otimes\nu}$ ist. Das liefert schliesslich

$$(46) \quad u^{\otimes\nu} \leq \bigoplus_{i=1}^{\nu^c} g_i v^{\otimes\nu} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\nu^c} v^{\otimes\nu}.$$

Damit ist Satz 7 bewiesen. Aus ihm folgt leicht die früher behauptete Austauschbarkeit von Rang und Grenzrang in (8), (20) und (21).

Zu Kapitel 6

Ebenso wie Schönhages τ-Theorem kann man auch (37) auf nichtquadratische Matrixmultiplikationen verallgemeinern, wenigstens linkshändig:

$$(47) \quad \bigoplus_i \langle m_i, p_i, q_i \rangle \trianglelefteq \bigoplus_j \mathbb{C}^{n_j \times n_j} \iff \forall \tau \in [2, \omega] \quad \sum_i (m_i p_i q_i)^{\tau/3} \leq \sum_j n_j^\tau .$$

Dies ist eine Konsequenz von (37) vermöge Tensorpotenzbildung und (18).

Um neue Abschätzungen von ω zu gewinnen, gehe man etwa von einem Wedderburn-Isomorphismus $\mathbb{C}[\Lambda] \simeq \bigoplus_j \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$ für eine endliche Gruppe Λ aus und benutze eine Degeneration, die dem natürlichen Koordinatentensor der Gruppenalgebra angepasst ist, um mit Hilfe der Lasermethode zu einer direkten Summe von nicht notwendig quadratischen Matrixmultiplikationen zu gelangen. Insgesamt erhält man eine Degeneration, die als Prämisse von (47) dienen kann. In dieser Weise wurde bereits bei einigen der jüngeren Abschätzungen von ω vorgegangen, freilich nur im Fall abelscher Gruppen Λ, um die Form der linken Seite von Schönhages τ-Theorem (17) zu erreichen. (47) erlaubt uns jetzt, statt der diskreten Fouriertransformation für endliche abelsche Gruppen den Wedderburn-Isomorphismus für beliebige endliche Gruppen einzusetzen.

Folgende Vermutung liegt nahe:

Vermutung 8. $\bigoplus_i \langle m_i, p_i, q_i \rangle \trianglelefteq \bigoplus_j \langle n_j, r_j, s_j \rangle \iff \forall \tau \in [2, \omega]$ $\sum_i (m_i p_i q_i)^{\tau/3} \leq \sum_j (n_j r_j s_j)^{\tau/3}$.

Vermutung 8 folgt aus

Vermutung 9. $\Delta(Matrix) \subset \mathbb{R}^3$ *ist logarithmisch konvex.*

Dabei bedeutet $\Delta(Matrix)$ das asymptotische Spektrum aller (nicht nur der quadratischen) Matrixmultiplikationen. Wir erinnern daran, dass $\Delta(Matrix)$ jedenfalls logarithmisch sternförmig ist [37]. Die Richtigkeit einer der beiden Vermutungen würde unseren Spielraum bei der Abschätzung des Matrixexponenten erheblich vergrössern. Auch eine Verallgemeinerung auf andere Semiringe bilinearer Abbildungen wäre von grossem Interesse.

Zu Kapitel 7

I) Wir geben zunächst einen kurzen Beweis dafür, dass $\zeta(\theta, -)$ ein monotoner Homomorphismus von Semiringen ist. Dieser Beweis ist freilich weniger elementar als der ursprüngliche in [38]. Sei G eine zusammenhängende reduktive lineare Gruppe. (Siehe Kraft [23], Humphreys [19], Fulton-Harris [13].) Wir fixieren einen maximalen Torus T von G sowie eine T enthaltende Boreluntergruppe B von G. Dann steht uns die Charaktergruppe $X(T)$, die Weylgruppe W, das Wurzelsystem $\Phi \subset X(T)$ sowie das System Φ_+ der positiven Wurzeln zur Verfügung. Die zu Φ_+ gehörige Partialordnung bezeichnen wir mit $\prec$, für Charaktere α, β bedeutet $\alpha \prec \beta$ also, dass $\beta - \alpha$ eine Summe positiver Wurzeln ist.

Sei V ein rationaler G-Modul. Wir sagen, ein Vektor $u \in V$ sei eine Degeneration von $v \in V$, und schreiben $u \trianglelefteq v$, wenn $u \in \overline{G.v}$. Dabei bezeichnet der Überstrich den Abschluss bezüglich der Zariski-Topologie (der über $\mathbb{C}$ hier mit dem Abschluss bezüglich der klassischen Topologie übereinstimmt). Für V haben wir die Gewichtszerlegung oder Zerlegung in T-Eigenräume

(48) $V = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma,$

wo $\Gamma \subset X(T)$ die Menge der Gewichte von V, also der $\gamma \in X(T)$ mit $V_\gamma \neq 0$ ist. Da die Weylgruppe W die Gewichtsräume V_γ permutiert, ist Γ W-stabil. Wir definieren den *Träger* $\operatorname{supp}(v)$ von $v \in V$ durch

(49) $\operatorname{supp}(v) := \{\gamma \in \Gamma : v_\gamma \neq 0\},$

wobei v_γ die Komponente von v in V_γ bezeichnet. Wir brauchen noch den von $\operatorname{supp}(v)$ in Γ erzeugten Ordnungsfilter

(50) $\operatorname{supp}(v)^{\prec} := \{\beta \in \Gamma : \exists \gamma \in \operatorname{supp}(v) \ \ \gamma \prec \beta\}.$

Lemma 10. *Seien $u, v \in V$ und sei* $\operatorname{supp}(u)$ *eine Antikette bezüglich $\prec$. Ist $u \trianglelefteq v$, so gibt es ein $\sigma \in W$ mit*

(51) $\sigma.\operatorname{supp}(u) \subset \operatorname{supp}(v)^{\prec}.$

Beweis: $G.\overline{B.v}$ ist abgeschlossen (weil $\overline{B.v}$ abgeschlossen und B-stabil ist) und enthält $G.v$. Deshalb ist

(52) $u \in \overline{G.v} \subset G.\overline{B.v}.$

Auf Grund der Bruhat-Zerlegung von G gibt es ein $\sigma \in W$ mit

(53) $u \in B\sigma^{-1}B\overline{B.v} = B\sigma^{-1}\overline{B.v}.$

Das bedeutet Folgendes: Wählen wir einen Repräsentanten $n \in \sigma$, also ein $n \in N_G(T)$ mit $\sigma = n.C_G(T)$, so gibt es ein $b \in B$ mit

(54) $nb.u \in \overline{B.v}.$

Die Träger aller Vektoren aus $B.v$ sind in $\operatorname{supp}(v)^{\prec}$ enthalten, also auch die aller Vektoren aus $\overline{B.v}$. Insbesondere ist $\operatorname{supp}(nb.u) \subset \operatorname{supp}(v)^{\prec}$. Dies liefert die zweite Inklusion von (55); die erste folgt aus der Tatasache, dass $\operatorname{supp}(u)$ voraussetzungsgemäss eine Antikette ist:

(55) $\sigma\operatorname{supp}(u) \subset \sigma\operatorname{supp}(b.u) = \operatorname{supp}(n.(b.u)) \subset \operatorname{supp}(v)^{\prec}.$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Um es anzuwenden, arbeiten wir wie bei Satz 7 mit Tensoren $v \in V := V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, wobei wir $V_\kappa = \mathbb{C}^{n_\kappa}$ annehmen. Wir setzen $G := GL_{n_1} \times GL_{n_2} \times GL_{n_3}$, $T := T_1 \times T_2 \times T_3$ und $B := B_1 \times B_2 \times B_3$ mit den maximalen Tori T_κ der Diagonalmatrizen und den Boreluntergruppen B_κ der oberen Dreiecksmatrizen von GL_{n_κ}.

Die Gewichtszerlegung von V ist die Zerlegung in die natürlichen Koordinatenachsen, die Gewichtsmenge Γ also isomorph zum diskreten Quader $\{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \{1, \dots, n_3\}$. Ferner ist $W = S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3}$ und $\prec$ ist invers zum Produkt der natürlichen Ordnungen. Für $v \in V$ haben wir als Äquivalent von (38)

(56) $\zeta(\theta, v) := \max_P 2^{\sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P_\kappa)},$

wo P über die Wahrscheinlichkeitsmasse auf dem (als Antikette vorausgesetzten) Träger $\mathrm{supp}(v)$ variiert.

Seien nun $u, v \in V$ schräg mit $u \trianglelefteq v$. Wir dürfen u, v jederzeit durch isomorphe Kopien $g.u$, $h.v$ ersetzen, ohne $u \trianglelefteq v$ zu stören, und können deshalb annehmen, dass beide Träger Antiketten sind. Wir vergleichen $\log_2 \zeta(\theta, u) = \sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P(u)_\kappa)$ mit $\log_2 \zeta(\theta, v) = \sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P(v)_\kappa)$, wobei $P(u)$ bzw. $P(v)$ Wahrscheinlichkeitsmasse auf $\mathrm{supp}(u)$ bzw. $\mathrm{supp}(v)$ sind, die das Funktional $\sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P_\kappa)$ auf dem jeweiligen Träger maximieren. Durch eine Umordung der Basisvektoren für v (isomorphe Kopie) können wir erreichen, dass die Wahrscheinlichkeitsvektoren $P(v)_\kappa$ schwach monoton fallen. Dadurch verliert $\mathrm{supp}(v)$ möglicherweise die Eigenschaft einer Antikette, aber der Wert von $\sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P(v)_\kappa)$ und seine Maximalitätseigenschaft ändern sich nicht. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen für konvexe Optimierung zeigen nun, dass $P(v)$ das Funktional $\sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P_\kappa)$ nicht nur für die P auf $\mathrm{supp}(v)$, sondern für alle P auf $\mathrm{supp}(v)^{\prec}$ maximiert. (Ein kurzer elementarer Beweis findet sich auf Seite 136f von [38].)

Nach Lemma 10 gilt $\sigma.\mathrm{supp}(u) \subset \mathrm{supp}(v)^{\prec}$ für ein geeignetes $\sigma \in W$. Weil sich durch Anwenden von σ auf $P(u)$ der Wert des Funktionals nicht ändert, folgt $\log_2 \zeta(\theta, u) \le \log_2 \zeta(\theta, v)$, also $\zeta(\theta, u) \le \zeta(\theta, v)$. Da wir unter Vorbehalt der Antiketteneigenschaft für die Träger beliebige Basen wählen durften, ist sowohl gezeigt, dass $\zeta(\theta, -)$ nicht von der (zulässigen) Basenwahl abhängt, als auch seine Monotonie bezüglich Degeneration. Additivität und Multiplikativität bezüglich $\oplus$ bzw. $\otimes$ ergeben sich leicht aus bekannten Eigenschaften der Entropie; der Leser mag sich das selbst überlegen oder in [38] nachschauen (Lemmas 2.6, 2.7, 3.4).

II) Ein interessanter Zusammenhang besteht zwischen dem Trägersimplex und dem Momentpolytop. Sei wieder G eine zusammenhängende reduktive Gruppe, T ein maximaler Torus und B eine T enthaltende Borelgruppe. Wie oben haben wir $X(T)$, W, Φ und $\prec$. Wir erweitern $\prec$ zu einer Partialordnung auf $E := X(T) \otimes \mathbb{R}$: Für $\pi, \rho \in E$ gilt $\pi \prec \rho$, wenn $\rho - \pi$ eine nichtnegative Linearkombination positiver Wurzeln ist. Ferner sei $D \subset E$ die positive Weylkammer. Diese ist ein Fundamentalbereich für die Weylgruppe W in ihrer Wirkung auf E, das heisst, für jedes $\eta \in E$ trifft $W.\eta$ die positive Weylkammer in genau einem Punkt, den wir mit $dom(\eta)$ bezeichnen. Die Abbildung *dom* ist stetig.

Ist U ein rationaler G-Modul, $\chi \in X(T) \cap D$ ein dominanter Charakter, so bezeichnen wir die χ-isotypische Komponente von U mit $U_{(\chi)}$.

Sei nun V ein rationaler G-Modul und $Z \subset V$ ein nichttrivialer irreduzibler abgeschlossener G-stabiler Kegel. (Z ist also die affine Beschreibung einer irreduziblen projektiven G-Varietät). Das *Momentpolytop* $\mathcal{P}(Z)$ ist definiert als Abschluss in E von

$$(57) \quad \mathcal{R}(Z) := \{\chi/d : (\mathbb{C}[Z]_d)_{(\chi^*)} \neq 0\} \subset D.$$

Dass $\mathcal{P}(Z) \subset D$ tatsächlich ein Polytop ist, folgt aus der endlichen Erzeugtheit des U-Invariantenrings $\mathbb{C}[Z]^U$, wo U das unipotente Radikal von B bezeichnet. Das Momentpolytop gibt weitgehende Auskunft über die im Koordinatenring $\mathbb{C}[Z]$ auftretenden einfachen G-Moduln.

Wir interessieren uns für den Fall, dass Z der Bahnabschluss eines Vektors $v \in V \backslash 0$ ist. Setzen wir voraus, dass $\overline{G.v}$ ein Kegel ist, so ist das Momentpolytop $\mathcal{P}(\overline{G.v})$ der Abschluss in E von

(58) $\mathcal{R}(\overline{G.v}) := \{\chi/d : (\mathbb{C}[\overline{G.v}]_d)_{(\chi^*)} \neq 0\} = \{\chi/d : (\mathrm{lin}(G.v^{\otimes d}))_{(\chi)} \neq 0\} \subset D.$

Ein Vektor $v \in V$ heisse *schlicht*, wenn $(\mathrm{supp}(v) + \Phi) \cap \mathrm{supp}(v) = \emptyset$. Jedes schräge v ist schlicht.

Satz 11. *Sei $v \in V \backslash 0$ schlicht und $\overline{G.v}$ ein Kegel. Dann gilt*

(59) $\min \mathcal{P}(\overline{G.v}) \subset \mathrm{dom}\ \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(v)) \subset \mathcal{P}(\overline{G.v}),$

wobei min *die Menge der bezüglich $\prec$ minimalen Punkte bedeutet.*

Beweis: Linke Inklusion: Sei $\chi/d \in \mathcal{R}(\overline{G.v})$ mit $(\mathrm{lin}(G.v^{\otimes d}))_{(\chi)} \neq 0$. Sei M_χ ein einfacher G-Untermodul von $\mathrm{lin}(G.v^{\otimes d})$ vom Höchstgewicht χ, N ein Modulkomplement von M_χ in $V^{\otimes d}$. Da $v^{\otimes d}$ den Modul $\mathrm{lin}(G.v^{\otimes d})$ erzeugt, liegt $v^{\otimes d}$ nicht in N. Auf Grund der Gewichtszerlegung

(60) $v = \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{supp}(v)} v_\gamma$

ist $v^{\otimes d}$ eine Summe von Tensorpotenzprodukten der v_γ. Wenigstens ein Summand liegt nicht in N, etwa vom Gewicht $\eta := \sum_\gamma d_\gamma \gamma$ mit $\sum_\gamma d_\gamma = d$. Die Projektion $V^{\otimes d} \to M_\chi$ längs N bildet diesen Summenden auf einen von 0 verschiedenen Gewichtsvektor vom Gewicht η ab. Also ist η ein Gewicht von M_χ. Da die Weylgruppe W die Gewichte von M_χ permutiert, ist auch $\mathrm{dom}(\eta)$ ein Gewicht von M_χ. Da χ das Höchstgewicht von M_χ ist, folgt $\mathrm{dom}(\eta) \prec \chi$ und damit $\mathrm{dom}(\eta/d) \prec \chi/d$. Aber $(\eta/d) = \sum_\gamma (d_\gamma/d)\gamma \in \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(v))$. Also ergibt sich

(61) $\mathcal{R}(\overline{G.v}) \subset (\mathrm{dom}\ \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(v)))^{\prec}.$

Da die rechte Seite abgeschlossen ist, können wir $\mathcal{R}(\overline{G.v})$ durch $\mathcal{P}(\overline{G.v})$ ersetzen. Das Ergebnis ist, unter Voraussetzung der noch zu beweisenden rechten Inklusion, äquivalent zur linken Inklusion von (59).

Rechte Inklusion: Hier benutzen wir eine fundamentale Beziehung, die hauptsächlich auf Mumford [24] zurückgeht (siehe auch Brion [6]), zwischen dem Momentpolytop und der aus der symplektischen Geometrie stammenden Momentabbildung: Sei K eine kompakte Form von G so, dass $T_K := T \cap K$ ein maximaler Torus von K ist, und sei $\langle -, - \rangle$ ein K-invariantes hermitesches Skalarprodukt auf V. Die T-Gewichtsräume von V sind dann orthogonal. Wir bezeichnen die Liealgebren von G, T, K, T_K respektive mit $\mathbf{g}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{t_k} = \mathbf{t} \cap \mathbf{k}$. Die *Momentabbildung* von V ist so definiert:

(62) $\mu : V \backslash 0 \to (i\mathbf{k})^*, \qquad \mu(u)\xi := \dfrac{\langle \xi u, u \rangle}{\langle u, u \rangle}.$

(Zur Motivation: Im Grunde geht es um das Differential an 1 der Abbildung $G \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \|g.u\|^2$, also um die Linearform $\xi \mapsto 2\mathrm{Re}\langle \xi u, u \rangle$ auf $\mathbf{g}$. Da $\langle -, - \rangle$ K-invariant ist, verschwindet das Differential auf $\mathbf{k}$. Wegen $\mathbf{g} = \mathbf{k} \oplus i\mathbf{k}$ liegt es nahe, $\mathrm{Re}\langle \xi u, u \rangle$ auf $i\mathbf{k}$ zu beschränken. Dort ist $\langle \xi u, u \rangle$ reell, also können wir „Re" weglassen. Der Nenner wird hinzugefügt, um μ auch auf dem projektiven Raum $\mathbf{P}V$ definieren zu können.)

Die Momentabbildung für einen nichttrivialen irreduziblen abgeschlossenen G-stabilen Kegel $Z \subset V$ ist als Restriktion von μ auf Z erklärt. Identifizieren wir E mit $(i\mathbf{t_k})^*$

durch Identifikation von Charakteren mit ihren Differentialen (eingeschränkt auf $i\mathbf{t}_\mathbf{k}$) und fassen $(i\mathbf{t}_\mathbf{k})^*$ vermöge der Cartan-Zerlegung von $\mathbf{k}$ als Teilraum von $(i\mathbf{k})^*$ auf, so wird D zu einer Teilmenge von $(i\mathbf{k})^*$. Der Satz von Mumford lautet dann

$$(63)\quad \mathcal{P}(Z) = \mu(Z\backslash 0) \cap D.$$

Der folgende Beweis der rechten Inklusion von (59) verallgemeinert eine Beobachtung von Sjamaar und von Franz (siehe [11], Proposition 2.2). Wir werden zeigen, dass für spezielle $t \in T$ die Bilder von $t.v$ unter der Momentabbildung im relativen Inneren von conv supp(v) liegen und insgesamt diese Menge ausfüllen. Dann werden wir den Satz von Mumford anwenden.

Sei zunächst $t \in T$ beliebig und sei $\xi \in i\mathbf{t}_\mathbf{k}$. Dann ist $t.v \in \overline{G.v}\backslash 0$ und

$$(64)\quad \mu(t.v)\xi = \frac{\sum_\gamma |\gamma(t)|^2 \langle \xi v_\gamma, v_\gamma\rangle}{\sum_\gamma |\gamma(t)|^2 \langle v_\gamma, v_\gamma\rangle} = \frac{\sum_\gamma \|v_\gamma\|^2 |\gamma(t)|^2 (\gamma, \xi)}{\sum_\gamma \|v_\gamma\|^2 |\gamma(t)|^2},$$

wo $(-,-)$ die oben hergestellte (reelle) Dualität zwischen E und $i\mathbf{t}_\mathbf{k}$ bezeichnet. Die zweite Gleichung folgt aus $\xi.v_\gamma = \frac{d}{dx}(\exp(x\xi).v_\gamma)_{x=0} = \frac{d}{dx}(\gamma(\exp(x\xi))v_\gamma)_{x=0} = (\gamma, \xi)v_\gamma$.

Ist $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel von G und $\xi \in \mathbf{g}_\alpha$, so ergibt eine ähnliche Rechnung vermöge der Schlichtheit von v sofort $\mu(t.v)\xi = 0$. Damit haben wir

$$(65)\quad \mu(t.v) = \frac{\sum_\gamma \|v_\gamma\|^2 |\gamma(t)|^2 \gamma}{\sum_\gamma \|v_\gamma\|^2 |\gamma(t)|^2} \in E.$$

Nehmen wir speziell $t := \exp(\tau)$ für $\tau \in i\mathbf{t}_\mathbf{k}$, so ist $\gamma(t) = e^{(\gamma,\tau)}$ und wir erhalten

$$(66)\quad \frac{\sum_{\gamma\in\operatorname{supp}(v)} \|v_\gamma\|^2 e^{2(\gamma,\tau)}\gamma}{\sum_{\gamma\in\operatorname{supp}(v)} \|v_\gamma\|^2 e^{2(\gamma,\tau)}} \in \mu(\overline{G.v}\backslash 0) \cap E.$$

Das gilt für alle $\tau \in i\mathbf{t}_\mathbf{k} = E^*$. Aus einem „elementaren" Satz von Fulton ([12], Chapter 4.2, Appendix on convexity, Proposition) folgt nun

$$(67)\quad (\operatorname{conv}\operatorname{supp}(v))^\circ \subset \mu(\overline{G.v}\backslash 0) \cap E,$$

wo „∘" das relative Innere bedeutet. Allgemein gilt: $\mu(Z\backslash 0) \cap E$ ist W-stabil (denn jedes $\sigma \in W$ besitzt einen Repräsentanten $n \in N_G(T) \cap K$) und abgeschlossen (weil μ auf $\mathbf{P}Z$ definiert ist). Aus dem Satz von Mumford ergibt sich deshalb

$$(68)\quad \operatorname{dom}\operatorname{conv}\operatorname{supp}(v) \subset \mu(\overline{G.v}\backslash 0) \cap D = \mathcal{P}(\overline{G.v}).$$

Damit ist Satz 11 bewiesen. Wir haben übrigens beim Nachweis der linken Inklusion die Voraussetzung, dass v schlicht sei, nicht benutzt. Zwischen Satz 11 und Satz 4 besteht eine auffällige Ähnlichkeit, die die Neugier weckt.

Sei nun $v \in V := V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ schräg und eine Koordinatenwahl $V_\kappa = \mathbb{C}^{n_\kappa}$ so vorgenommen, dass supp(v) eine Antikette bezüglich $\prec$ ist (gleichwertig: bezüglich des Produkts der natürlichen Ordnungen). Die normierten Höchstgewichte χ/d der einfachen Bestandteile von $V^{\otimes d}$ unter der Wirkung von $G := GL(V_1) \times GL(V_2) \times GL(V_3)$ werden durch Tripel (P_1, P_2, P_3) von Wahrscheinlichkeitsvektoren mit fallenden Koordinaten beschrieben. Aus solchen besteht insbesondere das Momentpolytop $\mathcal{P}(\overline{G.v})$.

Korollar 12. $\zeta(\theta, v) = \max\{2^{\sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P_\kappa)} : (P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{P}(\overline{G.v})\}$.

Das Korollar folgt aus Satz 11, weil $\sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P_\kappa)$ sein Maximum im Sinne der Definition (56) auf $\min \operatorname{dom} \operatorname{conv}(\operatorname{supp}(v))$ und im Sinne der rechten Seite von Korollar 12 auf $\min \mathcal{P}(\overline{G.v})$ annimmt und weil diese Mengen nach Satz 11 übereinstimmen.

Das Korollar besagt, dass das Trägersimplex asymptotisch verwertbare Information aus der G-Modulstruktur des Koordinatenrings von $\overline{G.v}$ zieht. Hier öffnet sich ein weites Feld.

Nach dem Lemma von Schur verkleinert sich das Momentpolytop bei Degeneration. Korollar 12 liefert damit einen weiteren Beweis dafür, dass $\zeta(\theta, -)$ wohldefiniert und monoton ist.

III) Die Begriffe „schräg“ und „straff“ lassen sich in natürlicher Weise verallgemeinern. Seien G eine zusammenhängende reduktive Gruppe und V ein rationaler G-Modul. Wir fixieren einen maximalen Torus T und eine T enthaltende Borelgruppe B von G, haben damit die Weylgruppe W und die Partialordnung $\prec$ auf der Charaktergruppe $X(T)$. Wir erinnern daran, dass im Fall bilinearer Abbildungen beziehungsweise ihrer Strukturtensoren die Wahl von T und B einer Koordinatenwahl (bis auf Skalierung) für die beteiligten Vektorräume gleichkommt.

$v \in V$ heisse *schräg*, wenn es ein $g \in G$ gibt so, dass der Träger $\operatorname{supp}(g.v)$ von $g.v$ eine Antikette bezüglich $\prec$ ist. Der Begriff „schräg“ hängt nur scheinbar von der Wahl von T und B ab.

$v \in V$ heisse *straff*, wenn die Isotropiegruppe G_v von v eine in G reguläre 1-Parameter-Untergruppe enthält (gleichwertig: wenn die maximalen Tori von G_v in G regulär sind).

$v \in V$ heisse *gut* bezüglich T, wenn ein maximaler Torus von G_v in T enthalten ist (gleichwertig: wenn $(T \cap G_v)^\circ$ maximaler Torus von G_v ist). Unter einer (isomorphen) Kopie eines $v \in V$ verstehen wir ein Element der G-Bahn von v, also ein $g.v$. Wegen der Konjugiertheit der maximalen Tori von G besitzt jedes $v \in V$ gute Kopien. Besonders einfach liegen die Dinge bei straffen v:

Lemma 13. *Sei $v \in V$ straff. Dann ist die Menge*

$$M := \{\operatorname{supp}(v') : v' \textit{ist gute Kopie von } v\}$$

genau eine W-Bahn von Teilmengen der Gewichtsmenge Γ von V und M enthält eine Antikette. Insbesondere ist v schräg.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist v gut. Wir zeigen zunächst, dass M die W-Bahn von $\operatorname{supp}(v)$ ist. Mit S bezeichnen wir einen in T enthaltenen maximalen Torus von G_v.

Sei $\sigma \in W$. Wir wählen einen Repräsentanten $n \in N_G(T)$ für σ und setzen $v' := n.v$. Dann ist v' gute Kopie von v, denn der maximale Torus nSn^{-1} von $G_{v'} = nG_v n^{-1}$ ist in T enthalten. Ausserdem gilt $\operatorname{supp}(v') = \sigma \operatorname{supp}(v)$. Also ist $\sigma \operatorname{supp}(v) \in M$.

Sei umgekehrt $\operatorname{supp}(v') \in M$, wobei $v' = g.v$ eine gute Kopie von v ist. Es genügt, ein $n \in N_G(T)$ zu finden mit $v' = n.v$, denn dann ist $\operatorname{supp}(v') = \operatorname{supp}(n.v) = \sigma \operatorname{supp}(v)$ mit dem durch n repräsentierten $\sigma \in W$. Nun: Die Isotropiegruppe $G_{v'} = gG_v g^{-1}$ enthält den maximalen Torus gSg^{-1}. Da v' gut ist, enthält sie auch einen maximalen Torus $S' \subset T$. Da die maximalen Tori in $G_{v'}$ konjugiert sind, gibt es ein $h \in G_{v'}$ mit

$h(gSg^{-1})h^{-1} = S'$. Wir setzen $n := hg$. Dann ist $v' = n.v$ und $nSn^{-1} = S'$. Es folgt die entsprechende Gleichung für die Zentralisatoren: $nZ_G(S)n^{-1} = Z_G(S')$. Wegen der Straffheit von v und v' stimmen beide Zentralisatoren mit T überein. Wir haben also $nTn^{-1} = T$, das heisst $n \in N_G(T)$. Zusammen mit $v' = n.v$ war das zu beweisen.

Schliesslich zeigen wir, dass M eine Antikette enthält. Da v straff ist, gibt es eine in G reguläre Einparameteruntergruppe λ von G_v. Wegen der Regularität können wir ein $\sigma \in W$ finden so, dass $(\sigma\lambda, \alpha) > 0$ für alle positiven Wurzeln α. ($(-,-)$ bezeichnet die natürliche Paarung zwischen Einparametergruppen und Charakteren.) Wir setzen $v' := n.v$, wo $n \in N_G(T)$ ein Repräsentant für σ ist. Dann ist v' eine gute Kopie von v und $\sigma\lambda = n\lambda n^{-1}$ ist eine Einparameteruntergruppe von $G_{v'}$. Aus letzterem folgt $(\sigma\lambda, \gamma) = 0$ für alle $\gamma \in \operatorname{supp}(v')$. Andererseits haben wir oben gesehen, dass $(\sigma\lambda, \alpha) > 0$ für alle positiven Wurzeln α. Somit ist $\operatorname{supp}(v') \in M$ eine Antikette bezüglich $\prec$.

IV) Hier befreien wir Vermutung 6 von der Numerik des Trägersimplexes. In der symmetrischen Formulierung für Tensoren lautet Vermutung 6 zunächst so:

Vermutung 14. *Sind $u \in U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$ und $v \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ straff und gilt*

$$(69) \quad \forall\theta \quad \zeta(\theta, u) \leq \zeta(\theta, v),$$

so ist $u \underset{\sim}{\trianglelefteq} v$.

(Die Äquivalenz der beiden Formulierungen folgt aus der Beschreibung des asymptotischen Spektrums in (27), (28).)

Ein Tensor $v \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2} \otimes \mathbb{C}^{n_3}$ heisse *perfekt*, wenn der Träger von v bezüglich der natürlichen Basen straff ist und wenn die Randverteilungen P_κ der Gleichverteilung P auf dem Träger von v gleichverteilt auf $\{1, \ldots, n_\kappa\}$ sind.

Vermutung 15. *Sind $u \in \mathbb{C}^{m_1} \otimes \mathbb{C}^{m_2} \otimes \mathbb{C}^{m_3}$ und $v \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2} \otimes \mathbb{C}^{n_3}$ perfekt und gilt*

$$(70) \quad (m_1, m_2, m_3) \leq (n_1, n_2, n_3),$$

so ist $u \underset{\sim}{\trianglelefteq} v$.

Satz 16. *Die Vermutungen 6 und 15 sind äquivalent.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Vermutungen 14 und 15 äquivalent sind.

Für einen perfekten Tensor $v \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2} \otimes \mathbb{C}^{n_3}$ ist $\zeta(\theta, v) = n_1^{\theta_1} n_2^{\theta_2} n_3^{\theta_3}$. Also folgt Vermutung 15 aus Vermutung 14.

Nehmen wir jetzt Vermutung 15 als richtig an. Es genügt, Vermutung 14 in der abgeschwächten Form zu beweisen, in der die Voraussetzung (69) zu

$$(71) \quad \forall\theta \quad \zeta(\theta, u) < \zeta(\theta, v)$$

verschärft ist. In der Tat, ist (69) für u, v erfüllt, so ist (71) für $u^{\otimes M}$ und $v^{\otimes M} \oplus v^{\otimes M}$ erfüllt, denn $\zeta(\theta, -)$ ist additiv, multiplikativ und ≥ 1. Aus der abgeschwächten Vermutung erhalten wir jetzt $u^{\otimes M} \underset{\sim}{\trianglelefteq} v^{\otimes M} \oplus v^{\otimes M}$, daraus $\varphi(u)^M \leq 2\varphi(v)^M$, daraus durch Ziehen der M-ten Wurzel und Grenzübergang $\varphi(u) \leq \varphi(v)$, und daraus schliesslich $u \underset{\sim}{\trianglelefteq} v$, wobei wir zweimal den Spektralsatz angewandt haben.

Nun seien u und v straff und es gelte (71). Nach Wahl geeigneter Basen haben wir $u \in \mathbb{C}^{m_1} \otimes \mathbb{C}^{m_2} \otimes \mathbb{C}^{m_3}$ und $v \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2} \otimes \mathbb{C}^{n_3}$ mit straffen Trägern $\operatorname{supp}(u)$ und $\operatorname{supp}(v)$. Aus (71) folgt für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ aus Kompaktheitsgründen

$$(72) \quad \forall P \quad \max_{\theta} \min_{Q} (\sum_{\kappa} \theta_\kappa H(P_\kappa) - \sum_{\kappa} \theta_\kappa H(Q_\kappa)) \leq -\varepsilon,$$

wobei P über Wahrscheinlichkeitsmasse auf $\operatorname{supp}(u)$ und Q über solche auf $\operatorname{supp}(v)$ variiert. Nach dem Minimax-Theorem ist das gleichbedeutend mit

$$(73) \quad \forall P \quad \min_{Q} \max_{\theta} (\sum_{\kappa} \theta_\kappa H(P_\kappa) - \sum_{\kappa} \theta_\kappa H(Q_\kappa)) \leq -\varepsilon,$$

also mit

$$(74) \quad \forall P \, \exists Q \, \forall \kappa \qquad H(P_\kappa) \leq H(Q_\kappa) - \varepsilon.$$

Nun betrachten wir $v^{\otimes N} \in (\mathbb{C}^{n_1})^{\otimes N} \otimes (\mathbb{C}^{n_2})^{\otimes N} \otimes (\mathbb{C}^{n_3})^{\otimes N}$. Die Symmetrische Gruppe S_N wirkt auf den Räumen $(\mathbb{C}^{n_\kappa})^{\otimes N}$ durch Permutation der Tensorkomponenten. Wir zerlegen die $(\mathbb{C}^{n_\kappa})^{\otimes N}$ in Bahnmoduln, das heisst in die linearen Hüllen der S_N-Bahnen der $e_1^{\otimes q_1} \otimes \ldots \otimes e_{n_\kappa}^{\otimes q_{n_\kappa}}$; hier bezeichnet $(e_1, \ldots, e_{n_\kappa})$ die natürliche Basis von $\mathbb{C}^{n_\kappa}$ und die $(q_1 \ldots, q_{n_\kappa})$ durchlaufen die nichtnegativ ganzzahligen Vektoren mit Koeffizientensumme N. Die Bahnmoduln können also durch Wahrscheinlichkeitsvektoren $Q_\kappa = (q_1/N, \ldots, q_{n_\kappa}/N)$, deren Komponenten rationale Zahlen mit Nenner N sind, bijektiv beschrieben werden. (Diese Q_κ haben zunächst nichts mit ihren in (74) auftretenden Namensvettern zu tun; eine Beziehung wird erst weiter unten hergestellt.) Die Dimensionen der zu den Q_κ gehörenden Bahnmoduln sind $N!/q_1! \cdot \ldots \cdot q_{n_\kappa}! \geq N(H(Q_\kappa) - \varepsilon/3)$ für grosse N und alle Q_κ nach der Stirlingschen Formel.

Aus den Zerlegungen der $(\mathbb{C}^{n_\kappa})^{\otimes N}$ erhalten wir durch Tensorproduktbildung eine Zerlegung des S_N-Moduls $(\mathbb{C}^{n_1})^{\otimes N} \otimes (\mathbb{C}^{n_2})^{\otimes N} \otimes (\mathbb{C}^{n_3})^{\otimes N}$ als eine direkte Summe von S_N-Untermoduln, welche durch Tripel (Q_1, Q_2, Q_3) von rationalen Wahrscheinlichkeitsmassen mit Nenner N beschrieben werden. Dadurch wird auch der Tensor $v^{\otimes N}$ zerlegt:

$$(75) \quad v^{\otimes N} = \sum_{Q_1, Q_2, Q_3} v_{Q_1, Q_2, Q_3},$$

wobei die Summe Vektorraum-direkt, aber nicht Tensor-direkt ist. Immerhin können wir schliessen:

$$(76) \quad v^{\otimes N} \leq \bigoplus_{Q_1, Q_2, Q_3} v_{Q_1, Q_2, Q_3}, \quad \text{und} \quad \forall Q_1, Q_2, Q_3 \;\; v_{Q_1, Q_2, Q_3} \leq v^{\otimes N}.$$

Der Träger von $v^{\otimes N}$ bezüglich Tensorproduktbasen ist straff. Da die Zerlegung (75) diese Basen respektiert, besitzen auch die v_{Q_1, Q_2, Q_3} straffe Träger, die zudem disjunkte Vereinigungen von S_N-Bahnen sind. Daraus folgt, dass die v_{Q_1, Q_2, Q_3} perfekt sind. Aus der Konstruktion des Trägers von $v^{\otimes N}$ aus dem Träger von v ergibt sich ferner, dass v_{Q_1, Q_2, Q_3} genau dann von Null verschieden ist, wenn es ein rationales Wahrscheinlichkeitsmass Q mit Nenner N auf $\operatorname{supp}(v)$ gibt, dessen Randverteilungstripel (Q_1, Q_2, Q_3) ist. Über solche Tripel läuft also die obige direkte Summe. Schliesslich folgt aus dem oben Gesagten, dass v_{Q_1, Q_2, Q_3} für grosse N ein Format $> N \cdot (H(Q_1) - \varepsilon/3, H(Q_2) - \varepsilon/3, H(Q_3) - \varepsilon/3)$ besitzt.

Wir können die gleichen Konstruktionen ausgehend von u durchführen und erhalten perfekte Tensoren u_{P_1, P_2, P_3} vom Format $< N \cdot (H(P_1) + \varepsilon/3, H(P_2) + \varepsilon/3,$

$H(P_3) + \varepsilon/3)$ für grosse N mit

$$(77)\quad u^{\otimes N} \leq \bigoplus_{P_1,P_2,P_3} u_{P_1,P_2,P_3}, \quad \text{und} \quad \forall P_1, P_2, P_3 \; u_{P_1,P_2,P_3} \leq u^{\otimes N},$$

wobei (P_1, P_2, P_3) die Randverteilungstripel von rationalen Wahrscheinlichkeitsmassen mit Nenner N auf $\mathrm{supp}(u)$ durchläuft.

Aus (74) folgt nun für grosse N durch rationale Approximation von Q mit Nenner N, dass es zu jedem u_{P_1,P_2,P_3} ein v_{Q_1,Q_2,Q_3} gibt, dessen Format in jeder Komponente grösser ist als das von u_{P_1,P_2,P_3}. Vermutung 15 liefert also zu jedem u_{P_1,P_2,P_3} ein v_{Q_1,Q_2,Q_3} mit $u_{P_1,P_2,P_3} \trianglelefteq\!\!\!\sim v_{Q_1,Q_2,Q_3}$, und dies können wir mit Hilfe des Spektralsatzes umschreiben zu $\varphi(u_{P_1,P_2,P_3}) \leq \varphi(v_{Q_1,Q_2,Q_3})$. Übersetzen wir auch die erste Ungleichung von (77) und die zweite Aussage von (76) mit dem Spektralsatz, so erhalten wir insgesamt

$$(78)\quad \varphi(u)^N \leq \sum_{P_1,P_2,P_3} \varphi(u_{P_1,P_2,P_3}) \leq \sum_{P_1,P_2,P_3} \varphi(v)^N,$$

also nach N-tem Wurzelziehen und Grenzübergang $\varphi(u) \leq \varphi(v)$, da die Anzahl der P_1, P_2, P_3 polynomial in N ist. Das ist gleichwertig mit $u \trianglelefteq\!\!\!\sim v$, und Satz 16 ist bewiesen.

Wir haben die hochfliegende Vermutung 6 ersetzt durch die bodenständige 15. Freilich ist dabei auch die Suggestion von Richtigkeit verlorengegangen.

Es liegt nahe, statt der Zerlegung von $(\mathbb{C}^{n_\kappa})^{\otimes N}$ in Bahnmoduln die feinere in einfache S_N-Moduln zu verwenden. Hier ergeben sich allerdings schon Schwierigkeiten mit der Straffheit der den v_{Q_1,Q_2,Q_3} entsprechenden Tensoren.

V) Hanspeter Kraft hat mir einen wichtigen Literaturhinweis zur Momentabbildung gegeben, und von Matthias Franz habe ich viel zu diesem Thema gelernt. Beiden Herren bin ich sehr dankbar.

Literatur

[1] *A. Alder*, Grenzrang und Grenzkomplexität aus algebraischer und topologischer Sicht, Dissertation, Universität Zürich (1984)

[2] *W. Baur* and *V. Strassen,* The complexity of partial derivatives, Theor. Computer Science **22** (1982), 317–330.

[3] *E. Becker* and *N. Schwartz,* Zum Darstellungssatz von Kadison–Dubois, Archiv Math. **40** (1983), 421–428.

[4] *D. Bini,* Relations between EC-algorithms and APA-algorithms, applications, Nota interna B **79/8**, Pisa 1979.

[5] *D. Bini, M. Capovani, G. Lotti* and *F. Romani,* $O(n^2.7799)$ complexity for matrix multiplication, Inf. Proc. Letters **8** (1979), 234–235.

[6] *M. Brion,* Sur l'image de l'application moment, in Lecture Notes in Mathematics 1296, Springer, Berlin (1987), 177–192

[7] *P. Bürgisser,* Degenerationsordnung und Trägerfunktional bilinearer Abbildungen, Dissertation, Universität Konstanz 1990.

[8] *P. Bürgisser, M. Clausen und M. A. Shokrollahi,* Algebraic Complexity Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 315, Springer Verlag 1997.

[9] *D. Coppersmith* and *S. Winograd,* On the asymptotic complexity of matrix multiplication, SIAM J. Comp. **11** (1982), 472–492.

[10] *D. Coppersmith* and *S. Winograd,* Matrix Multiplication via arithmetic progressions, J. Symbolic Comput. **9/3**, pp. 251–280 (1990).

[11] *M. Franz,* Moment polytopes of projective *G*-varieties and tensor products of symmetric group representations, Journal of Lie Theory **12**, (2002), 539–549.

[12] *W. Fulton,* Introduction to toric varieties, Annals of Mathematics Studies Nr. 131, Princeton University Press (1993)

[13] *W. Fulton, J. Harris,* Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics vol. 129, New York-Heidelberg-Berlin (1991).

[14] *P. A. Gartenberg,* Fast rectangular matrix multiplication, PhD thesis, Los Angeles 1985.

[15] *N. Gastinel,* Sur le calcul de produits de matrices, Num. Math. **17**, pp. 222–229 (1971)

[16] *J. von zur Gathen, J. Gerhard,* Modern Computer Algebra, Cambridge University Press 1999.

[17] *H. F. de Groote,* Lectures on the complexity of bilinear problems, Lect. Notes in Comp. Science **245**, Berlin-Heidelberg-New York 1987.

[18] *J. E. Hopcroft* and *J. Musinski,* Duality applied to the complexity of matrix multiplications and other bilinear forms, SIAM J. Comp. **2** (1973), 159–173.

[19] *J. E. Humphreys,* Linear Algebraic Groups, Graduate Texts in Mathematics vol. 21, New York-Heidelberg-Berlin (1987).

[20] *R. V. Kadison,* A representation theory for commutative topological algebra, Mem. Amer. Math. Soc. **7** (1951).

[21] *W. Keller-Gehrig,* Fast algorithms for the characteristic polynomial, Theor. Comp. Sci. **36** (1985), 309–317.

[22] *H. Kraft,* Geometric methods in representation theory, in: Representations of Algebras, Workshop Proc., Puebla, Mexico 1980, Lecture Notes in Mathematics **944**, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[23] *H. Kraft,* Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Aspekte der Mathematik, Braunschweig 1984.

[24] *D. Mumford,* Proof of the convexity theorem, appendix to L. Ness, A stratification of the null cone via the moment map, Amer. J. Math. **106** (1984), 1281–1329.

[25] *V. Ya. Pan,* Strassen's algorithm is not optimal, Proc. 19th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Ann. Arbor, Mich. 1978, 166–176.

[26] *V. Ya. Pan,* New fast algorithms for matrix operations, SIAM J. Comput. **9** (1980), 321–342.

[27] *F. Romani,* Some properties of disjoint sums of tensors related to matrix multiplication, SIAM J. Comput. **11** (1982), 263–267.

[28] *A. Schönhage,* Unitäre Transformationen großer Matrizen, Num. Math. **20** (1973), 409–417.

[29] *A. Schönhage,* Partial and total matrix multiplication, SIAM J. Comp. **10** (1981), 434–455.

[30] *M. H. Stone,* A general theory of spectra I, Proc. N.A.S. **26** (1940), 280–283.

[31] *J. Stoss,* The complexity of evaluating interpolation polynomials, Theoret. Comput. Sci. **41** (1985), 319–323.

[32] *V. Strassen,* Gaussian Elimination is not optimal, Num. Math. **13** (1969), 354–356.

[33] *V. Strassen,* Die Berechnungskomplexität von elementarsymmetrischen Funktionen und von Interpolationskoeffizienten, Num. Math. **20/3** (1973), 238–251.

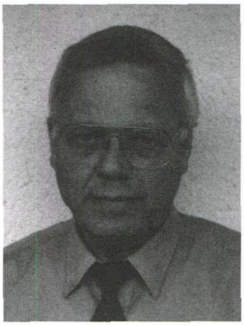
[34] *V. Strassen,* Vermeidung von Divisionen, J. reine angew. Math. **264** (1973), 184–202.

[35] *V. Strassen,* Polynomials with rational coefficients which are hard to compute, SIAM J. Comp. **3** (1974) 128–149.

[36] *V. Strassen,* Relative bilinear complexity and matrix multiplication, J. reine angew. Math. **375/376** (1987), 406–443.

[37] *V. Strassen,* The asymptotic spectrum of tensors, J. reine angew. Math. **384** (1988), 102–152.

[38] *V. Strassen,* Degeneration and complexity of bilinear maps: Some asymptotic spectra, J. reine angew. Math. **413** (1991), 127–180.



Dieter Gaier (1928–2002) in memoriam

Michael von Renteln

Abstract

- Keywords and Phrases: Dieter Gaier, Funktionentheorie, konforme Abbildung, Approximation im Komplexen.
- Mathematics Subject Classification: 01 A 70

Inhalt

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Karl Hinderer (Karlsruhe) danke ich für das Foto von Dieter Gaier als junger Dozent.

Der Nachlaß von Dieter Gaier wird dem Zentralarchiv für Mathematiker-Nachlässe an der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen übergeben.

Eingegangen: 03. 12. 2004

Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe (TH),
Michael.vonRenteln@math.uni-karlsruhe.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

I Biographie und wissenschaftlicher Werdegang

Am 15. Dezember 2002 erlag in den frühen Morgenstunden im Göppinger Krankenhaus *Am Eichert* Prof. Dr. Dieter Gaier, Ph. D., einer heimtückischen Krankheit, die ihn die letzten vier Jahre begleitet hatte.

1 Elternhaus und Schule

Dieter Gaier wurde am 12. Mai 1928 in Stuttgart geboren. Sein Elternhaus stand jedoch in Göppingen, wo sein Vater Albert Gaier Studienrat für die Fächer Englisch und Deutsch am Hohenstaufen-Gymnasium war. Dieter Gaier besuchte von 1938–46 dieses Gymnasium. Fast die gesamte Schulzeit fiel in die Kriegsjahre und er selbst war noch in den Jahren 1944 und 1945 als Flakhelfer im Einsatz.

2 Studium an der TH Stuttgart

1946 begann er sein Studium der Mathematik und Physik an der TH Stuttgart. An der damaligen TH Stuttgart gab es nach dem 2. Weltkrieg nur zwei jüngere Mathematiker, welche die Analysis vertraten: Professor Friedrich Lösch und den Dozenten Werner Meyer-König. An diese schloss er sich wissenschaftlich an.

Ab 1946 hörte Dieter Gaier bei Lösch Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Im Sommersemester 1948 wurden erstmals die Weichen für seine späteren Interessensgebiete gestellt durch die Vorlesungen *Funktionentheorie I* und *Lebesguesches Integral*, beide bei Lösch. Nach der Vorlesung Funktionentheorie II im Wintersemester 1948/49 nahm Dieter Gaier im Sommersemester 1949 an dem Funktionentheorie-Seminar von Lösch teil, in dem der große Picardsche Satz und Sätze im Umkreis davon (Schottky, Landau, Bloch) behandelt wurden. Hier lernte Gaier mit den Verfahren von Borel und Euler und den Verallgemeinerungen von Knopp und Lindelöf zum ersten Mal Summierungsverfahren und Probleme der Limitierungstheorie kennen. Aus diesem Bereich stammen auch Gaiers erste Forschungsarbeiten.

Dieser Fragenkreis wurde vertieft durch das Oberseminar von Lösch im Wintersemester 1949/50. Themen aus dem Buch von Landau [La], u. a. Lückensätze (Hadamard, Fabry) und Beispiele von Potenzreihen mit pathologischen Eigenschaften (Hardy, Lusin, Sierpinski) wurden behandelt.

3 Rochester und Harvard

Im Jahre 1950 beendete Dieter Gaier sein reguläres Studium an der TH Stuttgart mit dem Staatsexamen in Mathematik und Physik. Er wollte jedoch nicht in den Schuldienst, sondern ging mit einem Stipendium der Firma Kodak an die University of Rochester. Dort lehrte mit Professor Wladimir Seidel ein namhafter Funktionentheoretiker, der besonders bekannt wurde durch seine *Seidel's class U* ([No], S. 32), eine wichtige Funktionenklasse deren Elemente man später nach Beurling (1949) als innere Funktionen bezeichnete.

Mit der ihm eigenen Energie gelang es Gaier innerhalb eines Jahres seinen Ph. D. in Mathematics zu erreichen (1951). Nach Deutschland zurückgekehrt erfolgte 1952 seine Promotion zum Dr. rer. nat. bei Meyer-König und Lösch an der TH Stuttgart.

Dieter Gaier fing schon sehr früh an wissenschaftlich zu publizieren. Seine erste mathematische Abhandlung [1] *Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenz- und Dirichletreihen am Rande von Summationsgebieten* verfasste er mit 21 Jahren.

Die ersten Arbeiten, etwa bis 1955, gehören sämtlich in das Gebiet *Potenzreihen und Limitierungstheorie* und brachten ihm Erfolge im Wettstreit mit bekannten Mathematikern, wie z. B. Erdös, Herzog und Piranian.

1953 ging er mit einem Stipendium an eines der großen Zentren mathematischer Forschung, und zwar an die Harvard University zu Joshua Walsh. Dieser war weithin bekannt durch sein 1935 erschienenes klassisches Buch *Interpolation and Approximation* ([Wa]). Dieses inhaltsschwere Buch hat Dieter Gaier mit äußerster Akribie durchgearbeitet. Als Frucht seines Aufenthaltes bei Walsh an der Harvard University entstand 1955 seine Habilitationsschrift *Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete.*

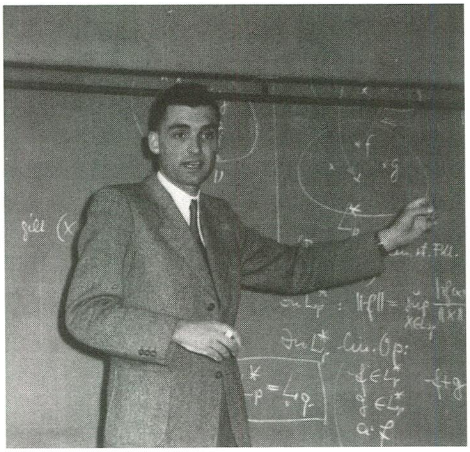
Nach erfolgreicher Habilitation wurde Dieter Gaier Dozent an der TH Stuttgart; ein junger Dozent, der durch seine anregenden Vorlesungen die Studenten zu begeistern und mitzureißen verstand. So war es kein Wunder, dass er bald Zulauf fand. Dieter Gaier führte während seiner gesamten Dienstzeit ein Heft, in dem er alle Diplom- und Staatsexamensarbeiten (über 100) mit Verfasser, Thema, Ausgabedatum, Kurzprotokolle der Besprechungen und erzielten Fortschritte des Kandidaten bis zum Examen mit Abschlussnote eintrug.

Durch seine Aktivitäten und Publikationen wurde man auch bald außerhalb Stuttgarts auf den jungen Dozenten Dieter Gaier aufmerksam. So lud man ihn an die Universität Göttingen ein, an der er im Wintersemester 1957/58 eine Vorlesung über Funktionentheorie hielt.

4 Professor in Giessen

1959 erhielt Dieter Gaier im Alter von 31 Jahren den Ruf auf ein Extraordinariat, übrigens für *Angewandte Mathematik und Biomathematik* an die Universität Giessen. Als Biomathematiker war Gaier später Zweitgutachter bei einer medizinischen Habilitation (Rudolf Repges). 1962 wurde das Extraordinariat in ein Ordinariat umgewandelt.

Die Universität Giessen sollte nun für die nächsten rund 40 Jahre seine Wirkungsstätte werden. Die Giessener Universität ist zwar klein, hat aber eine beachtliche Tradition. Hier wirkten über kürzere oder längere Zeit so bekannte Mathematiker wie Clebsch, Gordan, Pasch, Netto, Engel, Schlesinger, Plessner, Grötzsch, Grunsky, Ullrich und Köthe. Als Gaier nach Giessen kam, gab es an der Universität nur zwei Professoren für Mathematik, K. Maruhn und H. Boerner, beide vor dem Krieg in Leipzig bei Lichtenstein promoviert. Weiterhin gab es einen Dozenten F. Huckemann und einen habilitierten Assistenten K. Endl. Drei Jahre später kam im Jahre 1962 noch Professor G. Pickert mit seinen Assistenten von der Universität Tübingen hinzu.



Aus der Zusammenarbeit von Huckemann und Gaier entstand 1962 die wichtige Arbeit [27], deren Hauptsatz von den Studenten ehrfürchtig als „Gaiers Achtersatz“ bezeichnet wurde, nach der optimalen Konstanten in diesem Satz.

Das wissenschaftliche Ansehen von Dieter Gaier stieg in den Giessener Jahren beträchtlich. Er nahm mehrfach Gastprofessuren im Ausland wahr, darunter dreimal am renommierten Caltech in Pasadena auf Einladung von John Todd.

Schon 1964 erhielt er den ersten Ruf nach auswärts, und zwar an die TH Stuttgart. 1966 folgte der Ruf an die TH Darmstadt, der besonders ehrenvoll war, weil es sich um die Nachfolge von Alwin Walther handelte. 1968 erfolgte der Ruf an die Universität Tübingen und schließlich 1979 der Ruf an die Universität Ulm. Obwohl ihn insbesondere die beiden letzten Rufe sehr reizten, blieb er der Universität Giessen treu.

Die Vorlesungen von Dieter Gaier waren bei den Studenten sehr beliebt, weil sie gut vorbereitet waren, gut vorgetragen wurden und wegen ihrer Klarheit. Das zeigte sich schon rein äußerlich an einem mustergültigen Tafelbild. In höheren Vorlesungen verwies er ständig auf neueste Forschungsergebnisse und schrieb die entsprechenden MR-Zitate an die Tafel.

Als Prüfer galt Dieter Gaier als schwer und war bei manchen eher gefürchtet als beliebt, so dass viele Studenten seiner Vorlesungen zu anderen Professoren auswichen, was Dieter Gaier gar nicht behagte. Denn er kümmerte sich intensiv um seine Studenten.

Dieter Gaiers Lieblingskind war die mathematische Institutsbibliothek, über die er sozusagen die Oberaufsicht führte und in die er viele Mittel aus seinen Bleibeverhandlungen steckte. Im Laufe der Jahre hat er den Zeitschriftenbestand erheblich ausgeweitet, so dass die Giessener mathematische Bibliothek wohl zu einer der ersten Institutsbibliotheken in Deutschland aufrückte und auch mit ganz seltenen ausländischen mathematischen Zeitschriften vertreten war. Zu einem Gutteil wurden diese Zeitschriften im Tausch mit den *Mitteilungen aus dem mathematischen Seminar Giessen* erworben, dessen geschäftsführender Herausgeber Dieter Gaier während seiner gesamten Dienstzeit war.

5 Bergsteigen und Mathematik

Dieter Gaier hatte außerhalb der Mathematik manche Interessen. Besonders liebte er seinen Garten, den er selber pflegte und in dem er manch exotische Pflanze aufzog.

Dieter Gaier war Mitglied des Gießener Rotary Clubs und diesem sehr verbunden. Er hielt dort viele Vorträge, so über *Vermutung und Beweis in der Mathematik*, *Mathematische Aspekte des 10 DM-Scheins* (der mit Gauß auf der Frontseite), *Johann Radon und die Computertomographie* oder *Primzahlen und ihre Anwendung in der Codierungstheorie*.

Dieter Gaiers ganz besondere Leidenschaft galt aber den Bergen, den Alpen. Er pflegte zu sagen: „Erst über 2000 Metern ist man frei." Seine Lieblingsgebiete waren die Allgäuer Alpen (Trettachspitze), die Silvretta, die Südtiroler Berge (Dolomiten und Brenta) und besonders die Ötztaler.

6 Vermächtnis

Wie kürzlich mitgeteilt ([Re], S. 49) hat Dieter Gaier der Oberwolfach-Stiftung in seinem Testament von 1996 ein wertvolles Grundstück in bester Lage in Tübingen vermacht, dessen beträchtlicher Verkaufserlös inzwischen der Stiftung zugeflossen ist. Aber auch schon 1999 bedachte er die Oberwolfach-Stiftung mit einer großzügigen Schenkung. Er war im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach oft selbst Leiter bei Tagungen über *Funktionentheorie* und *Konstruktive Verfahren in der Komplexen Analysis*, letztere zusammen mit P. Henrici und R. Varga.

Nach seiner Emeritierung im Jahr 1995 war Dieter Gaier weiter in der Forschung tätig und aktiver Teilnehmer vieler Tagungen, die letzte im Juni 2001 über *Computational Methods and Function Theory* in Aveiro (Portugal). In den letzten Monaten war er allerdings durch die Krankheit an sein Göppinger Haus gefesselt.

Dieter Gaier wurde auf dem Friedhof seiner Heimatstadt Göppingen beigesetzt. Sein Grab befindet sich in unmittelbarer Nähe der Kapelle.

II Das wissenschaftliche Werk

1 Potenzreihen und Limitierungstheorie

Die Limitierungstheorie entstand gegen Ende des 19. Jahrhunderts aus dem Verlangen, gewissen divergenten Reihen auf sinnvolle Weise durch verschiedene Verfahren eine Summe zuzuordnen.

Das ist im Laufe der Jahre auf eindrucksvolle Weise gelungen. Man hat dazu viele interessante Summierungsverfahren entwickelt, die mit den Namen Abel, Borel, Cesàro, Euler, Hausdorff, Hölder, Knopp, Riesz und weiteren verknüpft sind. Den Beginn der Theorie kann man mit Erscheinen der berühmten Arbeit von Frobenius im Crelleschen Journal von 1880 festsetzen, in der bewiesen wird, dass aus der Cesàro-Summierbarkeit die Abel-Summierbarkeit folgt. Die Umkehrung gilt unter gewissen Voraussetzungen an die Koeffizienten und die diesbezüglichen Umkehrsätze nennt man Taubersätze, nach Alfred Tauber, der 1897 einen ersten solchen Satz veröffentlichte. Auf diesem Gebiet haben später Hardy und Littlewood bedeutende Erfolge erzielt. Einen großen Impetus erhielt die Theorie durch das im Jahre 1901 erschienene Buch von E. Borel *Leçcons sur les séries divergentes.*

Weiter ins Zentrum des aktuellen Interesses einer breiteren mathematischen Öffentlichkeit rückte die Limitierungstheorie mit Erscheinen des Buches von Knopp *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* An mathematischen Hilfsmitteln für diese Theorie ging vor allem die Funktionentheorie ein.

Es tat sich ein fruchtbares Feld mathematischer Forschung auf, das in Deutschland vor allem von Knopp und seinen Schülern (Lösch, Meyer-König, Zeller, Peyerimhoff, Jurkat und weiteren) bearbeitet und gepflegt wurde. Auch Dieter Gaier als Schüler von Lösch und Meyer-König war hier beteiligt.

1.1 Gaier Regions

Die erste Veröffentlichung [1] von Dieter Gaier beschäftigt sich mit dem Abelschen Problem, d. h. aus dem Verhalten der Teilsummen einer gegebenen Potenzreihe $f(z)$ in einem Randpunkt z_0 des Konvergenzkreises auf das Verhalten von $f(z)$ für $z \to z_0$ zu schließen. Für dieses Problem und seine Verallgemeinerungen erzielte er weitreichende Resultate, die in Spezialfällen bekannte Ergebnisse anderer Mathematiker, z. B. von Karamata, enthielt. Anschließend dehnte er seine Ergebnisse auf weitere Summationsverfahren und auf Dirichletreihen aus.

Die Arbeit [2] beschäftigt sich mit Euler- und Borelsummierung und gibt P. Erdös, F. Herzog und G. Piranian Veranlassung *Gaier disc* und allgemeiner *Gaier regions* zu definieren ([EHP]). Folgendes Lemma von Gaier, auf dem das Hauptergebnis dieser Arbeit basiert, ist von allgemeinem Interesse:

Lemma: *Ist die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *im Gaier disc* $|z+a| < 1+a \quad (a>0)$ *holomorph und beschränkt, so gilt für die Koeffizienten* $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *bezüglich* $n \to \infty$.

Die Arbeit [3] gibt einen Auszug aus seiner Ph. D.-Thesis, University of Rochester, die Tauber-Sätze zum Gegenstand hat und in der insbesondere Untersuchungen von Karamata weitergeführt werden.

1.2 Schlangengebiete

Die Arbeit [4] ist eine hübsche Note, in der Gaier durch eine pfiffige Idee einen Satz von Erdös- Herzog- und Piranian auf verblüffend einfache Weise beweisen kann.

Ausgangspunkt war das Hardysche Beispiel einer Potenzreihe, die auf dem Rand des Konvergenzkreises gleichmäßig aber nicht absolut konvergiert (siehe etwa [B5], S. 68 ff). Im ersten Band des *Pacific Journal of Mathematics* erschien im Jahre 1951 eine interessante Arbeit von Erdös, Herzog und Piranian, in der sie das Hardysche Beispiel erheblich verbesserten. Sie zeigten, dass die Potenzreihe sogar als konforme Abbildung gewählt werden kann. Der Beweis beruht auf langwierigen und kunstvollen Rechnungen. Dieter Gaier gibt in [4] einen neuen Beweis dafür, der ganz kurz ist und fast ohne Rechnung auskommt, indem er eine schlaue Idee ausnützt. Bekannt war durch Fejér, dass eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (mit Konvergenzradius o.B.d.A. $r = 1$) gleichmäßig auf dem Rand $|z| = 1$ konvergiert, wenn sie eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf ein Jordangebiet liefert. Unter diesen vielen Möglichkeiten muss nur ein Fall gefunden werden, in dem $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergiert. Gaier erkannte nun, dass man $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ an eine geometrische Größe, nämlich die Länge einer gewissen Kurve koppeln kann. Diese Kurve ist das Bild eines Radius des Konvergenzkreises unter der betreffenden konformen Abbildung. Um $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$ zu erreichen, muss man das Bildgebiet so schlangenartig (oszillatorisch) wählen, dass die Bildkurve, die ja in diesem Schlangengebiet verläuft, unendliche Länge hat. Das geschieht, indem man die Höhen h_n der einzelnen Oszillationen, die ja gegen Null gehen müssen, so wählt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} h_n = \infty$ gilt, also etwa $h_n = \frac{1}{n}$.

Diese Beweisidee ist so schön, dass sie 20 Jahre später wieder entdeckt wurde ([Nov]).

1.3 Neue funktionentheoretische Methoden

Mit den Arbeiten [5], [7], [12], [13], [21] führt Gaier neue funktionentheoretische Methoden zur Lösung von Problemen aus der Limitierungstheorie ein und zwar insbesondere Methoden aus der Theorie der ganzen Funktion. Das Hauptergebnis von [7], eine Verschärfung von Sätzen von Karamata und Garten basiert auf einem Lemma über holomorphe Funktionen von Exponentialtyp in der rechten Halbebene, was die Referenten in den Mathematical Reviews und im Zentralblatt auch besonders hervorheben.

Ganz massiv kommen die Methoden der Theorie der ganzen Funktionen in den Arbeiten [12], [13], [21] zum Tragen. In der Arbeit [12] *On modified Borel methods* basieren weite Teile der Analysis auf einem Theorem von Mary Cartwright.

1.4 Das High-Indices-Theorem für das Borel-Verfahren

Als Krönung und Schluss der Gaierschen Arbeiten über Limitierungstheorie kann man den Artikel *Der allgemeine Lückenumkehrsatz für das Borel-Verfahren* [31] ansehen, der ein abschließendes Ergebnis einer langjährigen Entwicklung darstellt.

Theorem (Gaier, 1965) *Hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ große Lücken (d. h. $a_n = 0$ für $n \neq n_k$ wobei $n_{k+1} - n_k \geq C\sqrt{n_k}$ mit einer Konstanten $C > 0$) und ist sie Borelsummierbar, so ist sie konvergent, d. h. gewöhnlich summierbar.*

Mit diesem Satz schließt sich eine lange Kette von Untersuchungen verschiedener Mathematiker, die den Satz bewiesen hatten unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Koeffizienten a_n (Pitt, 1938; Meyer-König und Zeller, 1956) oder an die Lückenlängen (Erdös, 1956). Der Beweis durch Gaier, dass keinerlei zusätzliche Bedingungen notwendig sind, glich einer kleinen Sensation. Im Beweis des Theorems zieht Gaier auch allerlei tiefliegende Sätze heran, insbesondere das Turánsche Lemma. Mit diesem Lemma hat sich Gaier später noch öfter beschäftigt.

Angeregt durch diese Arbeit von Gaier gibt Ingham [In] einen weiteren Beweis dieses High-Indizes-Theorems.

1.5 Das Turánsche Lemma

Das Turánsche Lemma ist ein merkwürdiger Satz über Polynome, der ein verblüffendes Ergebnis enthält. Es handelt sich um die Abschätzung eines Polynoms P auf dem Einheitskreis und lautet folgendermaßen:

Turánsches Lemma: *Jedes Polynom P kann auf dem gesamten Einheitskreis durch das Maximum M_δ des Betrages dieses Polynoms auf einem kleinen Teilbogen der Länge $\delta > 0$ abgeschätzt werden durch*

$$|P(z)| \leq \left(\frac{C}{\delta}\right)^N \cdot M_\delta \,,$$

wobei N die Anzahl der Polynomglieder und C eine absolute Konstante ist.

Interessant ist hierbei, dass N nicht etwa der Grad des Polynoms ist (Abschätzungen solcher Art sind gängig), sondern die Anzahl der Summanden.

Mit diesem Lemma hat sich Dieter Gaier immer wieder beschäftigt. In [37] gibt Dieter Gaier einen neuen Beweis des Turánschen Lemmas und untersucht Möglichkeiten der Übertragung auf allgemeinere Situationen.

2 Konforme Abbildung

Das Hauptarbeitsgebiet von Dieter Gaier war die konforme Abbildung, insbesondere ihre numerische Seite mit Iterationsverfahren zur Gewinnung von konformen Abbildungen. Die Idee sich mit solchen Verfahren zu befassen geht wohl auf seinen Lehrer Lösch zurück, der sich während des 2. Weltkrieges in der Luftfahrtforschung mit diesen Verfahren beschäftigte.

2.1 Der Einfluß von J. L. Walsh

Die erste Veröffentlichung von Gaier zur Theorie der Konformen Abbildung erfolgte während seines Aufenthaltes an der Harvard University in einer gemeinsamen Arbeit [10] mit J. L. Walsh. Sie beschäftigt sich mit der Verzerrung konformer Abbildungen am Rande des Gebietes und verbessert Resultate von Ostrowski (1935) und Warschawski (1936).

Als Frucht der Studien bei J. L. Walsh entstand Gaiers Habilitationsschrift *Über die konforme Abbildung variabler Gebiete* von 1955 ([14]). Als Ausgangspunkt kann man folgendes grundlegende Problem aus dem Buch *Interpolation and Approximation in the Complex Domain* ([Wa], Chap. II) von Walsh ansehen.

Problem: Gegeben sei eine Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten $G_n (n \in \mathbb{N})$ die gegen ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet G_0 (die alle Null enthalten) „konvergiert". Seien f_n und f die (nach Riemann eindeutig existierenden) normierten konformen Abbildungen von G_n und G auf den Einheitskreis. Konvergieren dann auch die Funktionen f_n (in irgendeinem Sinne) gegen die Funktion f?

Wegen der möglichen komplizierten Struktur einfach zusammenhängender Gebiete (z. B. das Vorhandensein nicht erreichbarer Randpunkte) und das Problem einer geeigneten Konvergenzdefinition von Gebieten und Funktionen ergeben sich komplizierte topologische Fragen, deren Behandlung den Großteil der Arbeit ausmachen.

2.2 Das Iterationsverfahren von Komatu

Komatu hat im Jahre 1945 ein wichtiges Iterationsverfahren zur Gewinnung einer konformen Abbildung f eines durch Jordankurven berandetes Ringgebietes auf ein Kreisringgebiet $\{M < |w| < 1\}$ veröffentlicht. Während Komatu nur die Konvergenz des Iterationsprozesses $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ bewies, wobei f_n die n-te Komatusche Näherungsfunktion ist, gelang es Gaier in [18] folgende äußerst feine quantitative Abschätzung für die Konvergenzrate zu gewinnen:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq C(\frac{4}{\pi} \text{ Arctan } M)^{2n} .$$

Dies gilt für alle z aus dem Ringgebiet mit einer (vom Ausgangsgebiet abhängigen) Konstanten C. Daraus folgt insbesondere die gleichmäßige Konvergenz auf dem gesamten Gebiet, und nicht nur auf kompakten Teilen, und damit eine Verbesserung der bisherigen Ergebnisse.

In einer weiteren umfangreichen Arbeit [25] wendet sich Gaier der konformen Abbildung n-fach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete zu. Erstmalig erhält er in diesem allgemeinen Fall Fehlerabschätzungen. Im Spezialfall $n = 2$ gelingt ihm ein besonderer Effekt. Durch die Idee, bei jedem Iterationsschritt eine Spiegelung einzuschalten erreicht er eine beträchtliche Beschleunigung des Verfahrens.

2.3 Der Achtersatz

Ausgangspunkt für den Achtersatz war die optimale Konstante C in der in Abschnitt 2.2. gegebenen Abschätzung zu finden. Angezogen von diesem schönen rein theoretischen Problem haben sich renommierte Funktionentheoretiker um eine Lösung bemüht.

Die Lösung gelang schließlich unabhängig voneinander drei Forschergruppen, nämlich Duren und Schiffer [DuS], Huckemann und Gaier [27], sowie etwas später Gehring und af Hällström (GeH).

Achtersatz: *Für alle konformen Abbildungen f des Kreisringes $K_r : 0 < r < |z| < 1$ in den Einheitskreis mit den Normierungen $|f(z)| = 1$ für $|z| = 1, f(1) = 1$ und $0 \notin f(K_r)$ gilt die Abschätzung*

$$|f(z) - z| < 8r$$

($z \in K_r$). Dabei ist die Konstante 8 bestmöglich.

Trivialerweise ist insbesondere $f(z) = z$, also die Identität eine solche Abbildung. Obige Abschätzung besagt nun, dass alle anderen konformen Abbildungen welche dies leisten nahe (im obigen Sinn) bei der Identität liegen.

Während Duren und Schiffer [DuS] den Achtersatz nur für hinreichend kleine r erhielten und die Vermutung ansprachen, dass er für alle r gilt, zeigten Gaier und Huckemann, dass diese Vermutung zutrifft und erreichten damit die endgültige Form.

Die Abschätzung im Achtersatz ist nicht nur ein theoretisch schönes Ergebnis, sondern auch praktisch bedeutsam für die Konvergenzgeschwindigkeit gewisser Iterationsverfahren zur Konformen Abbildung von Ringgebieten.

2.4 Konstruktive Methoden

1964 erschien Gaiers Buch *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung* in der neu gegründeten Reihe *Springer Tracts in Natural Philosophy* (ursprünglich *Ergebnisse der angewandten Mathematik*) des Verlages von Julius Springer. Die Aufforderung, ein solches Buch zu schreiben, kam von Lothar Collatz aus Hamburg. Durch immer leistungsfähigere elektronische Rechenanlagen ab 1958 war es möglich geworden mehr konstruktive Methoden der Konformen Abbildung für die Praxis zum Einsatz zu bringen, insbesondere in der Aerodynamik (Flugzeugbau) und allgemein in der Strömungslehre aber auch in der Elektrotechnik und Elastizitätstheorie. Gaiers Buch bringt eine nahezu vollständige Übersicht über alle numerischen Verfahren der Konformen Abbildung von einfach und auch mehrfach zusammenhängenden Gebieten auf Normalgebiete und gibt Anleitung zur praktischen Durchführung. Dem theoretischen Hintergrund mit Konvergenzuntersuchungen und Fehlerabschätzungen wird besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

2.5 Quadrilaterals

In einer Reihe von Arbeiten, vornehmlich mit Hayman [67], [69] und Papamichael [63] hat sich Gaier mit Abschätzungen des Konformen Moduls von speziellen topologischen Vierecken (quadrilaterals, d. h. zwei „Seiten" der Vierecke dürfen Jordanbögen sein) und gewissen Ringgebieten befaßt. Die Güte der Fehlerabschätzungen wird an instruktiven Beispielen numerisch getestet. Dies ist von großer Bedeutung für die praktische Ausführung von Konformen Abbildungen. Eine schöne Übersicht befindet sich in der Arbeit [77].

3 Funktionentheorie

Dieter Gaier verfaßte neben seinen Arbeiten zur konformen Abbildung auch viele Beiträge zur allgemeinen Funktionentheorie.

3.1 Ganze Funktionen

Wie im Abschnitt 2.1 gezeigt, entwickelte Gaier eigene Methoden aus der Theorie der ganzen Funktionen, um Probleme der Limitierungstheorie zu lösen. Daraus entstanden auch einige davon unabhängige Arbeiten über holomorphe Funktionen mit Beschränkung an Ordnung und Typ in Winkelräumen, wie z. B. die Arbeit [15] mit H. Delange *Über asymptotische Wege analytischer Funktionen*. Diese Publikation wurde fortgesetzt in der Arbeit [57] mit Kjellberg.

3.2 Harmonisches Maß

Das harmonische Maß hat Dieter Gaier mehrfach benutzt, um von konformen und quasikonformen Abbildungen f von beschränkten einfach zusammenhängenden Gebieten G mit $0 \in G$ und $1 \in \partial G$ auf den Einheitskreis mit den Normierungen $f(1) = 1$ und $f(0) = 0$ Abschätzungen von f in der Nähe des Randpunktes 1 in der Form

$$|f(z) - 1| < C|z - 1|^{\mu}$$

mit optimalen Konstanten C und μ zu erhalten. Er bewies dazu Sätze über Abschätzungen des harmonischen Maßes von gewissen Kurven die von eigenständigem Interesse sind.

Es gibt jedoch eine Arbeit über das harmonische Maß, welche ganz aus diesem Rahmen fällt, *A note on Hall's Lemma* [42]. Diese Arbeit hat ihren Ursprung darin, dass Dieter Gaier um 1970 versuchte, einen Beweis des Coronatheorems von Carleson für die Vorlesung *Funktionentheorie II* aufzubereiten. Das war lange bevor T. Wolff seinen neuen Beweis gab, der beträchtliche Vereinfachungen brachte. Der alte Beweis (siehe etwa [Du], S. 202–218) benutzte das Hallsche Lemma über das harmonische Maß. Beim Grübeln über den Beweis bemerkte Dieter Gaier, dass sich die Abschätzung von Hall verbessern läßt, wenn man eine etwas eingeschränktere geometrische Situation betrachtet. Die Arbeit wurde seinerzeit viel beachtet und gab Veranlassung zu Nachfolgearbeiten, u. a. von W. K. Hayman und J. A. Jenkins.

3.3 Landaus Buch

Im Jahre 1916 veröffentlichte Edmund Landau ein Buch mit dem Titel *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, ein Juwel funktionentheoretischer Literatur.

Es beeinflußte viele Mathematiker und erschien 1929 in 2. Auflage und im Jahre 1946 als Chelsea-Reprint. Bei vielen der in diesem Buch behandelten Themen ist Landau durch Originalarbeiten vertreten, für Sätze anderer Forscher gibt er meist kurze und neue Beweise, die oft in ihrer Eleganz nicht mehr übertroffen werden können. Hardy sagt in seiner Rezension über dieses Buch sogar *Probably Landau's most beautiful book.*

Nachdem das Buch lange vergriffen war, besorgte Dieter Gaier auf Anregung von R. Remmert im Jahre 1986 eine Neuauflage, die den Umfang des Landauschen Buches fast verdoppelt, und damit viel mehr als nur eine reine Neuauflage wurde. Diese 3. Auflage [B5] ist durch zwei umfangreiche Anhänge von Dieter Gaier bereichert. Im 1. Anhang werden alle seit 1929 erzielten Forschungsergebnisse zu den im Landauschen Buch behandelten Themenkreisen aufgelistet, eine gewaltige Arbeit, die eine umfangreiche Kenntnis der Spezialliteratur auf diesem Gebiet verlangt. Im 2. Anhang werden neuere Themenkreise vorgestellt, etwa *Ringe und Algebren holomorpher Funktionen*, die den Stoff des Landauschen Buches harmonisch ergänzen und abrunden. Dabei wächst das Literaturverzeichnis von rund 80 auf über 400 Nummern und umfaßt wohl alle einschlägigen Arbeiten. Die Rezensionen über das Buch von Landau/Gaier sind teilweise enthusiastisch, z. B. in den Mathematical Reviews, die fast eine ganze Seite dafür aufwenden, oder im Mathematical Intelligencer **11** (1989), S. 61–63.

3.4 Räume konformer Abbildungen

Anfang der 1980er Jahre gelangte Dieter Gaier zu einem ganz neuen Forschungsgebiet, zu dem er durch eine Vermutung von Gauthier aus der komplexen Approximationstheorie geführt wurde. Zugrunde liegt die Gruppe $\sum(G)$ aller konformen Abbildungen eines beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiets G auf sich selbst (bezüglich der Komposition). Gaier führt mit

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\{|\varphi_1(z) - \varphi_2(z)| : z \in G\}$$

eine naheliegende und geeignete Metrik auf $\sum(G)$ ein, die $\sum(G)$ zu einem vollkommenen metrischen Raum macht. In einer großangelegten Arbeit [59] beweist Gaier grundlegende Tatsachen über die Struktur von $\sum(G)$ die sich auf Vollständigkeit, Kompaktheit und Zusammenhang beziehen. Angewandt auf das ursprüngliche Problem aus der komplexen Approximationstheorie kann er die Vermutung von Gauthier widerlegen. Diese Arbeit von Gaier, insbesondere der Katalog offener Fragen am Schluß, leitete eine neue Entwicklung funktionentheoretischer Forschung ein, an der in der Folge mehrere Funktionentheoretiker beteiligt waren, vor allem G. Schmieder. Wesentliche Fragen sind allerdings bis heute noch unbeantwortet.

3.5 Historische Artikel

Zu ihrem hundertjährigen Bestehen veröffentlichte die deutsche Mathematikervereinigung (DMV) im Jahre 1990 einen Festband unter dem Titel *Ein Jahrhundert Mathematik, 1890–1990*, in dem 20 anerkannte Fachvertreter über die Geschichte ihres Faches in Deutschland in den letzten hundert Jahren berichten. Für die Funktionentheorie wurde Dieter Gaier gebeten, diese Aufgabe zu übernehmen. Er hat sie mit großer Sachkenntnis ausgeführt. Welche ungeheure Arbeit in diesem gründlichst recherchierten 60-seitigen Artikel steckt, kann man nur erahnen.

Zu den historischen Artikeln zählt auch Gaiers Publikation [72] über Leben und Werk von A. Plessner, der 1923 in Giessen mit einer bedeutenden Arbeit über Fourieranalysis bei Schlesinger promovierte, dem man aber als Jude die Habilitation verweigerte, indem man bürokratische Hürden aufrichtete.

4 Approximationstheorie

Ein Gutteil der Gaierschen Publikationen entstammt dem Gebiet der reellen und der komplexen Approximationstheorie. Für das letztere hat er das neuere Standardwerk [B3] verfaßt.

4.1 Approximation im Komplexen

Seit seinen Aufenthalten in Harvard bei J. L. Walsh hat sich Dieter Gaier immer wieder mit Fragen aus der komplexen Approximationstheorie beschäftigt. Das Standardwerk über dieses Gebiet war das Buch von J. L. Walsh *Interpolation and Approximation in the Complex Domain* das bereits 1935 erschien. Hier fehlte auch in den späteren Auflagen die ganze moderne Entwicklung nach dem 2. Weltkrieg, die vor allem mit den Namen Mergeljan, Arakeljan und Nerzesjan verbunden ist. Das veranlaßte Dieter Gaier sein Buch *Approximation im Komplexen* ([B3]) zu schreiben, welches neben der klassischen Approximation durch Reihenentwicklung und Interpolation auch in einem 2. Teil die moderne Entwicklung berücksichtigt.

Dieser 2. Teil enthält u. a. die Approximationssätze von Carleman, Mergeljan und Arakeljan, den Lokalisationssatz von Bishop und das Fusion-Lemma von Alice Roth. Gaiers Buch fand bei den Experten einen solchen Anklang, dass es ins Englische [B7], ins Russische [B6] und ins Chinesische [B4] übersetzt wurde.

4.2 Das Fusion-Lemma von Alice Roth

Bei der Approximation durch rationale Funktionen auf kompakten Mengen im Komplexen spielt das *Fusion Lemma* von Alice Roth eine Schlüsselrolle. Das ist im wesentlichen eine Entdeckung von Dieter Gaier. Er hat die Anwendung immer sehr propagiert und auch in seinem Buch [B3] und in dem Übersichtsartikel [60] hervorgehoben. In der Arbeit [56] beschäftigte er sich mit Fragen der Verbesserungen bzw. Verschärfung dieses Lemmas.

Alice Roth promovierte 1938 an der ETH Zürich bei Pólya mit einer Arbeit, in der der berühmte *swiss cheese* (siehe z. B. [Ga], S. 25 – 26) konstruiert wird, der später bei der Konstruktion von Gegenbeispielen in der komplexen Approximationstheorie immer wieder herangezogen wurde. Erst nach langen Jahren im Schuldienst in Bern nahm sie nach der Pensionierung ihre Forschungstätigkeit wieder auf und publizierte ab 1973 weitere wichtige Beiträge zur komplexen Approximationstheorie. Ein Artikel über Leben und Werk dieser großen Mathematikerin erscheint in Kürze [Dae].

4.3 Polynomapproximation

Eine ganze Reihe von Arbeiten ([78], [80], [82]) widmet sich der Approximation von analytischen Funktionen in reellen Intervallen oder von konformen Abbildungen durch Polynome, in denen Dieter Gaier oft Resultate anderer Autoren verbesserte.

Hierher gehören auch die Arbeiten [65], [70], [71], [74] über Approximation durch Bieberbachpolynome. Eine besonders interessante Fragestellung der Polynomapproximation in *Touching domains* wird in [81] behandelt, wo Dieter Gaier Ergebnisse von V. V. Andrievskii signifikant erweitert.

III Liste der Doktoranden und Habilitanden

1 Bei Dieter Gaier entstandene Dissertationen

1. Otto Hübner: Funktionentheoretische Iterationsverfahren zur Konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Gebiete. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **63**, Giessen 1964.
2. Sigbert Jaenisch: Abschätzungen subharmonischer und ganzer Funktionen in der Umgebung einer Kurve. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **65**, Giessen 1965.
3. Otto Dienst: Über Funktionen vom Exponentialtyp, die bis zur $(k-1)$-ten Ableitung auf einer Punktfolge von bestimmten Wachstum sind. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **64**, Giessen 1964.
4. Gerhard Fauth: Über die Approximation analytischer Funktionen durch Teilsummen ihrer Szegö-Entwicklung. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **67**, Giessen 1966.
5. Joseph Hammerschick: Über die diskrete Form der Integralgleichungen von Garrick zur konformen Abbildung von Ringgebieten. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **70**, Giessen 1966.
6. Gerhard Wilhelmi: Summierbarkeit von Potenzreihen auf dem Rand des Konvergenzkreises. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **73**, Giessen 1967.
7. Joachim Kühn: Über das Wachstum reeller Potenzreihen mit wenigen Vorzeichenwechseln und über das Wachstum ganzer Dirichlet-Reihen. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **75**, Giessen 1967.
8. Bernward Frohn: Gebiete mit extremalen reduzierten Moduln und Ringgebiete mit extremalen konformen Modulen. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **83**, Giessen 1969.
9. Michael von Renteln: Ideale in Ringen ganzer Funktionen endlicher Ordnung. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **95**, Giessen 1972.

10. Jutta Weisel: Lösung singulärer Variationsprobleme durch die Verfahren von Ritz und Galerkin mit finiten Elementen - Anwendungen in der konformen Abbildung. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **138**, Giessen 1979.
11. Rainer Brück: Identitätssätze für ganze Funktionen von Exponentialtyp. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **168**, Giessen 1984.
12. Stephan Huckemann: Ein Extremalproblem für das harmonische Maß einer Familie von Kontinua im Einheitskreis. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **184**, Giessen 1988.
13. Martin Wünch: Hurwitz-Faktorisierung von Polynomen und ganzen Funktionen. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **210**, Giessen 1992.

2 Bei Dieter Gaier entstandene Habilitationen

1. Sigbert Jaenisch: Stückweise - linear approximierbare quasikonforme Homöomorphismen n-dimensionaler Gebiete. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **99**, Giessen 1973.
2. Wolfgang Luh: Über die Summierbarkeit der geometrischen Reihe. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **113**, Giessen 1974.
3. Otto Hübner: Untersuchungen zur mehrparametrigen Überrelaxiation. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **128**, Giessen 1977.
4. Michael von Renteln: Zur Idealstruktur der Algebren F^+ und H^∞. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **134**, Giessen 1978.
5. Rainer Brück: Generalizations of Walsh's equiconvergence theorem by the application of summability methods. Mitt. Math. Sem. Giessen Heft **195**, Giessen 1990.

IV Literatur- und Schriftenverzeichnis

1 Literatur

[Dae] U. Daepp, P. Gauthier, P. Gorkin, G. Schmieder: Alice in Switzerland: The life and mathematics of Alice Roth. Math. Intelligencer, to appear.
[Du] P. Duren: Theory of H^p-spaces. New York: Academic Press 1970.
[DuS] P. Duren and M. Schiffer: A variational method for functions schlicht in an annulus. Arch. Rat. Mech. Anal.**9** (1962), 260 – 272.
[EHP] P. Erdös, F. Herzog and G. Piranian: On Taylor series of functions regular in Gaier regions. Arch. Math. **5** (1954), 39 – 52.
[Ga] T. W. Gamelin: Uniform Algebras. Englewood Cliffs, N. J.: Preatice Hall 1969.
[GeH] F. Gehring and G. af Hällström: A distortion theorem for functions univalent in an annulus. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I, Nr. **325** (1963), 1 – 15.
[Ha] G. Hardy: Divergent Series. Oxford: Clarendon Press 1949.
[In] A. E. Ingham: On the high-indices theorem for Borel summability. Abh. aus Zahlentheorie und Analysis zur Erinnerung an Edmund Landau (1877 – 1938), Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 121 – 135.

[Kn] K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin: Springer 1922.

[La] E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin: Springer Verlag 1916. 2. Aufl. 1929. Chelsea Reprint 1946.

[No] K. Noshiro: Cluster Sets. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft **28**. Reihe: Moderne Funktionentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer Verlag 1960.

[Nov] W. P. Novinger: Some theorems from geometric function theory. Amer. Math. Monthly **82** (1975), 507–510.

[Re] R. Remmert: Mitteilungen aus der Oberwolfach-Stiftung. DMV-Mitteilungen Heft **3** (2003), S. 49.

[Ro] Alice Roth: Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen. Comment. Math. Helv. **11** (1938), 77–125.

[Wa] J. L. Walsh: Interpolation und approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., New York 1935. 5. Aufl. 1969.

2 Verzeichnis der Publikationen von Dieter Gaier

2.1 Mathematische Artikel

[1] Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande von Summationsgebieten. Math. Z. **53** (1950) 291–308.

[2] Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Math. Z. **56** (1952) 326–334.

[3] Complex Tauberian theorems for power series. Trans. Am. Math. Soc. **75** (1953) 48–68 (Auszug aus der Ph. D. Thesis, Univ. of Rochester).

[4] Schlichte Potenzreihen, die auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren. Math. Z. **57** (1953) 349–350.

[5] (mit A. Peyerimhoff) Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen. Math. Z. **58** (1953) 232-242.

[6] Schlichte Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Math. Z. **58** (1953) 456–458.

[7] Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58** (1953) 453–455.

[8] (mit K. Zeller) Über den 0-Umkehrsatz für das C_k-Verfahren. Rend. Circ. Mat. Palermo **3** (1954) 83–88.

[9] Über Interpolation in regelmäßig verteilten Punkten mit Nebenbedingungen. Math. Z. **61** (1954) 119–133.

[10] (mit J. L. Walsh) Zur Methode der variablen Gebiete bei der Randverzerrung. Arch. Math. 6 (1954) 77–86.

[11] On the change of index for summable series. Pac. J. Math. **5** (1955) 529–539.

[12] On modified Borel methods. Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955) 873–879.

[13] Über die Äquivalenz der $|B_k|$-Verfahren. Math. Z. **64** (1956) 183–191.

[14] Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete. Math. Z. **64** (1956) 385–424 (Habilitationsschrift, TH Stuttgart).

[15] (mit H. Delange) Über asymptotische Wege analytischer Funktionen und ihrer Ableitungen. Arch. Math. **7** (1956) 135–142.
[16] Über die Konvergenz des Adamsschen Extrapolationsverfahrens. Z. Angew. Math. Mech. **36** (1956) 230.
[17] (mit W. Meyer-König) Singuläre Radien bei Potenzreihen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **59** (1956) 36–48 (Hauptvortrag, DMV-Tagung Mainz 1953).
[18] Über ein Iterationsverfahren von Komatu zur konformen Abbildung von Ringgebieten. Z. Angew. Math. Mech. **36** (1956) 252–253.
[19] Note on some gap theorems. Proc. Am. Math. Soc. **8** (1957) 24–28.
[20] Über ein Iterationsverfahren von Komatu zur konformen Abbildung von Ringgebieten. J. Math. Mech. **6** (1957) 865–883.
[21] Eine Bemerkung zum unstetigen Abel-Verfahren. Arch. Math. **8** (1957) 286–289.
[22] Über ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Lückenreihen. Math. Z. **68** (1958) 488–497.
[23] Über ein Extremalproblem der konformen Abbildung. Math. Z. **71** (1959) 83–88.
[24] Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. Z. Angew. Math. Mech. **39** (1959) 369.
[25] Untersuchungen zur Durchführung der konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. Arch. Ration. Mech. Anal. **3** (1959) 149–178.
[26] On conformal mapping of nearly circular regions. Pac. J. Math. **12** (1962) 149–162.
[27] (mit F. Huckemann) Extremal problems for functions schlicht in an annulus. Arch. Ration. Mech. Anal. **9** (1962) 415–421.
[28] Über die Symmetrisierbarkeit des Neumannschen Kerns. Z. Angew. Math. Mech. **42** (1962) 569–570.
[29] Über den Diskretisierungsfehler bei der Integralgleichung von Theordorsen. Z. Angew. Math. Mech. **42** Sonderheft (1962) T21–T22.
[30] Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete durch direkte Lösung von Extremalproblemen. Math. Z. **82** (1963) 413–419 (F. Lösch zum 60. Geb. gewidmet).
[31] Der allgemeine Lückenumkehrsatz für das Borel-Verfahren. Math. Z. **88** (1965) 410–417.
[32] Probleme und Methoden der konstruktiven konformen Abbildung. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **67** (1965) 118–132.
[33] On the coefficients and the growth of gap power series. SIAM J. Numer. Anal. **3** (1966) 248–265 (dedicated to Prof. J. L. Walsh, 70. Geb.).
[34] (mit C. Pommerenke) On the boundary behavior of conformal maps. Mich. Math. J. **14** (1967) 79–82.
[35] (mit J. Todd) On the rate of convergence of optimal ADI processes. Numer. Math. **9** (1967) 452–459.
[36] Limitierung gestreckter Folgen. Publ. Ramanujan Inst. **1** (1968/69) 223–234 (dem Gedenken an Ananda Rau gewidmet).
[37] Bemerkungen zum Turánschen Lemma. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **35** (1970) 1–7.

[38] Saturation bei Spline-Approximation und Quadratur. Numer. Math. **16** (1970) 129–140 (L. Collatz zum 60. Geb. gewidmet).
[39] Estimates of conformal mappings near the boundary. Math. J., Indiana Univ. **21** (1972) 581–595.
[40] Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden. Numer. Math. **19** (1972) 179–194.
[41] Entire functions with gap power series. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, (1968–1970) Sect. A 22–24, Proc. 5th Conf. analytic Functions, Lublin 1970, (1972) 69–72.
[42] A note on Hall's lemma. Proc. Am. Math. Soc. **37** (1973) 97–99.
[43] Quasiconformal mappings near the boundary. Indiana Univ. Math. J. **22** (1973) 813–815.
[44] Ableitungsfreie Abschätzungen bei trigonometrischer Interpolation und Konjugierten-Bestimmung. Computing **12** (1974) 145–148.
[45] Determination of conformal modules of ring domains and quadrilaterals. Functional Analysis Appl., internat. Conf., Madras 1973, Lect. Notes Math. **399** (1974) 180–188.
[46] Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung. Math. Z. **147** (1976) 113–129 (R. Nevanlinna zum 80. Geburtstag gewidmet).
[47] (mit O. Hübner) Schnelle Auswertung von Ax bei Matrizen A zyklischer Bauart, Toeplitz- und Hankel-Matrizen. Mitt. Math. Semin. Giessen **121** (1976) 27–38.
[48] Approximation durch Fejér-Mittel in der Klasse A. Mitt. Math. Semin. Giessen **123** (1977) 1–6 (dem Andenken an Karl Maruhn gewidmet).
[49] Über ein Flächeninhaltsproblem und konforme Selbstabbildungen. Rev. Roum. Math. Pures Appl. **22** (1977) 1101–1105.
[50] Hölder-Stetigkeit und BMO des logarithmischen Potentials. Arch. Math. **30** (1978) 49–54.
[51] Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **81** (1978) 25–44.
[52] Capacitance and the conformal module of quadrilaterals. J. Math. Anal. Appl. **70** (1979) 236–239.
[53] Research problems. Period. Math. Hung **12** (1981) 1.
[54] Gap theorems for logarithmic summability. Analysis **1** (1981) 9–24.
[55] Das logarithmische Potential und die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. E. B. Christoffel, the influence of his work on mathematics and the physical sciences, int. Symp., Aachen 1979, (1981) 290–303.
[56] Remarks on Alice Roth's fusion lemma. J. Approximation Theory **37** (1983) 246–250.
[57] (mit B. Kjellberg) Entire functions and their derivative on an asymptotic arc. Studies in pure mathematics, Mem. of P. Turán, (1983) 231–236.
[58] Numerical methods in conformal mapping. Computational aspects of complex analysis, Proc. NATO Adv. Study Inst., Braunlage/Ger. 1982, NATO ASI Ser., Ser. **C 102** (1983) 51–78.
[59] Über Räume konformer Selbstabbildungen ebener Gebiete. Math. Z. **187** (1984) 227–257 (H. Grunsky zum 80. Geb. gewidmet).

[60] Approximation im Komplexen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **86** (1984) 151 – 159 (Hauptvortrag, DMV-Tagung Köln 1983).
[61] On an area problem in conformal mapping. Result. Math. **10** (1986) 66 – 81 (in memory of Hans Wittich).
[62] Über Schlichtheitsgebiete ganzer Funktionen. Complex Variables, Theory Appl. **8** (1987) 303 – 306.
[63] (mit N. Papamichael) On the comparison of two numerical methods for conformal mapping. IMA J. Numer. Anal. **7** (1987) 261 – 282.
[64] On a polynomial lemma of Andrievskii. Arch. Math. **49** (1987) 119 – 123 (G. Pickert zum 70. Geburtstag gewidmet).
[65] On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners. Constructive Approximation **4**, No. 3 (1988) 289 – 305.
[66] Remarks of the lemma of Nersesyan in complex approximation. Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova **170** (1989) 90 – 94; Übersetzung in J. Sov. Math. **63**, No. 2 (1993) 164 – 166.
[67] (mit W. Hayman) Moduli of long quadrilaterals and thick ring domains. Rend. Mat. Appl., VII. Ser. **10**, No. 4 (1990) 809 – 834 (dedicated to the memory of Maria Adelaide Sneider).
[68] Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1950. Ein Jahrhundert Mathematik 1890 – 1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. Dok. Gesch. Math. **6** (1990) 361 – 420.
[69] (mit W. Hayman) On the computation of modules of long quadrilaterals. Constructive Approximation **7**, No. 4 (1991) 453 – 467.
[70] On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners. International symposium on number theory and analysis in memory of Hua Loo Keng, held at the Tsing Hua University, Beijing, China, August 1 – 7, 1988. Volume II: Analysis. Berlin: Springer-Verlag (1991) 107 – 110.
[71] On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with piecewise analytic boundary. Arch. Math. **58**, No. 5 (1992) 462 – 470.
[72] Abraham Ezechiel Plessner (1900 – 1961): His work and his life. Math. Intell. **14**, No. 3 (1992) 31 – 36.
[73] Conformal mapping of analytic corners in a generalized sense. Analysis **12**, No. 1/2 (1992) 187 – 193.
[74] (mit V. V. Andrievskii) Uniform convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise quasianalytic boundary. Mitt. Math. Semin. Giessen **211** (1992) 49 – 60.
[75] On the behavior of capacity under conformal mapping. Complex Variables, Theory Appl. **21**, No. 3 – 4 (1993) 197 – 205 (dedicated to the memory of Glenn Schober).
[76] Constructive aspects in complex analysis. Proceedings of the conference on advances in computational mathematics, held at New Delhi, India, January 5 – 9, 1993. Singapore: World Scientific. Ser. Approx. Decompos. **4** (1994) 243 – 250.
[77] Conformal modules and their computation. Computational methods and function theory 1994. Proceedings of the conference, Penang, Malaysia, March 21 – 25. 1994. Singapore: World Scientific. Ser. Approx. Decompos. **5** (1995) 159 – 171.

[78] Polynomial approximation of piecewise analytic functions. J. Anal. **4** (1996) 67–79.
[79] On the convergence of the Bieberbach polynomials inside the domain: Research problems 97–1. Constructive Approximation **13**, No. 1 (1997) 153–154.
[80] Polynomial approximation of functions continuous on $[-1,1]$ and analytic on (–1,1). Ann. Numer. Math. **4**, No. 1–4 (1997) 315–328 (dedicated to T. J. Rivlin, 70. Geb.).
[81] Complex approximation on touching domains. Complex Variables, Theory Appl. **34**, No. 4 (1997) 325–342.
[82] Polynomial approximation of conformal maps. Constructive Approximation **14**, No. 1 (1998) 27–40.
[83] Calculus on arcs in the complex plane. Analysis **18**, No. 3 (1998) 291–302 (dedicated to Professor Pickert, 80. Geb.).
[84] On the relation between $E_n(f)$ and $E_n(f')$. Proceedings of the 3rd CMFT conference on computational methods and function theory 1997, Nicosia, Cyprus, October 13–17, 1997. Singapore: World Scientific. Ser. Approx. Decompos. **11** (1999) 225–231.
[85] The Faber operator and its boundedness. J. Approximation Theory **101**, No. 2 (1999) 265–277 (dedicated to Richard S. Varga, 70. Geb.).
[86] Joseph L. Walsh: Selected papers. With brief biographical sketches by W. E. Sewell, D. V. Widder and Morris Marden and commentaries by Q. I. Rahman, P. M. Gauthier, Dieter Gaier, Walter Schempp and the editors. Edited by Theodore J. Rivlin and Edward B. Saff. New York, NY: Springer. xxv, 682 p.
[87] On the decrease of Faber polynomials in domains with piecewise analytic boundary. Analysis **21**, No. 2 (2001) 219–229 (dedicated to Professor Wolfgang Luh, 60. Geb.).
[88] (mit R. Kühnau) On the modulus of continuity for starlike mappings. Ann. Lublin Sec. A. **56** No. 2 (2002) 19–30 (dedicated to Jan Krzyz).

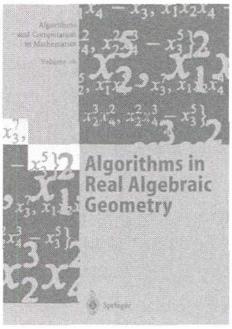
2.2 Monographien und Bücher

[B1] Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. (Ergebnisse der angewandten Mathematik. Bd. 3) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer (1964).
[B2] Complex variable proofs of Tauberian theorems. Matscience Report, 56. Madras, India: The Institute of Mathematical Sciences. (1967) 78 p.
[B3] Vorlesungen über Approximation im Komplexen. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser (1980).
[B4] Vorlesungen über Approximation im Komplexen. Übers. aus dem Deutschen ins Chinesische von Xie-Chang Shen. Hunan Educational Publ. House (1985).
[B5] Landau, Edmund; Gaier, Dieter Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 3., erw. Aufl. Berlin etc.: Springer-Verlag 1986.
[B6] Lectures on complex approximation. (Lektsii po teorii approksimatsii v kompleksnoj oblasti). Übers. aus dem Deutschen ins Russische von L. M. Kartashov. Moskva: Izdatel'stvo *Mir* (1986).

[B7] Lectures on complex approximation. Transl. from the German by Renate McLaughlin. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1987.

2.3 Allgemeine Artikel

[C1] Schule und Universität im Wandel der Zeit. Pädagogische Führung, Ausgabe Hessen, Heft **4** (1994) 55 – 58. Luchterhand Verlag.



S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy

Algorithms in Real Algebraic Geometry

Berlin u. a., Springer, 2003, 602 S., € 59,95

Gegenstand des Buches sind zentrale algorithmische Probleme der reellen algebraischen Geometrie. Hierzu zählen beispielsweise die Frage nach der Existenz reeller Lösungen einer (durch polynomiale Gleichungen und Ungleichungen) bestimmten semialgebraischen Menge oder die Frage, ob zwei Punkte zur gleichen Zusammenhangskomponente einer gegebenen semialgebraischen Menge gehören.

Die Entscheidbarkeit der ersten Frage ist bereits seit Tarski's Ergebnissen zur reellen Quantorenelimination aus den 40er Jahren bekannt und steht im Gegensatz zur Nichtentscheidbarkeit der Existenz ganzzahliger Lösungen (Hilbert's 10. Problem). Der Rechenaufwand bekannter Verfahren für die Quantorenelimination ist jedoch bereits für kleine Dimensionen beträchtlich. Insbesondere auch, weil zahlreiche Anwendungsprobleme (beispielsweise bei Bewegungsplanungen in der Robotik oder im Computer-Aided Geometric Design) auf algorithmische Probleme der reellen algebraischen Geometrie führen, erfährt dieses Teilgebiet derzeit sowohl innerhalb der Mathematik als auch in benachbarten Disziplinen viel Aufmerksamkeit. Eine der Herausforderungen kommt daher, dass hierbei eine Reihe von Teilgebieten der Mathematik und Informatik wie Topologie, algebraische Geometrie, Computeralgebra, Komplexitätstheorie sowie der Entwurf effizienter Algorithmen eng miteinander verzahnt sind und deshalb die Literatur sehr verstreut war.

In genau diese Lücke möchte das vorliegende Buch stoßen – und dieses Unterfangen ist den Autoren in beeindruckender Weise gelungen!

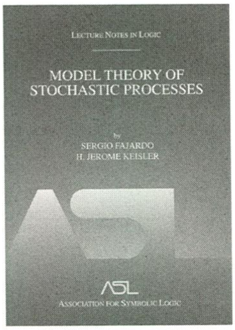
In den ersten Kapiteln wird überwiegend klassisches Material der reellen algebraischen Geometrie zusammengestellt, etwa die Theorie reell abgeschlossener Körper und semialgebraischer Mengen sowie klassische Techniken zur Bestimmung der Anzahl reeller Lösungen eines univariaten Polynoms.

Im mittleren Drittel des Buches werden die beiden Zugpferde für die algorithmischen Techniken diskutiert: die zylindrisch-algebraische Dekomposition und die Methode der kritischen Punkte. Hierzu werden zunächst ein auf die Besonderheiten semialgebraischer Mengen angepasster Steilkurs zur Topologie sowie zur Morsetheorie angeboten und quantitative Ergebnisse (etwa die Oleinik-Petrovsky/Thom/Milnor-Schranke für die Summe der Bettizahlen einer durch Polynome gleichen Grades gegebenen algebraischen Menge) hergeleitet. Nach einem weiteren Streifzug durch Grundtechniken der algorithmischen Algebra (z. B. Subresultanten, Gröbnerbasen) werden die zylindrisch-algebraische Dekomposition und die Methode der kritischen Punkte in sehr detailliertem Pseudocode angegeben und unter komplexitätstheoretischen Gesichtspunkten ausführlich analysiert.

Im letzten Drittel des Buches werden die neuesten Entwicklungen zur Verbesserung der algorithmischen Grundtechniken sowie ihrer Anwendung auf komplexere Probleme (z. B. der Berechnung von „Roadmaps" zur oben erwähnten Bestimmung der Zusammenhangskomponenten einer semialgebraischen Menge) vorgestellt. Hier haben die drei Autoren in jüngster Zeit auch wesentliche, neue Forschungsbeiträge geleistet.

Das Buch bietet eine sehr zeitgemäße, gelungene Darstellung klassischen sowie aktuellen Materials zu algorithmischen Fragen der reellen algebraischen Geometrie, die in dieser Breite bisher nicht verfügbar war. Besonders auffällig ist die erfolgreiche Absicht der Autoren, eine kohärente und vor allem in sich geschlossene Darstellung zu liefern, die die verschiedenen beteiligten mathematischen Teilgebiete umfassend berücksichtigt. Aufgrund dieser Darstellungsweise bietet das Buch zahlreiche Einstiegs- und Verwendungsmöglichkeiten, sowohl in Lehre und Forschung als auch als Nachschlagewerk. Es wird sich schnell als Standardwerk zu dem behandelten Themenkreis etablieren.

München T. Theobald



S. Fajardo, H. J. Keisler
Model Theory of Stochastic Processes
Lect. Notes in Logic 14

Natick, A. K. Peters Ltd, 2002, 152 S., $ 32,–

Das Buch „Model Theory of Stochastic Processes" untersucht stochastische Prozesse aus modelltheoretischer Sicht. Insbesondere kommen dabei Methoden aus der Nonstandardanalysis (saturierte Modelle) zum Einsatz. Als Zielgruppe von Lesern sehe ich daher vorwiegend modelltheoretisch gebildete Mathematiker mit Interesse an Stochastik, aber auch Wahrscheinlichkeitstheoretiker mit einem starken Interesse an logisch-modelltheoretischen Fragen. Das Buch setzt voraus, dass der Leser mit Nonstandardanalysis (saturierte Modelle, Loeb-Maße) vertraut ist.

Es werden stochastische Prozesse $x = (x_t)_t$, die adaptiert bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ sind, modulo verschiedener Äquvalenzrelationen untersucht. Die einfachste dieser Äquivalenzrelationen ist die Gleichheit der endlichdimensionalen Randverteilungen. Weitere Äquivalenzrelationen erhält man, indem Gleichheit der Erwartungswerte $E[f(x)] = E[f(y)]$ für beschränkte Testfunktionen f in verschiedenen Klassen gefordert wird. Ein Beispiel ist die Klasse der stetigen, beschränkten Funktionen von nur endlich vielen Variablen; sie führt wieder auf die Gleichheit endlichdimensionaler Randverteilungen. Ein anderes Beispiel erhält man aus dieser Klasse, indem man sie bezüglich der Bildung bedingter Erwartungen und Komposition abschließt.

Hier sind typische Fragestellungen:

Gegeben sei ein adaptierter Raum Ω. Betrachten wir einen stochastischen Prozess x auf irgendeinem weiteren adaptierten Raum. Gibt es dann einen adaptierten Prozess x' auf Ω, der zu x äquivalent ist (Universalität)?

Gegeben ein Paar (x, y) adaptierter Prozesse und einen Prozess x' äquivalent zu x (alle Prozesse auf Ω), gibt es einen stochastischen Prozess y', so dass (x, y) äquivalent zu (x', y') ist?

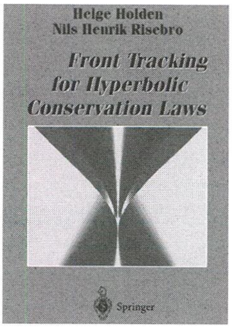
Eine Variante dieser Fragen wird durch folgendes Spiel motiviert: Zwei Spieler A und B suchen sich abwechselnd in abzählbar unendlich vielen Runden Zufallsvariablen oder auch stochastische Prozesse aus. Dabei wählt A stets einen Prozess über einem Raum Ω, und B stets einen Prozess über einem Raum Γ. Am Anfang sind zwei äquivalente Prozesse x und y über Ω bzw. Γ gegeben. In der Runde n, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ durchläuft, wählt zuerst A einen Prozess x_n und dann B einen Prozess y_n. B gewinnt das Spiel, wenn $(x, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ äquivalent zu $(y, y_1, y_2, y_3, \ldots)$ ist; andernfalls gewinnt A. Hat B eine Gewinnstrategie? Die Prozesse x und y heißen *spieläquivalent*, wenn es eine solche Gewinnstrategie für B gibt.

Auf „gewöhnlichen" adaptierten Räumen (Vervollständigungen von Borel-W-maßen auf einem polnischen Raum mit einer Filtration) ist die Antwort auf obige Fragen typischerweise negativ. Das Bild ändert sich jedoch, wenn man statt dessen Loeb-Räume über internen *-endlich additiven Wahrscheinlichkeitsräumen betrachtet; zum Beispiel Loeb-Räume über hyperendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen.

Weite Teile des Buches analysieren die obigen und viele weitere verwandte Äquivalenzrelationen und Abhängigkeiten zwischen diesen, illustriert mit zahlreichen Beispielen und Gegenbeispielen. Allerdings haben viele Teile eher den Charakter eines Literaturüberblicks, da oft keine vollständigen Beweise, sondern nur Beweisskizzen und Verweise auf die Originalarbeiten zu finden sind.

Leser, die sich für modelltheoretische Theoreme über stochastische Prozesse interessieren, erhalten mit diesem Buch einen guten Überblick über das Gebiet. Das Buch ersetzt allerdings nicht die Lektüre der im Buch zitierten Originalarbeiten, weil im Buch die modelltheoretischen Grundlagen, die zum Verständnis nötig sind, nicht systematisch eingeführt werden, und auch die Beweise teilweise nur in groben Zügen skizziert werden.

Leiden (Niederlande) F. Merkl



H. Holden, N. H. Risebro
Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws

Berlin u. a., Springer, 2002, 363 S., € 64,95

Das neue Buch von Holden und Risebro behandelt hyperbolische Systeme von Erhaltungssätzen. Prototyp dieser meist nichtlinearen Systeme partieller Differentialgleichungen sind die Eulergleichungen der Gasdynamik, d. h. die Erhaltungsprinzipien für Masse, Impuls und Energie. Die Lösungen sind in der Regel unstetig, sie enthalten Stoßwellen und Kontaktunstetigkeiten. Das macht die Analyse und Numerik besonders anspruchsvoll.

Hier ein kurzer Überblick über vergleichbare neuere Bücher: für die Analysis der Klassiker von J.Smoller (2. Aufl. Springer 1994), Dafermos (Springer 1998), D.Serre (Cambridge Univ. Press 1999 u. 2000), Malek/Necas/Rokyta (Springer 2000), Bressan (Oxford Univ. Press 2000), LeFloch (Birkhäuser 2002). Für die Numerik LeVeque (Birkhäuser 1992), Godlewski/Raviart (Springer 1996), Kröner (Wiley-Teubner 1997), Toro (Springer 1998) und nochmals LeVeque (Cambridge Univ. Press 2000). Es gibt also im Gegensatz zum Beginn der neunziger Jahre eine erfreuliche Auswahl an von führenden Experten geschriebenen Lehrbüchern.

Meiner Meinung nach ist das Buch der beiden norwegischen Kollegen eine sehr willkommene Ergänzung. Es ist von seiner Ausrichtung analytisch, die wesentlichen Existenz- und Eindeutigkeitssätze werden rigoros bewiesen. Der rote Faden des Buches ist jedoch eine konstruktive Methode, das sogenannte Front-Tracking. Die mit diesem Verfahren konstruierten approximativen Lösungen bieten einerseits die Grundlage für Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise schwacher Lösungen, andererseits führen sie zu hocheffizienten numerischen Verfahren.

Das Front-Tracking wurde in den 70er Jahren von Dafermos als analytisches Werkzeug vorgeschlagen, und später vom 1988 verstorbenen norwegischen Mathematiker Raphael Høegh-Krohn, dem das Buch auch gewidmet ist, sowie seinen damaligen Mitarbeitern Holden und Risebro wiederentdeckt und weiterentwickelt. Es ähnelt einer von Bressan Anfang der neunziger Jahre vorgestellten Methode, mit der erstmals die Eindeutigkeit schwacher Lösungen für eindimensionale Systeme bewiesen werden konnte.

Lassen Sie mich kurz auf die einzelnen Kapitel eingehen: Nach einer gehaltvollen Einleitung werden im zweiten Kapitel skalare Erhaltungssätze behandelt. Zunächst wird eine Entropiebedingung vorgestellt, welche die korrekte schwache Lösung auszuwählen vermag. Dann wird das Riemannproblem (Cauchyproblem mit zwei stückweise konstanten Daten) gelöst. Das bildet die Grundlage für den Front-Tracking Algorithmus. Hierbei wird die Flussfunktion durch eine stetige, stückweise lineare Funktion approximiert. So erhält man für stückweise konstante Anfangsdaten ein Hilfsproblem, das sich analytisch exakt lösen lässt. Für diesen Algorithmus wird dann die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten bewiesen. Schließlich wird gezeigt, wie allgemeine Anfangsdaten und Flussfunktionen approximiert werden können. Das führt zu einem recht allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Aus dem Beweis lassen sich die wesentlichen Eigenschaften der Lösung ablesen.

Das dritte Kapitel ist eine kompakte, aber ausgesprochen gehaltvolle Einführung in die klassischen Finiten Differenzen- bzw Finiten Volumenverfahren. Die wesentlichen Konvergenzsätze einschließlich der a-priori Fehlerabschätzungen werden vollständig bewiesen, und sogar die Theorie maßwertiger Lösungen wird vorgestellt. Trotz der Kürze dieses Kapitels werden die Ideen klar und anschaulich beschrieben.

In Kapitel 4 wird die Behandlung mehrdimensionaler skalarer Probleme vorgestellt. Systematisch wird auf dem Dimensionssplitting Ansatz aufgebaut. Zunächst werden die in Kapitel 2 vorgestellten exakten eindimensionalen Lösungsoperatoren alterniert, um die mehrdimensionale Lösung zu approximieren. Als nächstes wird das für die eindimensionalen Front-Tracking Operatoren durchgeführt, dann für Gleichungen mit Diffusion und schließlich für Quellterme. Für all diese Fälle werden Konvergenzresultate, zum Teil mit Fehlerabschätzungen, bewiesen.

In den Kapiteln 5 bis 7 behandeln Holden und Risebro das Cauchy Problem für eindimensionale Systeme von Erhaltungssätzen. Das fünfte Kapitel ist eine gut lesbare Darstellung der Lösung des Riemann Problems, gipfelnd im berühmten Existenzsatz von Lax. Im sechsten Kapitel wird das eindimensionale Front-Tracking Verfahren aus dem zweiten Kapitel auf Systeme verallgemeinert. Wie beim klassischen Glimmschen Existenzbeweis ist es für die Konvergenz auch hier entscheidend, die Interaktionen zwischen kollidierenden Wellen abzuschätzen. Diese Abschätzungen wurden in den letzten Jahren (unter anderem von den Autoren) erheblich vereinfacht, und davon profitiert die sehr transparente Darstellung des Buches. Im siebten Kapitel folgt dann der entscheidende Schritt zum Beweis der Wohlgestelltheit des Cauchy Problems: es wird gezeigt, dass der mit dem Front-Tracking konstruierte Lösungsoperator stetig in der L^1 Topologie ist. Dieses Kapitel halte ich aus Sicht der Analysis für den Höhepunkt des Buches. Um den L^1 Abstand zweier Lösungen zu kontrollieren, wird ein Funktional ähnlich dem Glimmschen Interaktionsfunktional eingeführt. Eine Fülle von Interaktionsabschätzungen führt nun zur Stabilität des Front-Tracking Algorithmus und schließlich der Stabilität der schwachen Lösung selbst. Daraus folgt dann (nach erheblicher weiterer Arbeit) die Eindeutigkeit. Die Beweise dieses Kapitels folgen im Wesentlichen den bahnbrechenden Arbeiten von A.Bressan und Mitarbeitern, T.-P. Liu, T.Yang und P.LeFloch.

Das Buch wird durch zwei Anhänge abgerundet: In Appendix A werden Funktionen beschränkter Variation sowie grundlegende Kompaktheitsargumente vorgestellt. In Appendix B wird ein vollständiger Existenzbeweis für mehrdimensionale skalare Erhaltungssätze mittels der klassischen Methode der verschwindenden Viskosität gegeben.

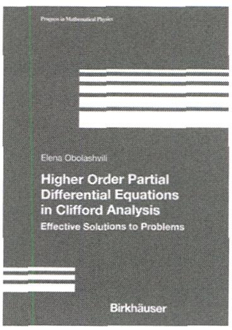
Jedem Abschnitt sind kurze literarische Zitate und Bonmots in einer Vielzahl von Sprachen vorangestellt, deren Eigenwilligkeit die Aufmerksamkeit des Lesers geradezu provoziert. Zunächst habe ich mich daran gewöhnen müssen; im Laufe des Buches habe ich aber große Freude daran gefunden und war immer schon neugierig auf die nächste Überraschung.

Jedes Kapitel wird von sorgfältig ausgewählten historischen Notizen und Literaturhinweisen ergänzt. Danach folgt eine reichhaltige Auswahl von Übungsaufgaben, zu denen in Appendix C sogar Lösungshinweise gegeben werden. Das Literaturverzeichnis hat mit 148 Arbeiten einen vernünftigen Umfang.

Das neue Buch von Holden und Risebro besticht durch seine klare Linie – die Konzentration auf die Front-Tracking Methode. Es ist analytisch anspruchsvoll, rigoros, und gut lesbar. Es werden genügend Querverweise gegeben, damit der Nicht-Experte sich einen breiteren Überblick über die Analysis von Erhaltungssätzen verschaffen kann. Bei den numerischen Methoden wird nicht versucht, einen breiten Überblick zu geben. Es fehlen vor allem die approximativen Riemann-Löser für Systeme und die mehrdimensionalen Finiten Volumenverfahren. Hierzu sei ergänzend die Lektüre der oben erwähnten Bücher von Godlewski-Raviart, Kröner, LeVeque oder Toro empfohlen.

Ich habe das Buch mit großer Freude gelesen und empfehle es sowohl Experten als auch Studenten zur Lektüre und zum Durcharbeiten. Es kann auch als zuverlässige und sehr anregende Grundlage für eine einsemestrige Hauptstudiumsvorlesung dienen.

Aachen S. Noelle



E. Obolaschwili
Higher Order Partial Differential Equations in Clifford Analysis
Progr. Math. 208

Basel, Birkhäuser, 2002, 208 S., € 83,18

Das erklärte Ziel dieses Buches besteht darin, den Leser mit komplexen und hyperkomplexen Methoden zur Behandlung von Anfangswert- und Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen vertraut zu machen. Bei der Benutzung von Methoden der Clifford-Analysis gelingt es, die Konstruktion der Lösungen oftmals entscheidend zu vereinfachen. Dabei werden auch bislang wenig verwendete Clifford-Algebren der Form $C\ell_{p,q}$ eingesetzt.

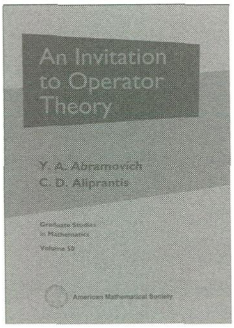
Das Buch besteht aus vier Kapiteln. Im ersten Kapitel werden zweidimensionale Randwertaufgaben für holomorphe Funktionen behandelt. Darunter befinden sich jeweils über speziellen Grundgebieten das Riemann-Problem, das Riemann-Hilbert-Problem, Dirichlet- bzw. Neumann-Problem, aber auch die gemischte Randwertaufgabe vom Keldish-Sedow-Typ. Auch die Gleichungen der ebenen Elastizitätstheorie von Kolosow-Muschelischwili können in Spezialfällen einer Lösung zugeführt werden. Für verallgemeinerte holomorphe Funktionen, die mit der Yukawa-Gleichung (im Buch irrtümlich Helmholtz-Gleichung genannt) verbunden sind, werden Integraldarstellungen der Lösung angegeben. Es ist interessant zu vermerken, dass auch gemischte Randwertaufgaben der Vekua-Theorie abgehandelt sind. Die Beltrami-Gleichung und deren Analoga von höherer Ordnung sowie Randwertaufgaben für spezielle komplexe Differentialgleichungen höherer Ordung werden untersucht. Darunter befinden sich Randwertaufgaben pluriholomorpher Funktionen und ein nichtlokales Problem für biholomorphe Funktionen.

Im Kapitel 2 wird zunächst die Definition einer universellen Clifford-Algebra gegeben. Verschiedene Kernfunktionen (Gauß-Weierstraß, Sommerfeld, Abel-Poisson) werden eingeführt und deren Fouriertransformation berechnet. Diese sind notwendig, um zu expliziten Lösungen für entsprechende Randwertaufgaben zu gelangen. Die im Kapitel 1 zweidimensional betrachteten Fälle werden nun höherdimensional durchgespielt.

Kapitel 3 ist hyperbolischen, poly- und plurihyperbolischen Gleichungen gewidmet. Unter denen befindet sich die Poly-Klein-Gorden-Gleichung sowie verschiedene harmonische Versionen dieser Gleichungen. Das letzte Kapitel ist vor allem parabolischen und pluriparabolischen Problemen gewidmet. Mit Hilfe der Fourier-Transformation gelingt es unter bestimmten Anfangs-und Randsituationen in speziellen Clifford-Algebren Lösungen explizit zu erhalten. Abschließend werden Dirichlet-Cauchy und Cauchy-Neumann-Probleme für elliptisch-parabolische, und hyperbolisch-parabolische Probleme gelöst.

Das Buch stellt eine interessante Sammlung verschiedener Anfangs- und Randwertprobleme für spezielle Klassen von partiellen Differentialgleichungen dar, die günstigerweise durch Quadraturformeln gelöst werden können. Einschränkend muss festgestellt werden, dass die zugehörigen physikalischen Modelle nicht oder nur wenig behandelt sind. Auch wird auf Lösungstheorie weitestgehend verzichtet. Dennoch kann das Buch als nützliche Bereicherung für die Ausbildung von Physikern und mathematisch orientierten Ingenieuren angesehen werden.

Freiberg W. Sprößig



Y. A. Abramovich,
C. D. Aliprantis
An Invitation to Operator Theory
Grad. Studies in Math. 50

Providence, Am. Math. Soc., 2002, 530 S., $ 69,–

Unter den in den letzten Jahren zur Operatortheorie erschienenen Büchern nimmt der zu besprechende Text einen markanten Platz ein. Er ist weniger als Forschungsmonographie, sondern als wohldurchdachtes und ausgefeiltes Lehrbuch konzipiert, das wesentliche Belange der Operatortheorie in Banachverbänden beschreibt. Im Vordergrund stehen dabei die durch die Ordnungsrelation und Topologie erzeugten Eigenschaften; Operatortheorie in Hilberträumen wird weitgehend ausgeblendet. Die ersten sieben Kapitel tragen einführenden Charakter, in denen grundlegende Konzeptionen der allgemeinen Operatortheorie und im speziellen die der Operatortheorie in Banachverbänden ausführlich dargelegt werden.

Kapitel drei ist dem Studium sogenannter AL- und AM-Räume gewidmet, wobei AL-Raum bzw. AM-Raum für „Abstract Lebesgue" space und entsprechend für „Abstract *Maximum*" *space steht*. Als wichtige Modellfälle dienen die klassischen $L_1(\mu)$- und $C(\Omega)$-Räume.

Die Kapitel vier und fünf behandeln wichtige Klassen linearer Operatoren: endlichdimensionale Operatoren, Multiplikationsoperatoren, algebraische und Verbandshomomorphismen, Fredholmoperatoren, strikt singuläre Operatoren im Sinne von T. Kato und Integraloperatoren. Daneben werden im fünften Kapitel positive Projektoren studiert. Positivität bedeutet hier und im Weiteren ausschließlich die durch die partielle Ordnung erzeugte (ein Operator heißt positiv, wenn er positive Elemente wieder in solche überführt). Das sechste Kapitel beinhaltet die Grundlagen der allgemeinen Spektraltheorie linearer Operatoren. Dieses Kapitel findet seine Fortsetzung im siebenten Kapitel. Hier werden die Spektren spezieller Operatoren beschrieben, wie die von kompakten, strikt singulären Operatoren oder die von Verbandshomomorphismen. Gleichfalls wird in diesem Kapitel auf den Begriff des wesentlichen Spektrums eingegangen. Das achte Kapitel enthält die Theorie positiver Matrizen, d. h. solcher mit positiven Einträgen, und stellt die Verbindung der Operatortheorie in Banachverbänden zur linearen Algebra her. Es wurden unter anderem die Begriffe irreduzible und primitive Matrix eingeführt und das Perron-Frobenius-Theorem bewiesen. Das neunte Kapitel dient der Übertragung der Resultate für irreduzible Matrizen auf den unendlichdimensionalen Fall und diskutiert eine Reihe tiefliegender Fakten. Als Demonstrationsobjekte werden hier unter anderem Integraloperatoren herangezogen.

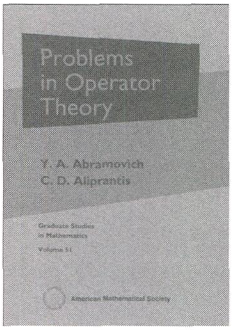
Im zehnten Kapitel findet das bis heute populäre Problem der Existenz invarianter Teilräume für lineare Operatoren seinen Niederschlag. Es enthält eine detaillierte Diskussion dieses Problems sowohl für Banachräume wie auch für Banachverbände. Das letzte und abschließende Kapitel behandelt die Daugavetgleichung. I. K. Daugavet entdeckte 1963 folgende Eigenschaft: Jeder kompakte Operator T, der im Banachraum $C[0, 1]$ aller auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen wirkt, erfüllt die Gleichung

$$||I + T|| = 1 + ||T||.$$

Bislang wurden viele weitere Klassen von linearen Operatoren in weiteren Banachräumen gefunden, die diese Eigenschaften besitzen. Es zeigte sich, dass bei Erfüllung der Daugavetgleichung bemerkenswerte Konsequenzen eintreten. Beispielsweise erfüllt ein beschränkter Operator T in einem gleichmäßig konvexen oder gleichmäßig glatten Banachraum die Daugavetgleichung genau dann, wenn $||T||$ im Spektrum von T liegt. Das gesamte elfte Kapitel ist dem ausführlichen Studium obiger Gleichung vorbehalten, die schließlich auch in Banachverbänden diskutiert wird.

Mehr als 600 Übungsaufgaben ergänzen den Inhalt eindrucksvoll. Ihre Lösung dient nicht nur dem besseren Verständnis der dargelegten Theorie, sondern in Teilen auch der Erweiterung des Inhaltes des Buches. Dieser Aspekt ist den Autoren so wichtig, dass sie in einem weiteren Buch „Problems in Operator Theory", AMS, 2002, die vollständigen Lösungen aller Aufgaben nachreichen. Obwohl sich das Buch vorrangig an Studenten richtet, findet jeder an Operatortheorie und Funktionalanalysis interessierte Leser Perlen in diesem Werk. Es eignet sich vorzüglich als Lehrbuch für Operatortheorie und bietet Orientierungshilfe für all jene, die sich in die Operatortheorie in Banachverbänden einarbeiten möchten. Dieses abgeklärte und außerordentlich leserfreundlich geschriebene Buch hinterlässt einen ausgezeichneten Eindruck. Diese Einladung zur Operatortheorie hält was sie verspricht – sie liefert in reichem Maße Anregungen, Genuss und tiefliegende Mathematik.

Chemnitz B. Silbermann

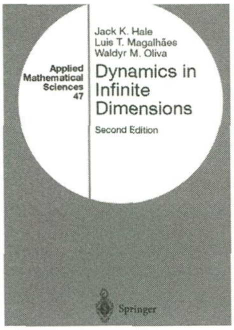


Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis
Problems in Operator Theory
Grad. Studies in Math. 51

Providence, Am. Math. Soc., 2002, 386 S., $ 49,00

Dieses Buch enthält die vollständigen Lösungen aller Übungsaufgaben aus Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis „An Invitation to Operator Theory" und ergänzt letzteres Buch wesentlich, da dort in einem Teil der Übungsaufgaben weitergehende Fragen angeschnitten werden und die Beweise einiger Behauptungen aus dem Text in den Übungsteil verlegt wurden. Beide Bücher bilden eine Einheit, die dem Leser eine Fülle von Ergebnissen aus der Operatortheorie nahe bringt. Als wohl durchdachte und hervorragend aufeinander abgestimmte Lehrbücher sind sie für einen Einstieg in die Operatortheorie bestens geeignet.

Chemnitz B. Silbermann



J. K. Hale,
L. T. Magalhaes,
W. Oliva
Dynamics in Infinite Dimensions

Berlin u. a., Springer, 2002, 280 S., € 64,95

In the preface the authors restrict the general title of their book by saying that as in the first edition their intent is to present some aspects of a geometric theory of infinite dimensional spaces with major emphasis on retarded functional differential equations (FDEs). What is meant are of course some aspects of a theory of dynamical systems (semiflows) on such spaces.

The book is a kind of survey which addresses general, fundamental questions about global solution behaviour, in particular, about attractors, normally hyperbolic invariant sets, and generic properties of semiflows generated by retarded FDEs. A theme which appears naturally and frequently is that solution curves of FDEs which start from different initial data can merge in finite time. It is not obvious how to overcome the difficulties caused by this fact when building a reasonably general theory which is guided by the results for flows on finite-dimensional manifolds. The authors'attempt to present the state of the art provides interesting and also impressive insight into a collection of recent ideas and advanced techniques.

New in the second edition are neutral FDEs and results about Morse-Smale systems, persistence, nonuniform hyperbolicity, monotonicity. Teresa Faria contributed a chapter on local theory, about realization of vector fields, i.e., embedding of flows in semiflows of FDEs on center manifolds, and about normal forms. Krzysztof Rybakowski wrote an appendix on the Conley index in noncompact spaces.

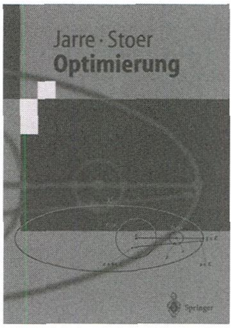
The presentation is only partially systematic, and the chapters are rather independent from each other, with repetitions of basic facts, which the reader may occasionally appreciate. Most proofs are only sketched, with references to the literature for some crucial technical parts. There are condensed descriptions of long, involved proofs which are not easy to digest. The history of the results presented is carefully noted.

Pleasant to read are the introductory chapters with illustrative examples, the results on the Levin-Nohel equation, the self-contained and detailed chapter on realization and normal forms, and the elegant appendix.

Considering the survey character of the book it must be added that several developments which concern the topics chosen by the authors are neither discussed nor mentioned. This concerns results on the structure of global attractors of fundamental delay differential equations, Poincaré-Bendixson type results, hyperbolicity and shadowing for noninvertible maps in infinite dimensions, complicated (chaotic) solution behaviour for delay differential equations, and more. With regard to chaotic solution behaviour the reader finds the remark that numerical evidence and some theoretical results indicate that there can be chaotic dynamics (p. 225). As a matter of fact, this has been rigorously established for equations of the type addressed on p. 225 in the mid-nineties, and for similar ones since the early eighties.

With the caveat that the book is not as exhaustive as it may be expected from the title and not everywhere up-to-date it can be recommended as a useful, sometimes inspiring account of a group of general results from the evolving theory of dynamical systems on infinite-dimensional spaces.

Gießen H.-O. Walther



F. Jarre, J. Stoer
Optimierung

Berlin, u. a., Springer, 2004, 476 S., € 29,95

Das Buch von Jarre und Stoer ist aus einer Reihe von Vorlesungen zum Thema Optimierung entstanden, die teilweise bis auf die 70er Jahre zurückgehen und die sukzessive ergänzt und an moderne Entwicklungen angepaßt wurden.

Der erste Teil des Buches beschäftigt sich mit der linearen Optimierung. Diskutiert werden das Simplexverfahren, seine geometrische Interpretation sowie duale Programme. Es schließt sich ein Abschnitt über Innere-Punkte-Verfahren der linearen Programmierung an mit einer ausführlichen Diskussion des zentralen Pfades, des Newton-Verfahrens für das primale-duale System sowie zu Konvergenzfragen. Weiterhin werden praktische Aspekte, die zur numerischen Realisierung erforderlich sind, behandelt. Dieser Teil wird abgeschlossen durch Anwendungen der linearen Programmierung auf Transportprobleme sowie durch Vorstellung einiger Algorithmen zur Bestimmung kürzester Wege auf Netzwerken.

Der zweiten Teil des Buches beschäftigt sich mit der unrestringierten nichtlinearen Optimierung. Nach einer Diskussion von Abstiegsverfahren schließen sich Verfahren mit konjugierten Richtungen sowie Trust-Region-, Newton-, Quasi-Newton- und Gauß-Newton-Verfahren an. Die Algorithmen werden vorgestellt, diverse Detailfragen analysiert und die wichtigsten Konvergenzresultate bewiesen.

Teil III führt den Leser zurück in die Gundlagen der konvexen Analysis. So werden Trennugssätze untersucht mit dem Ziel, hieraus notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen ableiten zu können. Als unmittelbare Folgerung ergeben sich die KKT-Bedingungen für den differenzierbaren Fall sowie die Sattelpunkteigenschaften der Lagrangefunktion. Hieraus lassen sich dann Dualitätsaussagen für konisch konvexe und semidefinite Programme ableiten. In einem weiteren Kapitel werden Optimalitätsbedingungen verallgemeinert unter Zuhilfenahme von Tangentialkegeln. Es folgen dann noch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung sowie Sensitivitätsbetrachtungen.

Der vierte Teil des Buches beschäftigt sich ausführlich mit restringierten Optimierungsverfahren. Im ersten Abschnitt werden Projektionsverfahren zusammen mit den Spezialfällen affiner Nebenbedingungen und quadratischer Programme eingeführt, wobei allgemeine Konvergenzaussagen hergeleitet werden. Ein wichtiger Ansatzpunkt zur Behandlung nichtlinearer Restriktionen stellen Penaltyverfahren dar, die im nachfolgenden Kapitel untersucht werden. Speziell werden exakte Penaltyfunktionen, erweiterte Lagrangefunktionen und Barrierenfunktionen analysiert. Die zuletzt genannten Funktionen führen dann auf primale-duale Innere-Punkte-Verfahren. Ein weiteres Kapitel behandelt die in praktischen Anwendungen populär gewordenen SQP-Verfahren, wobei hier die erforderlichen Quasi-Newton-Updates und Stabilisierungsmaßnahmen zur Konvergenzerzwingung im Vordergrund stehen. Darüberhinaus werden global konvergente Trust-Region-Verfahren sowie deren moderne Variante, das Filterverfahren, untersucht.

Ein längerer Abschnitt wird den Innere-Punkte-Verfahren für konvexe Probleme gewidmet. Ausgehend von theoretischen Grundlagen wie Zentrenmethode und Selbstkonkordanz wird ein Modellalgorithmus entwickelt, um an diesem Beispiel polynomiale Konvergenz zeigen zu können. Es schließen sich weitere Untersuchungen an, um zu einem numerisch implementierbaren Verfahren zu gelangen. Hierzu wird ein primaler Prediktor-Korrektor-Algorithmus eingeführt.

In einem weiteren längeren Abschnitt werden anschließend semidefinite Programme eingeführt und analysiert ausgehend von einem primalen-dualen Verfahren. Eine Reihe von Anwendungen zeigt die Flexibilität dieser Betrachtungsweise, speziell Lyapunovungleichung, Eigenwertoptimierung sowie Lagrangedualität. Weitere Anwendungen von Innere-Punkte-Verfahren auf kombinatorische Probleme schließen sich an, z. B. maximale stabile Mengen, Max-Cut-Probleme, Graphenpartitionierung und lineare 0/1-Probleme. Teil IV des Buches wird abgeschlossen durch ein Kapitel zu direkten Suchverfehren wie Nelder und Mead und das Kriging-Verfahren.

Das Buch enthält 139 Literaturzitate sowie zahlreiche Übungsaufgaben.

Sichtbar ist die eminente, über mehrere Jahrzehnte erworbene Erfahrung und Kompetenz der Autoren auf dem Gebiet der Optimierung. So werden altbewährte Methoden, die Bestand haben und sowohl für die mathematische Analyse von Optimierungsaufgaben als auch deren numerische Lösung und Anwendung im Detail beschrieben, beispielsweise das Newton-Verfahren oder bekannte Trennungssätze. Darüberhinaus enthält das Buch eine detaillierte Zusammenfassung relevanter neuer Ansätzen der letzten Jahre, wobei hier vor allem die Innere-Punkte-Verfahren oder die semidefinite Programmierung zu nennen wäre.

Der Schwerpunkt der Abhandlungen liegt eindeutig auf dem Bereich der nichtlinearen Programmierung. Doch auch Nachbargebiete werden behandelt mit dem Ziel, dem Leser einen möglichst breiten Einblick in die unterschiedlichsten Facetten der mathematischen Optimierung zu geben. Hierzu zählt die lineare Optimierung, die insgesamt vier Kapitel umfaßt und neben Simplex- und Innere-Punkte-Verfahren auch Transport- und Netzwerkprobleme umfaßt. Daneben werden kombinatorische Probleme, Suchverfahren und diverse Anwendungen zum Beispiel auf Lyapunovgleichungen andiskutiert.

Damit stellt das Buch eine umfassende *Grundlage für Studenten und Mitarbeiter* dar, die sich in die mathematische Optimierung einarbeiten wollen. Auch als Begleitlektüre zu einer Optimierungsvorlesung kann das Buch wärmstens empfohlen werden.

Bayreuth K. Schittkowski

ISSN 0012-0456