E 20577 F
98. Band Heft 4
ausgegeben am 12. 11. 1996

DMV

Jahresbericht

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax (0711) 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

98. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1996

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, Oftersheim
Druck: pagina media gmbH, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung
Buchbesprechungen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 98, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Berndt: Bruno Schoeneberg
G. Harder: Wittvektoren
R. Kühnen: Herbert Grötzsch zum Gedächtnis
H. Tietz: Herbert Grötzsch in Marburg
J. Zowe: Mathematik und Entwurf mechanischer Strukturen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
98 (1996) 173–181
Mathematics Subject Classification: 35 J 45, 35 J 60

Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme[1]

E. Heinz, Göttingen

Im folgenden gebe ich einen Überblick über einige klassische und neuere Ergebnisse aus der Theorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen und der elliptischen Systeme. In §1 behandele ich elliptische Monge-Ampèresche Gleichungen in zwei Variablen. Ausgangspunkt ist das Weylsche Einbettungsproblem. In §2 werden verschiedene Resultate über elliptische Systeme besprochen, die für die Anwendungen auf Monge-Ampèresche Gleichungen von Bedeutung sind. Schließlich werden in §3 einige offene Fragen erörtert.

1 Monge-Ampèresche Gleichungen

Die Theorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen wurde in hohem Maße durch Probleme aus der Differentialgeometrie beeinflußt. Unter diesen nimmt das Problem von Weyl einen zentralen Platz ein. Bevor ich das Problem formuliere, sei an einige bekannte Definitionen erinnert. Eine partielle Differentialgleichung

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0 \tag{1.1}$$

$$(p = z_x,\ q = z_y;\ r = z_{xx},\ s = z_{xy},\ t = z_{yy})$$

heißt *elliptisch* für eine vorgelegte reelle Lösung $z = z(x,y)$, wenn

$$D = F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 > 0 \tag{1.2}$$

ausfällt. (1.1) ist vom *Monge-Ampèreschen Typ*, wenn

$$F = Ar + 2Bs + Ct + rt - s^2 - E = 0 \tag{1.3}$$

$$(A = A(x,y,z,p,q), \dots, E = E(x,y,z,p,q))$$

gilt. Elliptizität von (1.3) bedeutet also, daß

$$D = (A+t)(C+r) - (B-s)^2 = AC - B^2 + E > 0. \tag{1.4}$$

---

[1] Modifizierte Fassung eines Vortrages am 19. 9. 95 auf der DMV-Tagung in Ulm.

gilt. Das *Weylsche Einbettungsproblem* ([12], [14], [17]) verlangt die Bestimmung einer isometrischen Einbettung $\mathfrak{r} : S^2 \to \mathbb{R}^3$ einer auf der Einheitskugel $\Sigma = S^2$ vorgegebenen positiv-definiten Metrik $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ positiver Gaußscher Krümmung K als konvexe Fläche, d.h., die Lösung der Differentialgleichung $d\mathfrak{r}^2 = ds^2$ auf Σ, die sich in lokalen Koordinaten (u, v) in der Form

$$(1.5) \quad \mathfrak{r}_u^2 = E, \quad \mathfrak{r}_u \mathfrak{r}_v = F, \quad \mathfrak{r}_v^2 = G$$

schreiben läßt. Dabei wird $\mathfrak{r} \in C^2(\Sigma)$ vorausgesetzt. Die Funktion $\rho = \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2$ genügt der Darbouxschen Differentialgleichung

$$(1.6) \quad \begin{aligned} &(\rho_{uu} - \Gamma_{11}^1 \rho_u - \Gamma_{11}^2 \rho_v - E)(\rho_{vv} - \Gamma_{22}^1 \rho_u - \Gamma_{22}^2 \rho_v - G) \\ &- (\rho_{uv} - \Gamma_{12}^1 \rho_u - \Gamma_{12}^2 \rho_v - F)^2 \\ &= K(u, v)\left[2\rho(EG - F^2) - (G\rho_u^2 - 2F\rho_u\rho_v + E\rho_v^2)\right] \end{aligned}$$

die mit dem System (1.5) äquivalent ist. Sie ist vom Monge-Ampèreschen Typ, und bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs ist

$$(1.7) \quad D = K(u, v)(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_u\mathfrak{r}_v)^2 > 0.$$

Es sei Ω eine beschränkte offene Menge im $\mathbb{R}^2$. Für eine Funktion

$$z = z(u, v) = z(w) \in C^{k,\nu}(\Omega) \quad (k = 0, 1, \ldots;\ 0 < \nu \leq 1)$$

erklären wir die Schaudernorm $\|z\|_{k,\nu}^{\Omega}$ in der üblichen Weise durch die Gleichung

$$(1.8) \quad \|z\|_{k,\nu}^{\Omega} = \sup_{\Omega} |z| + \cdots + \sup_{\Omega} |D^k z| + \sup_{\substack{w_1, w_2 \in \Omega \\ w_1 \neq w_2}} \frac{|D^k z(w_1) - D^k z(w_2)|}{|w_1 - w_2|^{\nu}}$$

Die Durchführung der Weylschen Kontinuitätsmethode [14] erfordert eine Abschätzung der Größe $\|\rho\|_{2,\nu}^{\Omega'}$ $(\nu > 0)$ durch die Metrik ds^2. Dabei ist Ω ein Parametergebiet von Σ und $\Omega' \subset\subset \Omega$. Die Lösung dieses Problems erfolgt in zwei Schritten. Zunächst hat man für die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{r}$ die Weylsche Ungleichung ([14], [17])

$$(1.9) \quad H^2 \leq \max_{\Sigma} \left(K - \frac{1}{4K}\Delta_2(K)\right),$$

wobei Δ_2 den zu ds^2 gehörigen Beltrami-Operator bedeutet. Dies liefert eine für $\|\rho\|_{2,\nu}^{\Omega'}$ $(\Omega' \subset\subset \Omega)$ nach sich zieht. Die naheliegende Vermutung, daß der Monge-Ampèresche Charakter von (1.6) dafür ausreicht, erweist sich als falsch. Das Problem der inneren Abschätzungen für elliptische Monge-Ampèresche Gleichungen ist zuerst von H. Lewy ([9], [10]) in Angriff genommen worden. Für eine spezielle Klasse analytischer Monge-Ampèrescher Gleichungen, die die Darbouxsche Gleichung (1.6) enthält, konnte er innere Abschätzungen der zweiten und höheren Ableitungen beweisen, allerdings nicht explizit, sondern in Form von Kompaktheitsaussagen. Unser Ziel besteht in der lokalen Abschätzung der Höldernormen $\|z\|_{2,\nu}^{\Omega'}$ durch die C^1-Norm $\|z\|_1^{\Omega}$ und die Daten für eine Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen (1.3), die die Lewysche Klasse enthält (Satz 1 und Satz 2). Dabei werden wir anstelle von $\Omega' \subset\subset \Omega$ nur $\Omega' \subseteq \Omega$ voraussetzen. Solche Abschätzungen sind auch für die Lösungen von Randwertaufgaben geeignet. Für eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$\Omega_d = \{(x,y) \in \Omega : \operatorname{dist}((x,y), \partial\Omega) > d\}.$$

Voraussetzung (V_1). *Die Koeffizienten* $A = A(x, y, z, p, q), \ldots, E = E(x,y,z,p,q)$ von (1.3) *gehören zur Klasse* $C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3)$ *und genügen für* $(x,y) \in \bar{\Omega}$ *und* $|z|, |p|, |q| \leq R < \infty$ *den Ungleichungen*

$$(1.10) \quad |A|, \ldots, |E|; \ |A_x|, \ldots, |E_q| \leq \lambda(R) < \infty.$$

Voraussetzung (V_2). *Für* $(x,y,z,p,q) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3$ *hat man die Strukturbedingungen*

$$\omega_1(x, y) = A_p \ldots$$

[illegible]

wobei die Funktionen $\omega_1, \ldots, \omega_4$ *zur Klasse* $C^1(\bar{\Omega})$ *gehören und den Ungleichungen*

$$(1.12) \quad \|\omega_k\|_1^{\Omega} \leq \alpha < \infty \quad (k = 1, \ldots, 4)$$

genügen.

Satz 1. *Sei* $z = z(x,y) \in C^2(\Omega)$ *eine Lösung von* (1.3) *mit*

$$(1.13) \quad \|z\|_1^{\Omega} \leq \gamma \leq \infty,$$

C^3-regulär. Das bedeutet, daß sich diese Menge lokal als Nullstellenmenge reellwertiger Funktionen $g \in C^3$ mit $\nabla g \neq 0$ darstellen läßt.

Voraussetzung (V_3). *Für* $(x,y) \in \partial\Omega \cap O$ *hat man die Ungleichung*

$$k(A,B,C;x,y) = \omega_1\nu_1^3 + \omega_2\nu_1^2\nu_2 + \omega_3\nu_1\nu_2^2 + \omega_4\nu_2^3 + \kappa \geq \beta > 0. \tag{1.16}$$

Dabei ist $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ *die äußere Normale in* $\partial\Omega$, *und* $\kappa = \kappa(x,y)$ *ist die Krümmung von* $\partial\Omega$ *im Punkt* (x,y).

Dann läßt sich folgendes beweisen [6, Satz 2]:

Satz 2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Außerdem genüge* (Ω, O) *der Bedingung* (V_3), *und es sei* $z \in C^0(\bar{G})$ *mit* $z(x,y) = h(x,y)$ *für* $(x,y) \in \partial\Omega \cap O$ *und* $h \in C^3(\bar{G})$. *Dann gehört die Funktion* z *zur Klasse* $C^{2,\nu}(\overline{G(d)})$ *für* $d > 0$ *und* $0 < \nu < 1$, *und man hat eine Abschätzung der Form*

$$\|z\|_{2,\nu}^{\overline{G(d)}} \leq \Theta < \infty, \tag{1.17}$$

wobei Θ *nur von den Größen* γ, μ, ν, d *und den Daten* $(\Omega, O, h; A, \ldots, E)$ *abhängt.*

Die letzte Ungleichung bedarf einer Präzisierung, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Bemerkungen zu Satz 1 und Satz 2.

(1) Die Ungleichung (1.17) geht über eine a priori-Abschätzung insofern hinaus, als die Endlichkeit der linken Seite nicht vorausgesetzt wird. Wählt man speziell für O eine Umgebung eines Randpunktes $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$, so erhält man eine Aussage über das Randverhalten von z bei (x_0, y_0) und eine Abschätzung der $C^{2,\nu}$-Norm von z in einer Halbumgebung von (x_0, y_0). Wählt man für O eine Kreisscheibe von hinreichend großem Radius, so geht (1.17) in eine Abschätzung für $\|z\|_{2,\nu}^{\bar{\Omega}}$ über.
(2) Die Voraussetzungen (V_1) und (V_2) sind für die Darbouxsche Gleichung (1.6) erfüllt, wenn die Metrik ds^2 zur KlasseC^3 gehört. Die Koeffizienten A, B, C hängen dann linear von p, q ab. Satz 1 liefert dann eine Abschätzung für die mittlere Krümmung $|H|$ einer geschlossenen Eifläche durch die C^3-Norm der Metrik ds^2, also eine Verschärfung der Weylschen Ungleichung (1.9), und damit die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für eine Metrik der Klasse C^3. Wie Sabitov [15] und F. Schulz [16] mit anderen Methoden bewiesen haben, läßt sich diese Voraussetzung sogar noch abschwächen. Es braucht nur $ds^2 \in C^{2,\nu}$ mit $\nu \in (0,1)$ gefordert zu werden. Ferner läßt sich zeigen, daß für die Darbouxsche Gleichung (1.6) die Größe k in Voraussetzung (V_3) bis auf einen positiven Faktor mit der geodätischen Krümmung $\kappa_g(\partial\Omega, ds^2)$ übereinstimmt. (V_3) kann also in diesem Fall durch

$$\kappa_g(\partial\Omega, ds^2) \geq \beta > 0 \tag{1.18}$$

ersetzt werden.
(3) Wenn $A, \ldots, E$ von p, q unabhängig sind, entfällt (V_2), und (1.13) läßt sich abschwächen zu

$$\|z\|_0^{\Omega} \leq \gamma < \infty. \tag{1.19}$$

(V_3) ist dann mit $\kappa \geq \beta > 0$ äquivalent (vgl. [6, Satz 3]).

2 Elliptische Systeme

Die Beweise der Sätze 1 und 2 machen Gebrauch von Aussagen über elliptische Systeme in zwei Variabeln, die von unabhängigem Interesse sind. Es handelt sich dabei um Systeme der Form

$$(2.1)\quad \begin{aligned}\Delta x &= h_1(x,y)(x_u^2+x_v^2)+h_2(x,y)(x_u y_u + x_v y_v)\\ &\quad + h_3(x,y)(y_u^2+y_v^2)+h_4(x,y)(x_u y_v - x_v y_u),\end{aligned}$$

$$(2.2)\quad \begin{aligned}\Delta y &= \tilde{h}_1(x,y)(x_u^2+x_v^2)+\tilde{h}_2(x,y)(x_u y_u + x_v y_v)\\ &\quad + \tilde{h}_3(x,y)(y_u^2+y_v^2)+\tilde{h}_4(x,y)(x_u y_v - x_v y_u),\end{aligned}$$

die zuerst von H. Lewy [11] im Zusammenhang mit seinen Arbeiten über Monge-Ampèresche Gleichungen untersucht worden sind. Ein spezieller Fall sind die harmonischen Abbildungen ($h_1 = \cdots = \tilde{h}_4 = 0$). Lewy [11] zeigte, daß eine lokal injektive Abbildung $(u,v) \to (x,y)$, die dem obigen System mit analytischen Koeffizienten $h_1,\ldots,\tilde{h}_4$ genügt, stets eine nichtverschwindende Funktionaldeterminante $J = J(u,v)$ besitzt. Wie in [4] bewiesen wurde, gilt dieses Theorem auch für den Fall, daß die Koeffizienten $h_1,\ldots,\tilde{h}_4$ beschränkt sind und die assoziierten Funktionen

[illegible]

einer Lipschitzbedingung genügen, also insbesondere für Koeffizienten $h_1,\ldots,\tilde{h}_4 \in C^{0,1}$. Eine Anwendung dieses Satzes auf das Studium isolierter Singularitäten von Lösungen Monge-Ampèrescher Gleichungen findet sich in [7]. Es ist leicht einzusehen, daß der Lewysche Satz falsch wird, wenn man nur $h_1, \ldots, \tilde{h}_4 \in C^{0,\mu}$

[illegible]

und

$$(2.4)\qquad \|\varphi_1\|_{0,1}^B, \ldots, \|\varphi_4\|_{0,1}^B \leq \lambda_1 < \infty$$

genügen.
(b) *Es ist* $z(0) = 0$ *und*

$$(2.5)\qquad \iint_B (|z_u|^2 + |z_v|^2)\,du\,dv \leq \lambda_2 < \infty.$$

Dann läßt sich folgendes beweisen [5].

Satz 3. *Sei* $z = z(w) \in \Gamma(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. *Dann hat man für* $0 < r < 1$ *und* $0 < \nu < 1$ *Ungleichungen der Form*

$$(2.6)\qquad \|z\|_{1,\nu}^{B(r)} \leq \Theta_0(\lambda_0, \lambda_2, \nu, r) < \infty$$

und

$$(2.7)\qquad |J(w)| \geq \Theta_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, r) > 0 \quad (|w| < r).$$

Wegen (b) sind die Funktionen $z \in \Gamma$ in $\bar{B}$ gleichgradig stetig (Lemma von Courant-Lebesgue). Die Abschätzung (2.6) folgt dann direkt aus der Differentialungleichung

$$(2.8)\qquad |\Delta z| \leq 4\lambda_0\Big(|z_u|^2 + |z_v|^2\Big).$$

Tiefer liegt die Ungleichung (2.7). Der in [5] gegebene Beweis beruht auf dem Ähnlichkeitsprinzip für eine Klasse pseudoanalytischer Funktionen (similarity principle) und liefert eine explizite Konstruktion der Funktion Θ_1. Es läßt sich zeigen, daß auch im Falle harmonischer Abbildungen auf die Bedingung (2.5) nicht verzichtet werden kann.

Es besteht ein fundamentaler Zusammenhang zwischen der Monge-Ampèreschen Gleichung (1.3) und dem elliptischen System (2.1) – (2.2). Dieser läßt sich folgendermaßen beschreiben: Sei φ die zu (1.3) gehörige charakteristische Differentialform, also

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} \varphi &= F_t dx^2 - F_s dx dy + F_r dy^2 \\ &= (C + r)dx^2 - 2(B - s)dx dy + (A + t)dy^2. \end{aligned}$$

Wegen $D > 0$ ist diese (positiv oder negativ) definit. Führt man anstelle von x, y neue Variable (charakteristische Parameter) ein, so daß

$$(2.10)\qquad \varphi = \Lambda(du^2 + dv^2) \quad (\Lambda \neq 0)$$

gilt, so genügen die Funktionen $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ dem System (2.1) – (2.2) mit

$$(2.11)\qquad \begin{cases} h_\nu(x,y) = k_\nu\big(x, y, z(x,y), p(x,y), q(x,y)\big) \\ \tilde{h}_\nu(x,y) = \tilde{k}_\nu\big(x, y, z(x,y), p(x,y), q(x,y)\big). \end{cases} \quad (\nu = 1, \ldots, 4).$$

Dabei sind k_ν und $\tilde{k}_\nu$ gewisse nichtlineare Differentialausdrücke erster Ordnung in $A, \dots, E$. Insbesondere hat man die Gleichungen

$$(2.12)\quad \begin{cases} \tilde{k}_1 = C_q, & k_1 - \tilde{k}_2 = C_p + 2B_q, \\ k_2 - \tilde{k}_3 = -(A_q + 2B_p), & k_3 = A_p \end{cases}$$

(vgl. dazu [2]). Unter Ausnutzung dieses Zusammenhangs läßt sich Satz 1 direkt mit Hilfe des Uniformisierungsprinzips auf Satz 3 zurückführen [2]. Schwieriger zu beweisen sind die Randaussagen (Satz 2). Auch hier läßt sich die Uniformisierungsmethode anwenden [6]. Für die Untersuchung der zweiten Ableitungen r, s, t in der Umgebung des Randes $\partial\Omega$ reicht jedoch das System (2.1) – (2.2) allein nicht aus. Vielmehr muß auf das elliptische System erster Ordnung zurückgegriffen werden, dem die Größen x, y, z, p, q als Funktionen der charakteristischen Parameter (u, v) genügen. In formaler Hinsicht ist die Situation ähnlich wie im hyperbolischen Fall [1, Kap. V, Anhang §4].

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch die Darbouxsche Differentialgleichung (1.6) etwas genauer betrachten. Wie aus ihrer Herleitung ersichtlich ist, ist die zugehörige charakteristische Form Φ zur zweiten Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{x}$ proportional. Es gilt also

$$(2.13)\quad \Phi = \chi(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2)$$

mit $\chi \neq 0$. Somit fallen die charakteristischen Parameter mit den konjugiert-isothermen Parametern (α, β) der Fläche $\mathfrak{x}$ zusammen, und die Gleichungen (2.1) – (2.2) reduzieren sich auf das Darbouxsche System

$$(2.14)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u + \left(\Gamma^1_{11} + \tfrac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha^2 + u_\beta^2) \;&+\; \left(2\Gamma^1_{12} + \tfrac{K_v}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) \\ &+\; \Gamma^1_{22}(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0 \\ \Delta v + \Gamma^2_{11}(u_\alpha^2 + u_\beta^2) \;&+\; \left(2\Gamma^2_{12} + \tfrac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) \\ &+\; \left(\Gamma^2_{22} + \tfrac{K_v}{2K}\right)(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0 \end{aligned} \right. .$$

Die Koeffizienten $k_1, \dots, \tilde{k}_4$ hängen also nicht von z, p, q ab. Dies ist die von Lewy [10] betrachtete Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen.

Das System (2.14) läßt sich auch direkt zur Konstruktion isometrischer Einbettungen $\mathfrak{x} : B \to \mathbb{R}^3$ von ds^2 verwenden[2]. Dabei stützen wir uns auf den folgenden elementaren

Hilfssatz 1. *Es sei* $w : \bar{B} \to \bar{B}$ *(*$w = u(\alpha, \beta) + iv(\alpha, \beta)$*) ein Homöomorphismus*

Satz 4. *Sei* $ds^2 \in C^3(\bar{B})$ mit $K > 0$ und

$$\kappa_g(\partial B, ds^2) \geq 0 \quad \forall\, w \in \partial B. \tag{2.15}$$

Dann gibt es zu jedem Homöomorphismus $t : \partial B \to \partial B$ *der Klasse* $C^1(\partial B)$ *einen Homöomorphismus* $w : \bar{B} \to \bar{B}$ *der Klasse* $C^2(B)$ *mit* $w|\partial B = t$, *so daß in* B *die Gleichungen* (2.14) *gelten.*

Es gibt also zu jedem Homöomorphismus $t : \partial B \to \partial B$ der Klasse $C^1(\partial B)$ eine isometrische Einbettung $\mathfrak{r} : \bar{B} \to \mathbb{R}^3$ von ds^2. Sind t und $\tilde{t}$ zwei verschiedene Homöomorphismen mit $t(\zeta_j) = \tilde{t}(\zeta_j)$ $(j = 1, 2, 3)$, wobei $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ drei verschiedene Punkte von ∂B bedeuten, so sind die zugehörigen Flächen $\mathfrak{r}$ und $\tilde{\mathfrak{r}}$ inkongruent.

3 Offene Fragen

Es ergeben sich eine Reihe von offenen Problemen. Wir beschränken uns auf solche, die nicht ausschließlich technischer Natur sind.

(1) Man verallgemeinere Satz 1 und Satz 2 auf Systeme Monge-Ampèrescher Gleichungen mit allgemeineren Randbedingungen und behandle Randwertaufgaben für das spezielle System (1.5) sowie für Klassen nichtlinearer Systeme erster Ordnung in Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(2) Der in [3] gegebene Beweis von Satz 4 erfolgt mit topologischen Methoden (Abbildungsgrad von Leray-Schauder). Es erhebt sich die Frage nach der Eindeutigkeit der Zuordnung $t \to w$. In engem Zusammenhang damit steht die Frage, ob sich zwei beliebige isometrische Realisierungen von ds^2 durch eine stetige Deformation (Verbiegung) in einander überführen lassen.

(3) Man lasse in Satz 4 die Bedingung (2.15) fallen und gebe eine möglichst umfassende Klasse $\mathcal{M} = \mathcal{M}(ds^2)$ von Homöomorphismen $t : \partial B \to \partial B$ an, für die die Aussagen von Satz 4 gelten. Insbesondere betrachte man den Fall $\kappa_g < 0$.

Literatur

[1] Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der Mathematischen Physik II. Berlin: Springer-Verlag 1937

[2] Heinz, E.: Interior estimates for solutions of elliptic Monge-Ampère equations. Proc. Sympos. Pure Math. 4 (1961), 149 – 155

[3] Heinz, E.: Existence theorems for one-to-one mappings associated with elliptic systems of second order II. J. Analyse Math. 17 (1966), 145 – 184

[4] Heinz, E.: Über das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante bei einer Klasse eineindeutiger Abbildungen. Math. Z. 105 (1968), 87 – 89

[5] Heinz, E.: Zur Abschätzung der Funktionaldeterminante bei einer Klasse topologischer Abbildungen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. II. Math.-Phys. Kl. 1968, 183 – 197.

[6] Heinz, E.: Lokale Abschätzungen und Randverhalten von Lösungen elliptischer Monge-

[9] Lewy, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations I. Trans. Amer. Math. Soc. 37 (1935), 417 – 434

[10] Lewy, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations II. Trans. Amer. Math. Soc.. 41 (1937), 365 – 374

[11] Lewy, H.: On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 689 – 692

[12] Lewy, H.: On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric [illegible]

[13] Nirenberg, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 103 – 156

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 98 (1996) 182–191

Mathematics Subject Classification: 32 J 25, 14 C 25, 14 C 30

Recent developments on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds

Hélène Esnault, Essen

Refined characteristic classes of flat bundles have been recently considered by several authors. The most striking example is given by Reznikov's solution to Bloch's conjecture on smooth projective varieties (see section 3). A purely algebraic theory has been developed as well (see section 4). In this note, we present an account of this. We recall at the beginning older work on topological classes (see section 2), necessary to understand the background of more recent results and questions.

1 Generalities

1.1

If X_{an} is a complex analytic manifold, a rank n flat bundle $(E_{\mathrm{an}}, \nabla_{\mathrm{an}})$ is a rank n analytic bundle E_{an} endowed with a $\mathbb{C}$ linear map

$$\nabla_{\mathrm{an}} : E_{\mathrm{an}} \to \Omega^1_{X_{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}} E_{\mathrm{an}}$$

with values in the analytic one forms $\Omega^1_{X_{\mathrm{an}}}$, fulfilling the Leibniz condition

$$\nabla_{\mathrm{an}}(\lambda e) = d\lambda \otimes e + \lambda \nabla_{\mathrm{an}}(e)$$

for λ and e local sections of the analytic functions $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}$ and E_{an}. ∇_{an} extends to

$$\nabla_{\mathrm{an}} : \Omega^i_{X_{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}} E_{\mathrm{an}} \to \Omega^{i+1}_{X_{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}} E_{\mathrm{an}}$$

via the sign convention

$$\nabla_{\mathrm{an}}(\omega e) = d\omega \otimes e + (-1)^i \omega \wedge \nabla_{\mathrm{an}}(e)$$

for $\omega \in \Omega^i_{X_{\mathrm{an}}}$. ∇_{an} is flat or integrable if the $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}$ linear map

$$\nabla^2_{\mathrm{an}} : E_{\mathrm{an}} \to \Omega^2_{X_{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}} E,$$

called curvature, vanishes. The local existence of n linearly independent solutions to the system ∇_{an} of linear differential equations guarantees that $L = \mathrm{Ker}\nabla_{\mathrm{an}}$ is a local system of complex vector spaces of dimension n over X_{an}. The corresponding monodromy representation $\rho : \pi_1(X, x) \to GL(n, \mathbb{C})$ is defined by following solutions in L along loops $\gamma \in \pi_1(X, x)$. The correspondence

$$L \to (E_{\text{an}} = L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_{\text{an}}}, \nabla_{\text{an}} = 1 \otimes d)$$

$$(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}}) \to L = \text{Ker}\nabla_{\text{an}}$$

is known under the name of Riemann-Hilbert correspondence. (Here d is the Kähler differential).

In this article, we study flat bundles $(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$ on analytic manifolds which arise from an algebraic structure. Crucial to our purpose is Deligne's theorem:

Theorem 1.1 [10] *Let X be a complex algebraic manifold, and $(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$ be a flat bundle on the associated analytic manifold X_{an}. Then there is an algebraic bundle E and an algebraic connection*

$$\nabla : E \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} E$$

such that $(E, \nabla)_{\text{an}} = (E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$.

A connection $\nabla_{\text{an}} : E_{\text{an}} \to \Omega^1_{X_{\text{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}} E_{\text{an}}$ can be interpreted as a $\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}$ splitting of the Atiyah extension

$$0 \to \Omega^1_{X_{\text{an}}} \otimes E_{\text{an}} \to \mathcal{P}^1(E_{\text{an}}) \to E_{\text{an}} \to 0$$

of principal parts of E_{an} (see [1], [10]). One says that ∇ is an algebraic connection if it is induced by an algebraic splitting of the Atiyah extension $\mathcal{P}^1(E)$ of principal parts of E. It implies automatically that the curvature is algebraic.

Thus Deligne's theorem is an application of Serre's GAGA theorem [22], when X is proper. But when X is not proper, it contains a large part of the theory of differential equations with regular singularities.

A more precise formulation is

Theorem 1.2 *In the above situation, for each good compactification $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ such that $\bar{X}$ is smooth and $\bar{X} - X = D$ is a normal crossing divisor, there are algebraic extensions $(\bar{E}, \bar{\nabla})$, $\bar{\nabla} : \bar{E} \to \Omega^1_{\bar{X}}(\log D) \otimes \bar{E}$ of $(E_{\text{an}}, \nabla_{\text{an}})$.*

(One can even determine all possible such extensions [16], Appendix C).

1.2

Let $CH^i(X)$ be the Chow group of codimension i cycles on X modulo rational equivalence. The algebraicity of flat bundles 1.1 allows to define Chern classes

$$c_i^{CH}(E) \in CH^i(X).$$

This gives at least two guide lines in the interest for algebraic bundles in algebraic geometry.

- They grasp the part of the topology of X_{an} encoded in finite representations of the fundamental group.
- They possibly give interesting algebraic cycles on X.

The purpose of this article is to give the state of the art on the second question. The first one had a spectacular development in the last decade, due to work by Narasimhan-Seshadri, Donaldson, Uhlenbeck-Yau, Hitchin, Corlette, Simpson and others (see [23]).

1.3 Examples

Flat bundles in algebraic geometry arise naturally as Gauß-Manin bundles or as bundles coming from finite coverings.

- Let $\varphi : Y \to X$ be a smooth proper family over X smooth. Then for each $i \geq 0$,

$$R^i\varphi_*\Omega^\bullet_{Y/X}$$

is endowed with the Gauß-Manin connection. When one has a flat (in the sense of algebraic geometry) compactification $\bar{\varphi} : \bar{Y} \to \bar{X}$ of φ such that $X \hookrightarrow \bar{X}$ is a good compactification, then

$$R^i\bar{\varphi}_*\Omega^\bullet_{\bar{Y}/\bar{X}}(\log(\bar{Y} - Y))$$

is a natural logarithmic extension of $R^i\varphi_*\Omega^\bullet_{Y/X}$.

- Let $\varphi : Y \to X$ be an étale covering over X smooth. Then $\varphi_*(\mathcal{O}_Y, d)$ splits into a sum of flat bundles. When one has a flat compactification $\bar{\varphi} : \bar{Y} \to \bar{X}$ of φ such that $X \hookrightarrow \bar{X}$ is a good compactification, then $\varphi_*(\mathcal{O}_Y, d_{\log})$ splits into a sum of flat bundles with a logarithmic connection along $\bar{X} - X$ extending the factors over X, where

$$d_{\log} : \mathcal{O}_{\bar{Y}} \to \Omega^1_{\bar{Y}}(\log(\bar{Y} - Y)).$$

2 Topology

The topological Chern classes $c_i^{\mathbb{Z}}(E) \in H^{2i}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ of flat bundles are torsion. In fact, Chern-Weil theory expressing the class in

$$H^{2i}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = H^{2i}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = \text{ de Rham cohomology group } H^{2i}_{DR}(X_{\mathrm{an}})$$

as the cohomology class of a smooth differential form associated to any connection implies that $c_i^{\mathbb{Z}}(E) \otimes \mathbb{Q} = 0$. Grothendieck [19], Théorème 4.8, gives bounds for the torsion of $c_i^{\mathbb{Z}}(E)$ in terms of invariants of the Galois group of the field of definition of (X, E) by reduction modulo a prime p.

A deep explanation of the torsion of $c_i^{\mathbb{Z}}(E)$ when X is proper is given by

This is in contrast to the algebraic situation. Deligne gives the following example. Let X be a smooth proper curve, and E be a non torsion element in $\mathrm{Pic}^0 X$, the group of rank 1 vector bundles of degree $(= c_1)$ 0. Then if $Y \to X$ is finite and $E|_Y \simeq \mathcal{O}_Y$, E is a direct factor of $\mathcal{O}_Y$ as a $\mathcal{O}_X$ module. If $Y \to X$ is étale, this contradicts that E is not torsion. If $Y \to X$ ramifies, then a power of E has to be an ideal sheaf on X, so is not in $\mathrm{Pic}^0 X$.

3 Analytic Structure

3.1 Deligne-Beilinson cohomology

The Deligne-Beilinson cohomology $H^a_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(b))$ ([2], [17]) encodes the topological cohomology $H^j(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ and its Hodge filtration F^i coming from the analytic structure of the algebraic manifold. It is naturally presented as an extension

$$(1) \qquad 0 \to \frac{H^{a-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^b} \to H^a_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(b)) \to \mathrm{Ker}(F^b H^a(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \to H^a(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})) \to 0$$

The right hand side group is discrete, whereas the left hand side group is endowed with the classical topology coming from $\mathbb{C}$. For example, when X is proper, then the group $H^{2i}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(i))$ is an extension of the image in the de Rham cohomology of the group of codimension i Hodge cycles by a group, which is itself an extension of the torsion in $H^{2i}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$ by Griffiths' intermediate jacobian

$$H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C})/H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) + F^i.$$

The latter is a complex torus, sometimes (e.g. for $i = 1$ or $i = d, d = \dim X$) an abelian variety. (It would be easier to say that $H^{2i}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(i))$ is an extension of the Hodge cycles by the intermediate jacobian, but in the above presentation, we distributed the torsion differently).

There is a cycle map

$$CH^i(X) \to H^{2i}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(i)).$$

So flat bundles have classes $c_i^{\mathcal{D}}(E) \in H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})/F^i$ (see equation 1). For example, for $i = 1$, $c_i^{\mathcal{D}}(E) \in \frac{H^1(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^1}$. When $i = 1$ and X is proper, then the intermediate jacobian is just the classical jacobian $\mathrm{Pic}^0 X$.

3.2

A key conjecture by Bloch and Beilinson ([4], [2]) asserts that if X is projective smooth, there should exist on $CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ a filtration

$$0 = F^{i+1} \subseteq F^i \subset \ldots \subset F^1 \subset F^0 = CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}$$

compatible with products and correspondences. Then F^1 should be $\mathrm{Ker} CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2i}(X, \mathbb{C})$, in particular $F^1 CH^1(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{Pic}^0(X) \otimes \mathbb{Q}$, F^2 should be $\mathrm{Ker} CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2i}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Q}(i))$. So if one had a splitting principle for flat bundles, in the sense that one could reduce the computation of $c_i^{CH}(E) \in CH^i(X)$ to the one of a direct sum of rank 1 flat bundles then one would have

"Conjecture" (Bloch) [3] $c_i^{CH}(E) \in F^iCH^i(X) \otimes \mathbb{Q}$ when (E, ∇) is flat on X projective smooth.

As one does not know the existence of the filtration, and as flat bundles are far from "splitting" as sums of rank 1 flat bundles, the "conjecture" does not mean anything precise, except of

Conjecture (Bloch) [3] $c_i^{\mathcal{D}}(E) \otimes \mathbb{Q} = 0$ for $i \geq 2$ when X is projective smooth.

3.3

In his seminal paper [3] introducing the dilogarithm function in algebraic geometry, not only Bloch states the above conjectures, but he proves at the same time

Theorem 3.1 (Bloch) [3] *If $i = 2$ and X is proper smooth, there is a countable subgroup $\Delta^* \subset \mathbb{C}/\mathbb{Q}$ such that*

$$c_2^{\mathcal{D}} \text{ (flatbundles) } \in \operatorname{Im} H^3(X_{\text{an}}, \Delta^*) \text{ in } \frac{H^3(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^2}.$$

In fact, even if X is not proper, Bloch shows that

$$\operatorname{Im} c_2^{\mathcal{D}} \text{ (flat bundles) in } \frac{H^3(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Q})}{\mathbb{H}^3(X_{\text{an}}, \Omega^{\geq 2}_{X_{\text{an}}})} \in \operatorname{Im} H^3(X, \Delta^*).$$

Also, if X is proper, one can refer only to the Hodge theory to show

Theorem 3.2 [15] *On X proper smooth, the classes $c_i^{\mathcal{D}}$(bundles with algebraic connection) form a countable subset of $H^{2i}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(i))$.*

(This theorem is of no use as one does not know any example of an algebraic bundle on a proper smooth variety which is not flat but carries a non flat algebraic connection).

Reznikov made a major progress answering positively Bloch's conjecture. His result is stronger. Not only $c_i^{\mathcal{D}}(E)$ is torsion for $i \geq 2$ but some good analytic classes in $H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ mapping to $c_i^{\mathcal{D}}(E)$ are torsion as well (see 3.5).

3.4 Secondary Analytic Classes

A rank 1 flat bundle is equivalent to a representation

$$\rho \in \operatorname{Hom}\ (\pi_1(X, x), \mathbb{C}^*) = H^1(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

This class ρ maps to the class $c_1^{\mathcal{D}}(E) \in \frac{H^1(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})}{F^1}$ when the algebraic bundle E underlies the analytic one (see theorem 1.1)). General functorial and additive classes in $H^{2i-1}(X_{\text{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ can be constructed for $i \geq 1$. I know of four ways.

1. The original one of Cheeger-Simons [7] consists in defining a group of differential characters $\hat{H}^j(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (or $\hat{H}^j(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$) on a differentable manifold X, which is an extension of global C^∞ $\mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$) valued forms of degree j with $\mathbb{Z}$ periods by $H^{j-1}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (or $H^{j-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$). They show that flat bundles (E, ∇) on the C^∞ manifold X have classes $\hat{c}_j(E, \nabla) \in H^{2j-1}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \hat{H}^{2j}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. (One defines exactly similarly classes of flat bundles in $H^{2j-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \subset \hat{H}^{2j}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$). Those classes are smooth and do not refer to an analytic structure. If X is a proper smooth algebraic manifold, then Bloch for unitary bundles ([3]) and Gillet-Soulé for non unitary ones ([18]) show that those classes map to $c_i^{\mathcal{D}}(E)$.
2. Karoubi ([20]) constructed classes with K theory.
3. Beilinson ([2]) observes that the Deligne-Beilinson cohomology $H^{2i}_{\mathcal{D}}(BG_\bullet, \mathbb{Z}(i))$ of the discrete simplicial scheme $BG_\bullet$, $G = GL(n, \mathbb{C})$, is just $H^{2i-1}(BG_\bullet, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$. This defines classes by universality.
4. One can also develop a modified splitting principle ([12], [13]) to define functorial and additive classes $c_i^{\mathrm{an}}(E, \nabla) \in H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$.

One shows ([14], [12], [20]) that the classes defined by the splitting principle, by universality and by K theory are the same.

3.5

Now we can express Reznikov's theorem.

Theorem 3.3 (Reznikov) [21] *On X projective smooth, $\hat{c}_i(E, \nabla)$ and $c_i^{\mathrm{an}}(E, \nabla)$ lie in*

$$H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset H^{2i-1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(i))$$

for $i \geq 2$.

One may apply his method to show

Theorem 3.4 [9] *On X smooth $\hat{c}_i(E, \nabla)$ and $c_i^{\mathrm{an}}(E, \nabla)$ lie in $H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (which no longer injects into $H^{2i}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(i))$ for X not proper) for $i \geq 1$ when (E, ∇) is a $\mathbb{Q}$ variation of Hodge structure, for example when (E, ∇) is a Gauß-Manin bundle associated to a smooth proper family (see (1.3)).*

• When one knows that $c_i^{\mathrm{an}}(E,\nabla) \in H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, what does the torsion reflect exactly? (Of course this torsion is an upper bound for the torsion of the classes $c_i^{\mathbb{Z}}(E)$ (2)).

• Grothendieck's coniveau filtration of a cohomology theory H fulfilling localization is defined by

$$N^a H(X) = \{x \in H, \ \exists \ \text{subscheme } Z \subset X, \\ \text{codim } Z \geq a, x|_{X-Z} = 0 \text{ in } H(X-Z)\}.$$

Bloch-Ogus theory [6] implies that $N^j H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) = 0$ for $j \geq i$. So the lowest piece possibly non vanishing is $N^{i-1}H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$. (For $i = 1$, $N^0 H^1(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) = H^1(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ but for $i \geq 2$, the lowest piece is smaller than the whole group). When (E, ∇) comes from a finite representation of the fundamental group, then

$$c_i^{\mathrm{an}}(E,\nabla) \in N^{i-1}H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

for all $i \geq 1$. ([14]). The proof requires the existence of algebraic classes ([13], section 4). Does one have in general

$$c_i^{\mathrm{an}}(E,\nabla) \in N^{i-1}H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})?$$

4 Algebraic Structures

4.1 Secondary Algebraic Classes

A natural question is to find classes lifting the secondary analytic classes $c_i^{\mathrm{an}}(E,\nabla)$ as well as the most possible algebraic classes $c_i^{CH}(E) \in CH^i(X)$. This is the purpose of [13].

We denote by $\mathcal{K}_i^m$ the image of the Zariski sheaf of Milnor K theory in the constant sheaf of Milnor K theory of the field $k(X)$ of rational functions on X. (Here X is defined over any field k). The $d\log : \mathcal{K}_1 \to \Omega_X^1$ map defined by $d\log f = \frac{df}{f}$ extends to a map $d\log : \mathcal{K}_i^m \to \Omega_X^i$.

Theorem 4.1 [13] *Let (E,∇) be a flat connection with logarithmic poles along D. Then there are functorial and additive classes*

$$c_i(E,\nabla) \in H^i := \mathbb{H}^i(X, \mathcal{K}_i^m \xrightarrow{d\log} \Omega_X^i(\log D) \to \Omega_X^{i+1}(\log D) \to \ldots)$$

lifting $c_i^{CH}(E) \in CH^i(X) = H^i(X, \mathcal{K}_i^m)$. When the field of definition of X is $\mathbb{C}$, there are maps

$$H^i \to \mathbb{H}^{2i}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}} \to \ldots \\ \ldots \to \Omega_{X_{\mathrm{an}}}^i \to \Omega_{X_{\mathrm{an}}}^{i+1}(\log D) \to \ldots) \to H^{2i-1}(X_{\mathrm{an}} - D_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

taking $c_i(E,\nabla)$ to $c_i^{\mathrm{an}}(E,\nabla)$, compatibly with the image $c_i^{\mathcal{D}}(E)$ of $c_i^{CH}(E)$.

4.2

The algebraic classes $c_n(E,\nabla)$ define torsion free classes

$$\gamma_n(E,\nabla) \in \mathbb{H}^{n-1}(X, \frac{\Omega_X^n(\log D)}{\Omega_{\mathrm{clsd}}^n} \to \Omega_X^{n+1}(\log D) \to \ldots)$$

which are difficult to understand, and classes

$$\theta_n(E, \nabla) \in H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}(\log D)_{\text{clsd}}}{d\Omega_X^{2n-2}(\log D)}) = H^0(X - D, \mathcal{H}^{2n-1}).$$

Here $\mathcal{H}^j$ is the Zariski sheaf associated to the presheaf $H^j_{DR}(U)$ defined by Bloch and Ogus [6].

The rest of this note is devoted to the classes $\theta_n(E, \nabla)$ studied in [5]. It turns out that they define an algebraic Chern-Simons theory.

Locally, the bundle E is trivialized: $E \simeq \oplus^r \mathcal{O}_X$, so a connection ∇ (not necessarily integrable) is determined by a $r \times r$ matrix A of one forms. The curvature ∇^2 is then $\nabla^2 = F(A) = dA - A^2$. Let P be an invariant homogeneous polynomial of degree n on matrices $M \in M(r \times r, k)$ (X might be defined on any field k of characteristic zero), that is an element

$$P \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{End}\ (k^r)^{\otimes n}, k),$$

invariant under the diagonal adjoint action of $GL(r, k)$. Then the forms

$$TP(A) = n \int_0^1 P(A \wedge F(tA))dt,$$

with $d\ TP(A) = P(F(A))$, defined by Chern-Simons ([8]), glue together to a well defined class

$$\omega_n(E, \nabla, P) \in H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}}{d\Omega_X^{2n-2}}).$$

When ∇ is flat, then

$$\omega_n(E, \nabla, P) \in H^0(X, \mathcal{H}^{2n-1}) \subset H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}}{d\Omega_X^{2n-1}}).$$

Theorem 4.2 *If $D = \phi$, then*

$$\theta_n(E, \nabla) = \omega_n(E, \nabla, P_n)(=: \omega_n(E, \nabla)),$$

where P_n is the invariant polynomial describing the n-th Chern class.

4.4

The comparison 4.2 allows to make a purely algebraic Chern-Simons theory on X over $k = \mathbb{C}$.

We introduce the generalized Griffiths group $\mathrm{Griff}^n(X)$ as the group of codimension n cycles homologous to zero on X modulo those homologous to zero on some divisor in X. For example $\mathrm{Griff}^2(X)$ is the classical Griffiths group of codimension 2 cycles homologous to zero modulo those algebraically equivalent to zero.

There is an extension

$$0 \to \frac{H^{2n-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})}{N^1 H^{2n-1}(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d_n} \mathrm{Griff}^n(X) \to 0,$$

where $\mathcal{E} \subset H^0(X, \mathcal{H}^{2n-1}(\mathbb{Z}))$, and $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z})$ is the Zariski sheaf associated to the presheaf $H^i(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$. Then

Theorem 4.3 *Let (E, ∇) be a flat connection on X proper smooth over $\mathbb{C}$. Then $\omega_n(E, \nabla) \in \mathcal{E} \otimes \mathbb{Q}$, $d_n(\omega_n(E, \nabla))$ is the Chern class $c_n(E) \in \mathrm{Griff}^n(X) \otimes \mathbb{Q}$, and $\omega_n(E, \nabla) \otimes \mathbb{Q} = 0$ if and only if $c_n(E) \otimes \mathbb{Q} = 0$.*

The proof relies on the comparison 4.2, on Reznikov's theorem 3.3, and on the definition of the mixed Hodge structure on the (infinite dimensional) $\mathbb{Z}$ module $\mathcal{E}$.

4.5

To make the theory more flexible, one has to introduce logarithmic poles. In fact,

$$\omega_n(E, \nabla) \in H^0(X, \mathcal{H}^{2n-1}) \subset H^0(X - D, \mathcal{H}^{2n-1})$$

and lies in $\mathcal{E} \otimes \mathbb{C}$. Its image $d_n(c_n(E, \nabla))$ in the Griffiths group differs from the algebraic class of E by a class supported in D, whose precise shape is clear for $n = 2$ (and is vanishing if ∇ has nilpotent residues along D).

4.6 Rigidity

The link of $\omega_n(E, \nabla)$ with the algebraic class in the Griffiths group (if $D = \phi$) forces $\omega_n(E, \nabla)$ to be invariant in a deformation of (E, ∇) over X. But in fact, a stronger rigidity holds true: one can allow X to vary in a one dimensional family.

4.7 Vanishing – Non Vanishing

The invariants

$$\omega_n(E, \nabla) \in H^0(X, \frac{\Omega_X^{2n-1}}{d\Omega^{2n-2}})$$

are certainly non vanishing when ∇ is not flat, as

$$d\omega_n(E, \nabla) = c_n(E) \in H^0(X, \Omega^{2n}_{\mathrm{clsd}}).$$

However, the only examples we have for an integrable connection are vanishing classes:

Gauß-Manin systems of curves (even with logarithmic poles), general weight one Gauß-Manin systems, weight two Gauß-Manin systems of surfaces, finite monodromy.

In characteristic p large enough, one can define $\omega_n(E, \nabla)$ and all Gauß-Manin systems of proper smooth varieties vanish.

One may raise the question of whether on X smooth proper, $\omega_n(E, \nabla)$ always vanishes for $n \geq 2$.

References

[1] Atiyah, M.: Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Am. Math. Soc. **85** (1957), 181–207
[2] Beilinson, A.: Higher regulators and values of L-functions, J. Soviet Math. **30** (1985), 2036–2070
[3] Bloch, S.: Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry, Int. Symp. on Alg. Geometry, Kyoto (1977), 103–114
[4] Bloch, S.: Lectures on Algebraic Cycles, Duke University Publications (1980)
[5] Bloch, S., Esnault, H.: Algebraic Chern-Simons theory, preprint 1996, 47 pages
[6] Bloch, S., Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Sc. ENS, 4^0 série **7** (1974), 181–202
[7] Cheeger, J., Simons, J.: Differential characters and geometric invariants, in "Geometry and Topology, Proceedings of the special year, University of Maryland 1983-84", Lecture Notes in Math. **1167** (1985), Springer, 50–80
[8] Chern, S.-S., Simons, J.: Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math. **99** (1974), 181-202
[9] Corlette, K., Esnault, H.: Classes of local systems of $\mathbb{Q}$ hermitian vector spaces, preprint (1995)
[10] Deligne, P.: Équations Différentielles à Points Singuliers Réguliers, Springer Lecture Notes **163** (1970)
[11] Deligne, P., Sullivan, D.: Fibrés vectoriels complexes à groupe structural discret, CRAS **281** (1975), 1081–1083
[12] Esnault, H.: Characteristic classes of flat bundles, Topology **27** (1988), 323–352
[13] Esnault, H.: Characteristic classes of flat bundles, II, K-Theory **6** (1992), 45–56
[14] Esnault, H.: Coniveau of Classes of Flat Bundles trivialized on a Finite Smooth Covering of a Complex Manifold, K-Theory **8** (1994), 483–497
[15] Esnault, H., Srinivas, V.: Chern classes of vector bundles with holomorphic connections on a complete smooth variety, J. Diff. Geom. **36** (1992), 257–267
[16] Esnault, H., Viehweg, E.: Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems, Inv. math. **86** (1986), 161–194
[17] Esnault, H., Viehweg, E.: Deligne-Beilinson cohomology, in "Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions", Perspectives in Mathematics **4** (1988), 43–91
[18] Gillet, H., Soulé, Ch.: Arithmetic Chow groups and differential characters, in "Algebraic K-Theory: connections with geometry and topology", ed. Jardine and Snaith (1989), Kluwer Academic Publishers, 30-68
[19] Grothendieck, A.: Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets, in "Dix exposés sur la cohomologie des schémas", North-Holland (1968), 215–305
[20] Karoubi, M.: Classes caractéristiques de fibrés feuilletés, holomorphes et algébriques, K-Theory **8** (1994), 153–211
[21] Reznikov, A.: All regulators of flat bundles are torsion, Annals of Math. **139** (1994), 1–14
[22] Serre, J.-P.: Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique, Ann. Inst. Fourier **6** (1956), 1–42
[23] Simpson, C.: Higgs bundles and local systems, Publ. Math. IHES **75** (1992), 5–95

Hélène Esnault
Universität GH Essen
FB 6, Mathematik und Informatik
D-45117 Essen
Germany
e-mail: esnault@uni-essen.de

(*Eingegangen 31. 1. 1996*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
98 (1996) 192–212
Mathematics Subject Classification: 01 A 70

Ernst Mohr – Das Schicksal eines Mathematikers*

F. Litten, München

Wenn über Mathematiker als Leidtragende des Nationalsozialismus geschrieben wird, erscheint auch der Name Ernst Mohr [Mehrtens, 345; Dick, Pinl, 177f.][1]. Bislang gab es allerdings keine ausführlichere, veröffentlichte Darstellung der entsprechenden Geschehnisse, und die unveröffentlichte Darstellung von {Ebert}, die weitgehend auf den Beständen des Berlin Document Centers basiert, ist leider nicht korrekt.[2] In diesem Artikel soll nun das Schicksal Mohrs anhand eines breiteren

In Göttingen promovierte Mohr schließlich bei Hermann Weyl[4] mit einer Dissertation über die Darstellungen der Komplexgruppe und der irreduziblen unter ihnen [Mohr (1933)]. In seinem Gutachten vom 6. Juli 1933 stellt Weyl die Dissertation in den Kontext der Arbeiten von Issai Schur über die volle lineare Gruppe und Richard Brauer über die Drehungsgruppe. Zwar sei sie an Originalität vor allem nicht mit der Brauers zu vergleichen, Mohr habe aber die „selbständige Beherrschung eines nicht leicht zu handhabenden Apparates“ erkennen lassen und ein auftretendes neues Problem richtig gelöst, daher sei das Prädikat „gut“ angebracht {UAG MI}. Nachdem Mohr die mündliche Prüfung am 19. Juli 1933 mit „sehr gut“ bestanden hatte {TUB PA}, erhielt er Weihnachten 1933 das Doktordiplom.

II

Mit der Promotion begann für Mohr ein in mehrerer Hinsicht schwieriger Lebensabschnitt.[5] Jegliche finanzielle Unterstützung seiner Eltern und vor allem Großeltern versiegte. Mit Beginn des Wintersemesters 1933 übernahm er eine Hilfsassistentenstelle bei Friedrich Karl Schmidt (damals Dozent für Mathematik an

Mohr als Informationsquelle, z. B. als er ihn am 24. Mai 1934 über Hasse befragte und für den 26. ein weiteres Gespräch vereinbarte.

Nun besuchte am 26. Mai vormittags Johanna Wagener, ohne Wissen Mohrs, Schmidt, um sich für Mohr einzusetzen. Dabei machte Schmidt ihr klar, daß er Mohr nicht für eine Assistentenstelle als geeignet ansehe und daß außerdem die Besetzung dieser Stelle Hasse vorbehalten bleiben müsse, da sie gründlich und auf Jahre hinaus geplant werden wolle. Die Unterredung endete offenbar recht heftig, und Frau Wagener verließ Schmidt, um Mohr Mitteilung davon zu machen. Wie Mohr in seiner Vernehmung vom 2. Juni sagt, „kam [ihm daraufhin] ganz plötzlich die Erleuchtung, als ob Herr Prof. Hasse die alten Assistenten von Prof. Courant bevorzugen würde und damit den alten Geist des Göttinger Mathematischen Instituts konservieren würde.“

Kurze Zeit später hatte Mohr sein Treffen mit Weniger. Es ist unklar, was genau Mohr Weniger erzählte; danach blieb jedenfalls der Eindruck, daß Hasse mit [redacted] keine Einflußnahme mehr möglich wäre und der „alte Geist“ weiterbestände. Auch Weber erfuhr am Abend von diesem „Tatbestand“.

Am folgenden Tag traf sich Weber mit dem Fachschaftsleiter, dem Mathematik-Studenten Heinz Kleinsorge, in Sachen Hasse; Weniger reiste nach Berlin, um im Reichswissenschaftsministerium Schritte gegen Hasse unternehmen zu lassen.

Am Montag, den 28. Mai, gab es eine von Kleinsorge hastig initiierte Unterschriftenaktion am Mathematischen Institut gegen die Institutsübernahme durch Hasse. Durch einen Anruf von Hasse, der es vermutlich von Schmidt gehört hatte, erfuhr der Rektor der Universität Göttingen von der „Unruhe“, die sich auszubreiten begann.

Die Ereignisse spitzten sich schließlich am folgenden Tag zu. Weber erhielt von Weniger einen Brief aus Berlin, in dem anscheinend eine Rücknahme der Berufung Hasses nach Göttingen durch das Reichswissenschaftsministerium in Aussicht gestellt wurde. Kleinsorge wandte sich an den Studentenschaftsführer Wolff, daraufhin ging man zum Rektor, der sich mittags zwei Stunden durch Weber und Mohr die Anwürfe gegen Hasse erläutern ließ. Daß das Reichswissenschaftsministerium die Berufung rückgängig gemacht habe, war dem Rektor nicht bekannt.

Für fünf Uhr an diesem Dienstag hatte Hasse die Institutsübergabe angesetzt

Aussage Wenigers recht dürftig ausfiel. Das Reichswissenschaftsministerium blieb bei der Berufung Hasses, berief aber auch Erhard Tornier, einen ausgewiesenen Nationalsozialisten, nach Göttingen, wo er am 3. Juni die Landau-Stelle einnahm. Während Weber nur einen Verweis erhielt, konzentrierte sich Tornier auf Mohr. Am 5. Juni erhielt Mohr durch Tornier Hausverbot für das Mathematische Institut wegen „Äusserungen, die Sie über die Nationalsozialistische Partei und die Reichsregierung [...] gemacht haben" {UAG MI}.[8] Weitere Bemühungen Torniers, gegen Mohr vorzugehen, unter anderem über den Göttinger Kreisleiter Thomas Gengler, blieben allerdings erfolglos.[9]

Das Hausverbot gegen Mohr blieb bestehen, bis Hasse in einem Brief vom 25. September 1936 an Nikuradse andeutete, daß er mit Mohr bei Gelegenheit ein klärendes Gespräch führen wolle, um „die alte leidige Angelegenheit [...] aus der Welt zu schaffen" {UAG MI}.

Der „Fall Mohr" ist ein recht merkwürdiger. Mohrs Bedeutung in dieser Angelegenheit scheint vom Inhalt der Aussagen übertrieben, jedoch dürfte hier der Ton dieser Aussagen die Einschätzung mindestens teilweise bestimmt haben. So spricht der Rektor von einem „sehr übersteigerten Erregungszustand" Mohrs {UAG MI, 5.6.1934}. Dies deutet darauf hin, daß Mohr, als er von Frau Wagener über ihre Unterredung mit Schmidt und die dabei zur Sprache gekommenen Zukunftsaussichten unterrichtet wurde, unter der oben geschilderten mehrfachen Belastung die Beherrschung verlor und sich zum „Kampf gegen Hasse", so [Schappacher, 354], mitreißen ließ. Daß dabei politische Argumente ebenfalls benutzt wurden, ist teilweise zeitgemäß bedingt, läßt aber sicherlich keine Rückschlüsse auf Mohrs tatsächliche politische Einstellung zu; im Gegenteil zeigt es meines Erachtens, wie weit der wirklich nicht nationalsozialistische und eigentlich nicht gegen Hasse eingestellte Mohr „neben sich stand". Seine viel später gegenüber seiner Tochter geäußerte Einschätzung „Ich hab' da was Dummes gemacht" dürfte ein passendes Epitaph für diesen „Fall" sein.

III

Mohr's Karrierechancen in Göttingen waren nach diesen Vorkommnissen verständlicherweise gering. Er hatte jedoch insofern Glück, als er am 1. November 1934 eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Lehrstelle für Strömungslehre der TH Breslau bei Johann Nikuradse erhielt.[10] In dieser Funktion konnte er sich nicht nur für die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vorbereiten, die er

[8] [Schappacher, 356] nennt diese Äußerungen „äußerst fadenscheinig bezeugt"; ich halte sie eigentlich für verhältnismäßig gut dokumentiert, unter anderem durch F. K. Schmidt.

[9] Der Brief Torniers an Gengler beginnt: „Hoffentlich haben Sie sich nun entsprechend ausgeschlafen, sodass Sie den Fall Mohr in Angriff nehmen können." Ein Parteiverfahren, wie es [Schappacher, 356] andeutet, dürfte bei der nicht vorhandenen NSDAP-Mitgliedschaft Mohrs kaum möglich gewesen sein; es ist auch in dem Schreiben vom 23. August {UAG MI} nicht erwähnt.

[10] [Schappacher, 356] gibt an, daß Mohr diese Stelle Weber zu verdanken hatte. Das folgende nach {BDC REM}. Es handelte sich nicht, wie manchmal in den Akten steht, um einen Lehrstuhl für Strömungslehre.

am 15. Februar 1935 in Göttingen (!) ablegte, er begann hier auch seine Beschäftigung mit angewandter Mathematik, speziell eben Aero- und Hydrodynamik. Ab 1. Oktober 1936 übernahm er die Verwaltung einer planmäßigen Assistentenstelle und bereitete sich auf die Habilitation vor. Am 21. Dezember 1937 bat Mohr um Zulassung zur Habilitation an der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der TH Breslau mit der Habilitationsschrift „Die laminare Strömung längs der Platte und damit verwandte Flüssigkeitsbewegungen". Die Gutachten Werner Schmeidlers (Inhaber des Lehrstuhls für Höhere Mathematik) und Nikuradses vom 17. bzw. 18. Februar 1938 bezeichnen diese Schrift als einen „wertvollen Beitrag zur Prandtlschen Grenzschichtentheorie" und betonen die Qualität und Klarheit der physikalischen und mathematischen Abschnitte. Da auch die wissenschaftliche Aussprache am 23. Februar 1938 zur allgemeinen Zufriedenheit ablief, erhielt Mohr am 28. Juni 1938 den Grad eines Dr.phil.habil.

Mittlerweile war Mohr vom Dekan (Ludwig Mann, Lehrstuhl für Mechanik) auch für eine Beihilfe vorgeschlagen worden. Das hierfür notwendige Gutachten des Nationalsozialistischen Deutschen Dozentenbundes an der TH Breslau vom 3. März 1938 enthält die Bemerkung, daß Mohr „ziemlich zurückgezogen" arbeite, politisch nicht hervorgetreten sei, aber einen „guten und zuverlässigen Eindruck" mache. „Auch nach dem Zeugnis alter Parteigenossen, die ihn in Göttingen kennen gelernt haben, sind Tatsachen nicht bekannt geworden, die gegen ihn sprechen könnten." Mit solcher Befürwortung erhielt Mohr zu seiner inzwischen auf RM 251,30 gewachsenen Besoldung eine auf ein Jahr befristete monatliche Beihilfe von RM 15.

Der logische Schritt für Mohr nach der Habilitation war die Beantragung einer Dozentur. Diesem Antrag auf eine Dozentur in Mechanik stimmte der Dekan in einem Schreiben an das Reichswissenschaftsministerium vom 23. November 1938 zu. Die Überlastung des Lehrstuhlinhabers für Mechanik (Mann) und des einen Lehrbeauftragten (Nikuradse), der überdies eher experimentell arbeitete, machten eine weitere Dozentur gerade für die Ingenieursausbildung dringend notwendig, und Mohr stelle „eine geeignete aufwärtsstrebende Persönlichkeit" dar. Außerdem wies Mann darauf hin, daß auch die mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Breslau an Mohr als Dozenten für angewandte Mathematik sehr interessiert sei. Dieses Interesse dokumentiert sich in einem von Johann Radon und Georg Feigl gemeinsam verfaßten Gutachten über Mohr vom 11. November 1938. Mohr sei „ein noch weiter entwicklungsfähiger, vielversprechender angewandter Mathematiker [...], umsomehr als er [...] die Gabe eines sehr klaren und lebendigen Vortrages besitzt." Auch an der Universität Breslau bestände ein dringendes Bedürfnis nach einem Dozenten für angewandte Mathematik, da eigentlich niemand so recht zuständig sei bzw. die Zeit dafür habe. Wie Mann versprachen sich Radon und Feigl von einer gleichzeitigen Dozententätigkeit Mohrs an Universität und TH Breslau eine Belebung und gegenseitige Befruchtung.

Da Mohr inzwischen (Sommer 1938) den für die Erlangung der Dozentur obligatorischen Lehrgang des Reichslagers der NSDAP in Bad Tölz mit „günstigem Eindruck" absolviert und auch die Parteidienststellen sich positiv geäußert hatten, wies das Reichswissenschaftsministerium ihn am 2. Januar 1939 der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der TH Breslau zur Ableistung der Lehrprobe zu. Aufgrund einer erneuten Bitte der Universität Breslau am 31. Januar 1939, Mohr die

Lehrprobe dort ableisten zu lassen, erklärte das Reichswissenschaftsministerium am 21. Februar, daß es mit einer Erweiterung der Lehrprobe auf angewandte Mathematik in Anwesenheit der entsprechenden Vertreter der Universität Breslau einverstanden sei. Dieses Schreiben kam allerdings zu spät, da die Lehrprobe an der TH Breslau bereits am 13. Februar mit dem Thema „Laminarer Anlauf" zur vollen Zufriedenheit stattgefunden hatte. Daher wurde für den 16. Mai eine Ergänzungslehrprobe an der Universität zum Thema „Das Bernoullische Theorem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" angesetzt. Der von Feigl angefertigte und von Radon befürwortete Bericht gipfelt in der Passage: „Nach Ansicht des Unterzeichneten [Feigl] hat die Probevorlesung in überzeugender Weise dargetan, dass Mohr als Dozent für Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik ausserordentlich geeignet ist." Am 24. Juli 1939 wurde Mohr zum Dozenten für Mechanik und angewandte Mathematik an der TH und der Universität Breslau ernannt und damit Beamter auf Widerruf.

Mohr war nun also Dozent an zwei Hochschulen (und seit März 1939 verheiratet mit Johanna Wagener), allerdings verdiente er sein Geld noch immer als Assistent. Da diese Stelle eigentlich zu einem anderen Lehrstuhl gehörte und Mohr außerdem die Möglichkeit gegeben werden sollte, sich ohne wirtschaftliche Sorgen seiner Arbeit zu widmen, stellte am 6. Februar 1940 der Dekan der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der TH Breslau (inzwischen Rudolf Suhrmann, Lehrstuhl für technische Chemie) Antrag auf Diäten für Mohr. Das Gutachten des NSD-Dozentenbundes vom folgenden Tag ist recht vorsichtig: Mohr sei politisch farblos und sehr zurückgezogen, aber immerhin sei er Blockwalter der NSV, daher könne man annehmen, daß er als politisch zuverlässig gelte. Tatsächlich war Mohr am 1. April 1936 Mitglied der NSV (Nationalsozialistische Volkswohlfahrt) geworden und im Frühjahr 1936 in den Reichsluftschutzbund eingetreten. Damit hatte er sozusagen die politischen Minimalanforderungen erfüllt – aber nicht mehr. Sein Beispiel (und nicht nur seines) zeigt auch, daß es nicht grundsätzlich notwendig war, für die Habilitation und die manchmal größere Hürde der Erlangung einer Dozentur Parteimitglied zu sein, sondern daß dies von örtlichen, fachlichen und persönlichen Umständen abhing. Allerdings erhielt Mohr die Diäten erst mit Erlaß vom 30. November 1940, da zuerst keine entsprechende Stelle frei war.

Mohr hätte jetzt einigermaßen ruhig seiner Arbeit nachgehen können,[11] wenn es nicht den Reichsminister für die besetzten Ostgebiete gegeben hätte. Dieser, genauer gesagt der Aufbaustab K[aukasien] im Reichsministerium für die besetzten Ostgebiete, versuchte Mohr 1941 und 1942 mehrmals für die Bearbeitung von Lehrbüchern für das „zukünftige Reichskommissariat K" abstellen zu lassen. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da mit der verantwortlichen Bearbeitung der Lehrbücher der „Leiter der kontinentaleuropäischen Forschung beim Beauftragten des Führers für die Überwachung der gesamten geistigen und weltanschaulichen Schulung und Erziehung der NSDAP [Alfred Rosenberg], Professor A. Nikuradse" betraut war, der Bruder Johann Nikuradses. Letzterer war es auch gewesen, der einen entsprechenden Antrag unterschrieben hatte.

[11] Siehe dazu u. a. [Mohr (1941)].

Jedoch stieß Nikuradse auf Widerstand seitens der TH Breslau und des Reichswissenschaftsministeriums. Mohr wurde zuerst als unabkömmlich deklariert, dann war er als Vertretung des ausgeschiedenen a.o. Professors Hans Petersson an der Dt. Universität Prag vorgesehen, so daß bestenfalls eine Mitarbeit Mohrs in den Semesterferien in Frage käme. Tatsächlich hatte Wilhelm Führer, Oberregierungsrat im Reichswissenschaftsministerium, am 22. April 1942 eine Anfrage an die Mathematiker Alfred Klose, Ludwig Bieberbach und Schmeidler gerichtet, in der er um Gutachten über Mohr und Günther Schulz bat, die für den Lehrstuhl in Prag vorgesehen waren.[12] Schmeidler hielt in seinem Gutachten vom 5. Mai 1942 beide für gleichermaßen geeignet; Bieberbach schrieb am 7. Mai: „Während man auf Mohr's Entwicklung hoffen kann, macht Schulz den Eindruck eines zur vollen Reife gediehenen Mathematikers"; Klose schließlich hielt Mohr als „einen der tüchtigsten und lebendigsten unter den jungen deutschen Mathematikern" für eine ao. Professur für vollauf geeignet.

Am 29. Mai 1942 wurde Mohr mit der Vertretung Peterssons in Prag beauftragt, arbeitete aber weiterhin auch für Nikuradse an strömungsmechanischen Problemen. Neuerliche Anträge Nikuradses und des Aufbaustabs K auf völlige Freistellung Mohrs für solche kriegswichtige Forschungen wurden wegen der Unentbehrlichkeit Mohrs in Prag abgelehnt. Immerhin wurde Mohr durch die Mitarbeit an Nikuradses Forschungsaufträgen vom Rüstungskommando Breslau am 20. März 1942 zur Schlüsselkraft erklärt. Leider fehlt in den Akten jegliche Stellungnahme Mohrs zu diesen Anträgen; laut Gnadengesuch Mohrs vom 26. Oktober 1944 {BAP NJ 13334} hatten er und Nikuradse bis zu seiner Verhaftung über Ansätze für die laminare Grenzschicht sowie „Ansätze betr. Flügelgestaltung in Verbindung mit Experimenten von Nikuradse" geforscht. Obwohl hier auch die Erledigung von Aufgaben für das Ostministerium erwähnt wird, dürfte diese Zusammenarbeit nie weit gediehen sein.

Am 8. Juli 1943 schließlich wurde Mohr mit Wirkung vom 1. April 1943 auf die freie Planstelle eines ao. Professors für Mathematik an der Dt. Universität Prag berufen; damit wurde er auch Beamter auf Lebenszeit. Die Zukunft seiner Familie – inzwischen hatte er zwei Töchter – schien, soweit es die Zeiten erlaubten, gesichert.

IV

Durch die Göttinger Vorkommnisse offensichtlich gewarnt, hatte Mohr sich, soweit man feststellen kann, mit anti-nationalsozialistischen Bemerkungen nach außen zurückgehalten. Überhaupt wird von verschiedenen Seiten die Zurückgezogenheit und Verschlossenheit Mohrs in jenen Zeiten betont. Im privaten Kreis hingegen hatte er aus seinen Überzeugungen keinen Hehl gemacht. Die Folgen berichtete er später {EBB, 4.7.1950}: *Am 12. Mai 1944 in Prag im Hotel Béranek* [von der Gestapo] *verhaftet und zwar auf Grund einer gemeinen Denunziation einer Freundin meiner Frau. Die Familie meiner Frau und die sogenannte Freundin kannten sich durch*

[12] {Rohrbach} schreibt, er habe Mohr nach Prag geholt; Feigl erklärt in {BAP NJ 13334}, er habe Mohr für die Stelle in Prag vorgeschlagen.

Jahre in Thüringen. Einer illegalen Widerstandsgruppe gehörte ich nicht an. Es bestand aber damals in Breslau, von wo ich ja kam, ein kleiner Kreis von Hochschullehrern, dem auch ich angehörte, der eindeutig gegen Hitler und sein Terrorsystem gerichtet war. Ich nenne die Namen: Professor Dr. Feigl, Mathematiker in Breslau und leider verstorben im Frühjahr 1945 nach der Flucht aus Breslau, dann Professor Dr. [Clemens] *Schaefer, Physiker und jetzt Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Köln. Ferner Professor Dr.* [Hubert] *Cremer, Mathematiker in Breslau und jetzt an der Technischen Hochschule Aachen. Der Astronom Professor Dr.* [Erich] *Schönberg, jetzt Direktor der Sternwarte in München. Über die Vorgeschichte meiner Verhaftung gebe ich kurz folgendes an: Besagte sogenannte Freundin meiner Frau, Frau Anna-Ruth Nau* [...] *kam während des Krieges mit ihrem Mann nach Posen, wo dieser Inspektor eines Gutes wurde.* [...] *Dorthin kam meine Frau auf Besuch während der Zeit, wo ich in Prag war (im Sommer-Semester 1943). Ich wohnte in Prag stets im Hotel, während meine Frau nach wie vor in Breslau in der alten Wohnung blieb. Während ihres Aufenthalts erkrankte die Waldtraut* [älteste Tochter] *schwer und meine Frau telegrafierte mir, und bat mich, sofort dorthin zu kommen. Glücklicherweise überstand die Waldtraut die Krankheit rasch, und nach ungefähr 14 Tagen konnten wir zusammen nach Breslau zurückkehren. Ich selbst kam während dieser Tage in gar keine engere Beziehung zu dieser Frau Nau, sprach aber mit ihr offen über manche Dinge und machte aus meinem Herzen keine Mördergrube, immer davon ausgehend, daß ich ja mit eigenen Augen sah, wie eng und vertraut das Verhältnis meiner Frau zu Frau Nau war. Unter anderem sagte ich in jener Zeit Frau Nau auch, daß in Posen heißer Boden wäre, riet ihr, Posen rechtzeitig zu verlassen, wobei ich ihr noch sagte, daß sie jederzeit erste Aufnahme und Hilfe bei mir in Breslau bekäme. Leider war bei einigen Zusammenkünften auch eine Kindergärtnerin, Frau Edith Ohme dabei, die später Frau Nau als Zeugin gegen mich angab. Später im September besuchte Frau Nau uns für acht Tage in Breslau, und ich verharrte auch weiterhin in der Auffassung, daß zwischen uns alles zum Besten stünde. Welche Gründe Frau Nau veranlaßten, ausgerechnet dreiviertel Jahre später mich bei der Gestapo anzuzeigen, entzieht sich meiner Kenntnis. Ich nehme an, Neid auf meine Frau und dies besonders, weil der Mann von Frau Nau in jener Zeit eingezogen wurde und dieselbe Frau Nau sehen mußte wie ich zuhause sein konnte. Zu allem Unglück wurde ich zu Beginn des Verhörs in Prag, das sehr raffiniert und vorsichtig anfing, auch nach dieser Frau gefragt und man erkundigte sich bei mir, wie ich über sie dächte und was ich von ihr hielte, wobei ich immer noch in meinem festen Glauben, daß sie echt wäre, ihr in jeder Hinsicht ein gutes Zeugnis ausstellte. Erst dann wurde der Spieß umgedreht und mir eröffnet, daß diese Frau mich schwer belastet hätte. Angeblich hätte ich ihre Ehre als deutsche Frau tief gekränkt und nach Aussage ihres Mannes, dem sie davon Mitteilung gemacht habe, ihr Dach und Heim geschändet und sie hätte sich verpflichtet gefühlt, mich als einen gefährlichen Menschen anzuzeigen.*

Nach diesen Verhören in Prag wurde Mohr Ende Mai in das (weniger gewalttätige) Landgerichtsgefängnis in Meseritz bei Franfurt/Oder gebracht. Dort arbeitete er im Außenkommando in einer Fabrik der Firma Luftfilter AG, Berlin-Halensee, die ihre Produktion zum Teil nach Meseritz verlagert hatte {EBB}. Ab 26. Juli saß er offiziell in Untersuchungshaft, nachdem ein Haftbefehl verhängt worden war. Zu einer kleinen Verzögerung war es gekommen, da der Oberreichsanwalt beim Volksgerichtshof eigentlich gegen beide Eheleute Mohr Anklage erheben wollte. Die

Untersuchungen in Sachen Johanna Mohr wurden jedoch von der Staatspolizeileitstelle Breslau geführt, so daß erst einmal die Akten übersandt werden mußten. Daß die Anklage am 19. September 1944 dann doch nur gegen Ernst Mohr erhoben wurde, lag an der Verzögerung des Abschlusses der Ermittlungen in Breslau: Frau Mohr hatte am 20. Juli einen Jungen geboren {BAP NJ 13334}.

Die Anklageschrift des Oberreichsanwalts nahm die Urteilsbegründung, wie kaum anders zu erwarten, bereits vorweg: Mohr wurde beschuldigt, „Feindsender" abgehört zu haben, den „Führer" einen „Teppichfresser" genannt und ihn parodiert zu haben, die Kriegslage als hoffnungslos und die Judenvertreibung als großen Fehler bezeichnet zu haben. Auch habe Mohr die Darstellung Stalins in der deutschen Presse als falsch gerügt und – was fast schon im Widerspruch zum vorigen stand – Vergleiche zwischen Nationalsozialismus und Bolschewismus gezogen: Beide Systeme seien sich aufgrund ihrer diktatorischen Form ähnlich. Nebenbei wurde bemerkt, daß die Mutter von Frau Mohr Russin war. Schließlich wird noch eine Bemerkung Mohrs zu einem „hoffnungsvollen Brief eines [Frau Nau] bekannten Frontsoldaten" zitiert: „Auch so ein Idiot". (Dies sollte sich im Verfahren schwer auswirken, denn bei dem Frontsoldaten handelte es sich um Herrn Nau.) Zwar habe Mohr diese Äußerungen abgestritten bzw. umzudeuten versucht (er hatte zugegeben, BBC gehört zu haben), doch sei er durch die Zeuginnen Nau und Ohme überführt. Er habe sich wehrkraftzersetzend verhalten und stehe, „wie er eindeutig zum Ausdruck gebracht hat, innerlich auf der Seite unserer Kriegsfeinde und hat sie mit seinen Worten systematisch begünstigt". Beantragt wurden die Eröffnung der Hauptverhandlung vor dem Volksgerichtshof und die Fortdauer der Untersuchungshaft {BAP NJ 14078}.

Der Verhandlungstermin wurde auf Dienstag, 24. Oktober 1944, 10 Uhr festgelegt. Einige Tage zuvor fand die Überführung Mohrs in das Strafgefängnis Plötzensee statt. Die „geradezu lächerliche"[13] Verhandlung vor dem 1. Senat des seiner Unterhaltungen sogar die Zuversicht eines Frontsoldaten gegenüber dessen Ehefrau „idiotisch" genannt und damit diese Soldatenfrau selbst, nämlich die Zeugin Nau, aufs schwerste getroffen hat. Durch seine Tat hat der Angeklagte um die Wende des vierten und fünften Kriegsjahres seinen dem Führer geleisteten Treueid schnöde gebrochen. Damit hat er sich für immer ehrlos gemacht. Nur der T o d, auf den der [redacted] auch alles das ausgelöscht, was sonst vielleicht zu seinen Gunsten sprechen könnte [!]. Es kann infolgedessen nicht strafmildernd gewertet werden, daß er, wie er behauptet, im Rahmen seiner wissenschaftlichen Forschungsarbeit Beachtliches für die deutsche Rüstung, insbesondere die der Luftwaffe geleistet hat. - - - - - Weil Mohr verurteilt worden ist, hat er nach dem Gesetz die Kosten des Verfahrens zu tragen." {BAP Z/C 14224; BDC VGH}.

V

Mohrs Verhaftung war selbstverständlich im Kreis seiner Kollegen nicht unbeachtet geblieben. Vor allem Hans Rohrbach, laut {Mohr} sogar er allein unter den Prager Professoren, versuchte etwas über Mohrs Verbleib und zu erwartendes Schicksal herauszufinden. Allerdings ging der erste dokumentierbare Versuch, Mohrs Schicksal zu beeinflussen, von anderer Seite aus. Georg Feigl, Mohrs Breslauer Kollege, informierte Wilhelm Süss, damals Leiter des Arbeitskreises Mathematik im Reichsforschungsrat, daß Mohr verhaftet worden sei {BAP NJ 13334, 5.11.1944}. Süss wiederum hatte von dem Münchner Physiker Walther Gerlach erfahren, daß die SS beabsichtigte, „in einem Konzentrationslager ein Recheninstitut einzurichten, in dem die Fachkenntnisse der in Konzentrationslagern

Am 28. Oktober 1944 wandte sich Boseck, dessen Mathematische Abteilung mittlerweile im KZ Sachsenhausen untergebracht war, an seine vorgesetzte Behörde, das Amt „Ahnenerbe", mit der Bitte, in der Sache Mohr, von der er über Sievers erfahren habe, „mit Nachdruck" aktiv zu werden. Dabei bemerkte er auch, daß er gehört habe, daß der Professor für Mathematik an der TH Brünn, Erwin Lohr, verhaftet worden sei. Am 2. November erhielt er die Mitteilung, daß in Sachen Mohr „die notwendigen Schritte unternommen worden" seien {BDC Boseck}.

Schließlich enthält der „3. Bericht über die Errichtung einer wissenschaftlichen Forschungsstätte (Mathematische Abteilung) im KL. Sachsenhausen" vom 1. Dezember 1944, verfaßt von Sievers, die Mitteilung, daß im KZ Buchenwald 14 Häftlinge als brauchbar ausgewählt worden waren, von denen allerdings aus „sicherheitstechnischen Gründen" fünf, darunter „auch ein Dozent für Mathematik der Prager Universität" nicht nach Sachsenhausen überstellt werden konnten {BDC Boseck}.

Dieser Bericht gab {Ebert} die Veranlassung festzustellen, daß Mohr sich im KZ Buchenwald befunden habe, was indes nie der Fall war; die einzige Erklärung ist, daß hier Lohr gemeint war, nicht Mohr. Tatsächlich spielte das „Ahnenerbe", trotz der obigen Äußerungen, bestenfalls eine untergeordnete Rolle in Mohrs Schicksal nach der Verurteilung (s.u.).

Die zweite Unternehmung, Mohrs Leben zu retten, begann mit einem Gesuch von Mohrs Rechtsanwalt Riediger am 1. November 1944.[19] Er bat um einen kurzfristigen Vollzugsaufschub, da einige Gutachten von Kollegen Mohrs zu erwarten seien, die dessen Leistungen und charakterliche Stärken darlegen würden. Offenbar unabhängig davon reichte Rohrbach am 4. November ein Gnadengesuch für Mohr beim Reichsjustizminister ein, in dem er darlegte, daß Mohr nicht nur keine Wehrkraftzersetzung betrieben habe, sondern vor allem von großer Bedeutung für die Flugzeugkonstruktionsforschung sei.

Am 8. November stellte Riediger den angekündigten Antrag, Mohrs Strafe auf dem Gnadenwege in eine Freiheitsstrafe umzuwandeln. Zur Unterstützung legte er entsprechende Schreiben Clemens Schaefers, Nikuradses (fünf Seiten lang) und Feigls vor. Diese behandelten Mohrs wissenschaftliche Leistungen und Bedeutung für den Flugzeugbau, aber auch sein allgemeines Verhalten in den letzten Jahren. So schrieb z.B. Feigl: „Menschen seines Schlages finden sich unter Mathematikern nicht selten: in allem, was nicht die eigene Wissenschaft betrifft, äusserst kindlich und naiv, harmlos, unüberlegt, zuweilen furchtbare Torheiten begehend."

Zudem liegt ein Schreiben des Leiters des Planungsamtes des Reichsforschungsrates, Werner Osenberg, vom 13. November 1944 vor, in dem dieser um eine Verschiebung der Urteilsvollstreckung bat, da an ihn die Bitte herangetragen worden sei, für Mohr ein Gnadengesuch zu verfassen. Bevor er dazu Stellung nehmen könne, müsse die Angelegenheit aber erst „eingehend" geprüft werden. In diesem Schreiben wird auch die Möglichkeit erwähnt, Mohr innerhalb eines Konzentrationslagers als Mathematiker einzusetzen, vermutlich also ein Hinweis auf das Institut für wehrwissenschaftliche Zweckforschung.

[19] Das folgende nach {BAP NJ 13334, Bd. 3}.

Diese Anträge spielten jedoch nicht die entscheidende Rolle, ebensowenig ein Gnadengesuch Mohrs vom 26. Oktober 1944 – denn zu einer Gnadenentschließung kam es überhaupt nicht. Ausschlaggebend war ein Brief des Geschäftsführenden Mitglieds der Forschungsführung des Reichsministers der Luftfahrt und Oberbefehlshabers der Luftwaffe an den Reichsjustizminister vom 8. November 1944. Darin stand, daß die deutsche Luftfahrtforschung gegenwärtig „die äussersten Anstrengungen" unternehmen müsse, um den feindlichen Vorsprung auf diesem Gebiet einzuholen. Dies sei umso schwieriger, als es an Nachwuchs mangele und dieser auch eine lange Einarbeitungszeit benötige. Daher werde vorgeschlagen, Mohrs Urteil auszusetzen und ihn für Arbeiten in der Luftfahrtforschung heranzuziehen. Die Betreuung dieser Arbeiten solle August-Wilhelm Quick, Leiter des Instituts für Aerodynamik und Flugmechanik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL), Berlin Adlershof, übernehmen. Damit der Aufwand nicht zu groß werde, solle Mohr in der Nähe Berlins untergebracht werden. Quick werde die von [illegible]

kompressiblen Flüssigkeiten und der Stabilitätsprobleme bei Hochgeschwindigkeitsflugzeugen in Absprache mit der Forschungsführung auswählen.

Tatsächlich teilte das Reichsministerium der Justiz am 16. November dem Oberreichsanwalt beim Volksgerichtshof mit, daß dem Antrag der Forschungsführung des Reichsluftfahrtministeriums entsprochen und die Gnadenentschließung für sechs Monate ausgesetzt werden solle. Dann müsse „nach dem gebotenen strengsten Maßstabe" entschieden werden, ob Mohr weiterhin unentbehrlich sei. Entsprechendes wurde sehr eilig der Leitung des Zuchthauses Brandenburg sowie der Forschungsführung mitgeteilt.

Aufschub der Vollstreckung einzusetzen. Wieder waren es hochherzige Männer, welche im Verein mit den Bemühungen von Professor Rohrbach einen solchen Auftrag für mich in dieser kurzen Zeit zustande brachten und so kam es schließlich, dass ich im letzten Augenblick dem Henkerbeil entging. {IfZ, 13.9.1950}.

In seinen Lebensläufen vom 4. Juli 1950 {EBB} und vom 5. November 1952 {TUB PA} erwähnt Mohr in diesem Zusammenhang auch Quick. Ebenso schrieb Rohrbach in einer Erklärung {GbdL, 22.5.1958}, daß er nach langwierigen Verhandlungen im Reichsjustizministerium und Reichsluftfahrtministerium den Aufschub erreichte. Außerdem liegen ein Schriftstück Lindenbergs an Frau Mohr vom 18. November und ein Brief Rohrbachs an Frau Mohr vom 25. November 1944 vor {EBB}, die beide Rohrbachs wichtige Rolle dokumentieren: sowohl Lindenberg wie Mohr in Brandenburg erfuhren durch Rohrbach von dem Aufschub. An Sommerfeld schrieb Mohr am 6. Dezember 1946, daß Rohrbach sogar Ludwig Prandtl deswegen aufgesucht hatte, der ihn allerdings unverrichteter Dinge wieder wegschickte {DMA}. Schließlich wird Rohrbachs Hilfe für Mohr von Clemens Schaefer in einem Gutachten im Zusammenhang mit der kommissarischen Besetzung des Lehrstuhls für Mathematik und Astronomie an der Universität Würzburg im Jahre 1948 „rühmend hervorgehoben" {BKM, 19.7.1948}.

Zwei Punkte müssen indes ebenfalls erwähnt werden: Die Darstellung in {Rohrbach} weicht etwas von der obigen ab, vor allem in der Frage des erlangten Forschungsauftrages. Er schreibt, daß Mohr für eine von ihm gegründete und von Gerhard Gentzen geleitete Arbeitsgruppe in Prag im Zusammenhang mit der Entwicklung der V-Waffen in Peenemünde Berechnungen ausführte und daß er Mohr das zu bearbeitende Material in Plötzensee überbrachte.[20] Es ist aber ziemlich eindeutig, daß die DVL für Mohr „verantwortlich" war, wie auch die Sprecherlaubniserteilungen in {BAP NJ 13334} zeigen. Vielleicht waren die Rohrbachschen Aufträge ein Zusatz. Außerdem schildert {Rohrbach} die „Aktenverschiebung" als häufigeren Vorgang während des sechsmonatigen Aufschubs, wofür es jedoch eigentlich keine Veranlassung gab.

Der zweite Punkt betrifft Johann Nikuradse. Mohr erwähnt ihn nie unter seinen „Rettern". Nikuradse selbst erklärte 1958, daß er am 20. Oktober 1943 von der Forschungsführung des Luftfahrtministeriums einen „Auftrag der Sonderstufe über systematische Untersuchungen der Reibungsschichten" erhalten hatte, an dem Mohr mitgearbeitet habe. „Das Urteil wurde auf Betreiben des Luftfahrtsministeriums auf sechs Monate ausgesetzt. Der Ausfall des Herrn Prof. Dr. Mohr hätte sonst bewirkt, daß die Erledigung auf viele Jahre in Frage gestellt wurde. Ein Ersatz für die wissenschaftliche Bedeutung des Herrn Prof. Dr. Mohr war zur Zeit nicht vorhanden. Davon ließ sich das Luftfahrtministerium für seinen Einsatz zu Gunsten des Herrn Prof. Dr. Mohr leiten." {GbdL, 9.4.1958}

Die hier gegebene Argumentation entspricht genau der des Luftfahrtministeriums 1944. Hinzu kommt, daß Nikuradse nun tatsächlich die besseren Verbindungen zum Luftfahrtministerium gehabt haben dürfte. Außerdem erinnert sich eine frühere Mitarbeiterin Nikuradses, daß sie die Aufgaben zusammenstellte,

[20] Über diese Arbeiten besteht indes laut {Menzler-Trott} Unklarheit.

die Nikuradse dann nach Berlin zu Mohr brachte {Bigalke}, woraus [Bigalke, 82] die Rettung Mohrs durch Nikuradse ableitete.

Die Mehrzahl der Unterlagen, und die Aussagen Mohrs, sprechen für Rohrbach.[21] Da aber über den Entscheidungsprozeß in der Forschungsführung des Reichsluftfahrtministeriums keine Unterlagen vorliegen (und wenn sie existierten, sind sie mit großer Wahrscheinlichkeit den Bombardierungen zum Opfer gefallen), kann man über die Rolle Nikuradses keine zuverlässige Aussage machen.

Mohr jedenfalls hatte ein halbes Jahr Aufschub (bis 24. April 1945) und führte in Plötzensee die ihm aufgetragenen Berechnungen aus. Einen Teil seiner Eindrücke schilderte er Walter Hammer {IfZ, 18.6.1952}: *Ich wurde so um den 20. Oktober herum von Meseritz nach Plötzensee gebracht und wenige Tage später am 24. Oktober 1944 vom Volksgerichtshof unter dem Vorsitz von Dr. Stier zum Tode verurteilt. Schon vor der Verurteilung war ich im Totenhaus und mußte dort, kaum daß ich angekommen war, die ersten schrecklichen Erlebnisse hinnehmen. Es gab zu jener Zeit fast laufend Hinrichtungen im Zuge des 20. Juli. Ich wurde s. Zt. nachmittags so gegen vier Uhr in meine Zelle gebracht und kurze Zeit darauf flüsterte mir ein Kalfaktor durch die Zellentür, daß eben in diesem Augenblick wieder sechs Männer in den Schuppen geführt würden. Auch bereitete er mich vor, daß ich unter Umständen vor der Verurteilung gefesselt würde, da der Leiter des Totenhauses sehr gemein wäre (in meinem Fall trat dies übrigens nicht ein). Kaum war die Nacht da, gab es schwere Fliegerangriffe auf dem* [illegible]

gebliebenen Kalfaktor, was an Schrecklichem alles schon passiert war. Unter anderem wurde bei einem früheren Angriff das benachbarte Haus (ich glaube mit der Nummer III) getroffen und brannte völlig aus. Später erfuhr ich von einem anderen Gefangenen weitere Einzelheiten darüber: es sollen einige französische Häftlinge geflüchtet sein, die Gelegenheit hatten, während das Haus brannte, zu entkommen. Fast alle wurden wieder *durfte ich kurze Zeit später bei Fliegeralarmen stets in den Keller und auf diese Weise kam ich auch mit anderen Gefangenen, allerdings nicht Politischen, in Berührung. Ich erfuhr so Manches von draußen. Unter anderem kam auch ein Kalfaktor mit dem Namen Elias in den Keller.* [...] *Herr Elias war Kalfaktor von Herrn Oberinspektor Runge vom Büro und so hatte er Gelegenheit, alle die politischen Gefangenen noch zu sehen bzw. kennen zu lernen, die von außerhalb nach Plötzensee zur Hinrichtung gebracht wurden. Er mußte diesen Menschen meistens noch etwas zu essen geben und von ihm erfuhr ich auch, daran erinnere ich mich noch genau, daß am 16. April* [9. (?) April] *Ernst* [richtig: Ewald] *von Kleist*[-Schmenzin] *zur Hinrichtung eingeliefert wurde.*

Soweit nun meine Erinnerung reicht, fanden nach dem 20. April in Plötzensee keine Hinrichtungen mehr statt. Ich meine sogar, am Vorabend, d. h. am 19. April von den letzten Hinrichtungen gehört zu haben. Schon in den Wochen vorher waren viel Transporte und selbstverständlich wurde unter den Todeskandidaten viel aufgeräumt. Nach dem 20. April hatte sich jedoch die Lage in Berlin schon sehr zugespitzt. Es gab fast dauernd Alarme. Nach jedem Alarm kam durch meine Zelle auch ein holländischer politischer Gefangener, der mir eines Tages sagte, daß er hier einen Wachtmeister kenne, der ihm gesagt hätte, es wäre bald Feierabend. Soweit ich weiß, war es am Dienstag, den 24. April soweit, daß die noch verbliebenen Gefangenen einschließlich meiner Person in die Zellen des untersten Geschosses gebracht wurden. Ich lag mit einem Griechen Christophorides zusammen und nach einer bewegten Nacht war es am anderen Nachmittag soweit: mein Grieche war einst Partisane, kannte also russische Maschinengewehre und fuhr an jenem Nachmittage plötzlich hoch, laut rufend, jetzt sind die Russen da. In der Tat hörte man laute Schläge wie von einem Hammer und von

Schmeidler, inzwischen „rehabilitiert", seinen alten Lehrstuhl wieder übernehmen konnte; im gleichen Jahr Mitbegründer der Berliner Mathematischen Gesellschaft; 1978 Emeritierung. In der Mathematik galt Mohrs Interesse nach Kriegsende im wesentlichen Problemen der Analysis, z. B. Differentialgleichungen und Eigenwertproblemen [Dick, Pinl, 177; Knobloch, 265; Litten, 707; Mathematica, 9].

Tatsächlich gewinnt man den Eindruck, daß 1945 Mohrs Leben völlig neu begonnen habe. Damit entspricht man auch – ohne daß hier Absicht impliziert sei – jener weit verbreiteten Wunschvorstellung, daß man die Zeiten vor und nach 1945 klar und säuberlich trennen, und dann jene 12 Jahre ja eigentlich gleich vergessen könne.

Doch die Vergangenheit ließ sich nicht einfach ausschalten, jedenfalls nicht für Mohr. Deutlich wird dies in einem Brief Mohrs an Walter Hammer vom 29.10.1952 {IfZ}: *Sie selbst, lieber Herr Hammer, sind ja einigermaßen über meinen Fall informiert. U.a. wissen Sie auch, daß ich im Frühjahr 1945 von den Russen in Berlin-Plötzensee befreit wurde. Die Rote Armee stürmte die Strafanstalt und befreite die noch inhaftierten politischen Gefangenen der Reihe nach. Nun bin ich doch im Frühjahr 1950 von Ost- nach Westberlin umgezogen und das brachte mit sich, daß ich mich in Westberlin erneut um die Anerkennung als OdF* [Opfer des Faschismus] *bemühen mußte. Ich wurde s.Zt. von dem ersten Magistrat, der noch für ganz Berlin zuständig war, nach kurzer Zeit als OdF anerkannt* [29.10.1945 {EBB}], *zumal ich eine Reihe von Zeugen beibringen konnte, die s.Zt. mit mir in dem ersten Magistrat tätig waren, so z.B. Pfarrer Buchholz, der damals die kirchlichen Angelegenheiten unter sich hatte, und Oberlehrer Nissen, der im Sommer 1945 zum Leiter der Strafanstalt in Spandau ernannt wurde. In Westberlin anerkannte man selbstverständlich das alles nicht, und da ich auch alle Unterlagen in Ostberlin lassen mußte, fing ich nun aufs Neue an, dieselben Schriftstücke wieder zu sammeln, die ich schon einst hatte. Ich legte also der Reihe nach vor:*

1. Das Zeugnis von Pfarrer Buchholz,
2. Das Zeugnis von Oberinspektor Runge, s.Zt. Oberinspektor in Plötzensee und jetzt wieder im alten Beruf als Gerichtsvollzieher,

ferner ein Schriftstück meines damaligen Rechtsanwaltes Dr. Riediger, der jetzt in Marktredwitz in Niederbayern sitzt, weiter einige Unterlagen von mir befreundeten politischen Gefangenen, die mich von damals kannten und noch so Einiges. Nachdem das alles eingereicht war, dauerte es zunächst sehr lange, bis überhaupt von dem Amt an mich eine Anfrage kam, und zwar wurde gefordert, daß ich ein Zeugnis der letzten Haftanstalt beibringen müsse, in der ich gesessen hätte. Ich gab darauf zurück, daß ich nicht in der Lage wäre, da ich ja nicht entlassen sondern vielmehr von den Russen befreit worden wäre. Ich könnte also nie eine derartige Unterlage beibringen. Nichtsdestoweniger ging ich eines Tages nach Plötzensee, um mich zu erkundigen. Die Antwort war selbstverständlich negativ und man empfahl mir daraufhin, ich sollte beim General-staatsanwalt von Westberlin anfragen, ob dort Unterlagen vorhanden wären. Tatsächlich war dort noch ein Aktenstück, doch ging aus diesem nur hervor, daß ich am soundsovielten als politischer Gefangener in Plötzensee in Untersuchungshaft eingeliefert worden wäre. Ferner wurde an dem Schreiben meines Rechtsanwaltes bemängelt, daß dort keine genauen Daten angegeben waren. Das stimmt, ist aber nicht *die Schuld von Herrn Dr. Riediger, denn auch Herr Dr. Riediger mußte aus Breslau fliehen und alles zurücklassen und deshalb konnte er sich nach 5 Jahren nicht mehr an das genaue Datum meiner Verhaftung, meiner Verurteilung ... erinnern.*

Außerdem geschah folgendes:

Von der Annahme ausgehend, daß mein zuständiges OdF-Amt von Westberlin erst einmal mir die Anerkennung als OdF aussprechen müßte, wartete und wartete ich Tage, Wochen, Monate und Jahre und bekam, wenn ich ab und zu anrief jeweils den Bescheid, daß meine Sache jetzt beim Senat läge und ich demnächst eine Entscheidung erwarten dürfe. Inzwischen war aber, wie ich erst erfuhr als es zu spät war, die Frist dafür abgelaufen, um, wie man sagt, mein Urteil aufzuheben. Als ich dieserhalb mit dem zuständigen Staatsanwalt in Moabit sprach, meinte dieser man könne daran nichts mehr ändern, wobei er einräumte, daß in der Öffentlichkeit nicht genügend bekannt gemacht wäre, daß eine solche Frist bestünde. Ich habe daraufhin meinen Rechtsanwalt in Berlin, Herrn Dr. Lindenberg um Hilfe angerufen und einstweilen ist diese Sache noch in der Schwebe. [...]

Wenn ich zu Ihnen, lieber Herr Hammer, als Mensch zu Mensch spreche, so muß ich Ihnen aber leider sagen, daß ich den Eindruck nicht los werde, daß hier bei den zuständigen Stellen schon allenthalben für mich fühlbar wird, daß man gegen Menschen, wie ich es bin, eingestellt ist. Und dies trotz aller schönen Beteuerungen nach außen. So können Sie sich auch in Etwa erklären, warum ich nicht der Einladung gefolgt bin, [illegible]

[illegible]

hätte, daß Sie dabei sind, wäre ich doch gekommen. Ich selbst war in Plötzensee und habe alles Furchtbare miterlebt; ich lag schwer krank und schwer gefesselt in der Totenzelle im Totenhaus IV bei Fliegeralarmen und Kälte, und ich habe erlebt die Hinrichtungstage. Ich war auch, Dank der Güte des jetzigen Direktors in Plötzensee allein an der [illegible] *fanden meine Frau und ich die beiden anderen Kinder und zwar in einem völlig ausgehungerten Zustand. Alles Hab und Gut war hin und alle Unterlagen weg. Zum Glück lebte die Oma auch noch und diese hatte einige wichtigste Urkunden von mir gerettet. Als wir im November 1945 mit diesen Urkunden von Thüringen nach Berlin zurückfuhren, wurden meine Frau und ich in dem dunklen Zuge zwischen Halle und Bitterfeld zusammen mit den anderen Insassen des Abteils von Banditen ausgeplündert und so verlor ich auch die letzten Unterlagen.*

Selbstverständlich kann ich für jede meiner Aussagen zum Glück noch Freunde und Bekannte von Breslau als Zeugen angeben. So kann z.B. Professor Schaefer, Universität Köln, bezeugen, daß ich im Sommer-Semester 1942 einen Ruf auf eine Lehrkanzel für Mathematik an der Deutschen Karls-Universität zu Prag bekommen habe, ferner, daß ich verhaftet und zum Tode verurteilt worden bin.

Aber können Sie verstehen, daß ich langsam müde werde, mich dauernd mit solchen Anfragen und ähnlichem zu befassen? Abgesehen, daß die Nachkriegsjahre in Berlin alles andere denn leicht waren. Ich will nicht klagen, aber schließlich kam ich nach Berlin zusammen mit meiner Frau, mit dem, was ich auf dem Leibe hatte. Die Jacke, die ich trug, hatte mir eine Frau in Breslau geschenkt und die Hose hatte ich ebenfalls geschenkt bekommen, und Schuhe hatte ich, die zu eng waren, und damit mußte ich die zwei ersten Jahre in Berlin auskommen. Natürlich bin ich zum Teil daran selbst schuld, insofern, als ich mich weigerte, der kommunistischen Partei beizutreten. Ich war ja im Anfang im Magistrat tätig und man ließ mich fühlen, daß man gerade von mir einen

Eintritt erwarte. Ich entsprach dem nicht, muß aber sagen, daß auch nichts gegen mich unternommen wurde. Man behandelte mich nach wie vor höflich, aber wie ich feststellen konnte, doch mit einer gewissen Kühle. Zum Glück kam ich bald in meinen Beruf zurück und fand hier an der neueröffneten Techn. Universität ein dankbares Tätigkeitsfeld. Auch hatte ich in den ersten Jahren immer noch gute Bekannte, ich möchte fast sagen, immer noch Freunde in dem damaligen Magistrat, Dank deren Hilfe es mir möglich war, Manches hier durchzusetzen und manchem Studenten und auch Kollegen zu helfen. Ich kann Ihnen aber auch sagen, daß ich meine Macht nie mißbraucht habe.

Sie werden sich vielleicht auch die Gefühle vorstellen können, die mich bewegen, wenn ich sehen muß, daß Menschen, die einst durch die vergangene Nazizeit schwer belastet waren, heute als selbstverständlich die hilfreiche Hand des Staates hinter sich wissen dürfen und nicht nur das, sondern sich sogar auf bereits verbrieftes Recht berufen dürfen, während unsereiner sich wie vogelfrei vorkommen muß.

Ich sage nicht mehr, denn ich hoffe nach wie vor, daß ich auch in der kommenden Zeit, wie einst in meiner schwersten Zeit, Menschen finde, die mir helfen. So hoffe ich auch fest, daß ich unbeschadet aller dieser Schwierigkeiten, sobald das Beamtengesetz kommt, als Beamter übernommen werde, wurde ich doch s.Zt. im Jahre 1943 zum beamteten a.o.Professor ernannt und gleichzeitig auf Lebenszeit ins Beamtenverhältnis berufen. Ich bin aber auch heute soweit, daß ich Sie, lieber Herr Hammer, um Hilfe anrufe: Wenn Sie so gut wären und an die betreffende Stelle in unserem Magistrat schrieben und für mich ein Wort einlegten, damit endlich meine Anerkennung als OdF am 14. Dezember 1953 erfolgte ein Senatsbeschluß und am 24. Dezember 1953 die Aushändigung der Ernennungsurkunde, derzufolge Mohr mit Wirkung vom 1. Dezember 1952 als ordentlicher Professor in das Beamtenverhältnis auf Lebenszeit übernommen wurde (bis dahin war er Angestellter gewesen). Daß dies überhaupt möglich war, scheint allerdings auch einem „Glücksfall" zu verdanken gewesen zu sein, denn Mohrs Verurteilung war nicht im Strafregister eingetragen (wohl aufgrund der Aussetzung der Gnadenentschließung). Mit einem Eintrag und ohne Aufhebung des Urteils wäre seine Verbeamtung gescheitert {TUB PA}.

Die eigentliche Wiedergutmachung stellte die Entschädigung dar. Bereits am 1. Februar 1952 hatte Mohr verschiedene Anträge gestellt. Die Entschädigung für Freiheitsentzug wurde am 8. Mai 1953 anerkannt, die Entschädigung für Schaden im beruflichen Fortkommen erst am 15. September 1959, der Schaden an Gesundheit schließlich am 8. Juli 1963 (die daraus resultierende Rente wurde rückwirkend ab dem 1. November 1953 bezahlt) {EBB}. Diese zum Teil extremen Verzögerungen waren jedoch nicht speziell gegen Mohr gerichtet, nach Auskunft eines Behördenleiters findet man fast in jedem Vorgang (berechtigte) Klagen über zu lange Bearbeitungszeiten.[22]

Letztendlich erfolgte noch ein wichtiger Schritt der ideellen Wiedergutmachung – die Aufhebung des Todesurteils. Am 3. Januar 1958 teilte der Senator für Inneres dem Berliner Kammergericht mit, daß Mohr für die anstehende Neuregelung seiner beamtenrechtlichen Stellung nach Artikel 131 Grundgesetz eine Aufhebung des Todesurteils benötige. Einen entsprechenden Antrag stellte Mohr am 3. Februar 1958 beim Landgericht Berlin, wohin die Angelegenheit verwiesen worden war. Auch damals konnte kein entsprechender Strafregistereintrag gefunden werden, Akten waren kaum greifbar, so daß einige Zeugenaussagen Gewicht erhielten. Erklärungen von Riediger, Mohrs früherem Rechtsanwalt, und Nikuradse wurden beigebracht; Riediger wurde sogar nach einer entsprechenden Verfügung in Nürnberg vernommen, vor allem zu der Frage, aus welchem Grund Mohr verurteilt worden war. Da die entsprechenden Aussagen, dazu noch eine Erklärung Rohrbachs, ziemlich dekkungsgleich die rein politischen Gründe für die Verurteilung verdeutlichten, erklärte die Generalstaatsanwaltschaft bei dem Landgericht Berlin am 30. Mai 1958, daß keine Einwände gegen die Urteilsaufhebung beständen. Der entsprechende Beschluß der 13. Strafkammer des Landgerichts Berlin datiert vom 19. Juni 1958. Denkwürdig ist ein dazugehöriges Postskript: „Da sich die der Verurteilung wegen Wehrkraftzersetzung zugrundeliegende Tat des Antragsstellers somit nachweislich nur gegen die nationalsozialistische Regierungsform, nicht dagegen gegen die Wehrkraft des deutschen Volkes im eigentlichen Sinne gerichtet hat, fiel sie mithin unter die eingangs erwähnte Vorschrift des §1 Abs. 1 WGG." {GbdL} Fast möchte man meinen, daß Mohr Glück hatte, daß die politische Komponente anerkannt wurde.[23] Übrigens machte Mohr keine Ansprüche nach Art. 131 GG geltend.

Die Wiedergutmachung war also abgeschlossen: Mohr hatte eine Beamtenstellung, er erhielt eine Entschädigungsrente, das Todesurteil war aufgehoben. Er redete nicht oder nur selten über das Vergangene. Aber war es wirklich vorbei? Am

[22] Zur (traurigen) Wiedergutmachungspraxis vgl. z. B. [Goschler, 149–160].
[23] Vgl. [Im Namen des Deutschen Volkes, 389ff.].

17. April 1961 schrieb er: *Obwohl diese Zeit nun schon über 16 Jahre zurückliegt, so kann ich sie nicht vergessen: regelmäßig werde ich von Angstträumen heimgesucht; es folgen dann Tage, an denen ich mich elend fühle, die Menschen meide und unfähig bin, Etwas zu leisten.* {EBB}

Seine Erinnerungen konnten ihm nicht mehr genommen werden. Ernst Mohr verstarb am 16. Mai 1989 in Berlin-Zehlendorf.

Unveröffentlichte Quellen

BAP NJ 13334: Bundesarchiv Potsdam: Akte NJ 13334.
BAP NJ 14078: Bundesarchiv Potsdam: Anklageschrift gegen Mohr.
BAP Z/C 14225: Bundesarchiv Potsdam: Urteil gegen Mohr.
BDC Boseck: Berlin Document Center (jetzt Bundesarchiv Außenstelle Zehlendorf): Research Wi Boseck.
BDC REM: Berlin Document Center: Personalakte Mohr des Reichsministeriums für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung.
BDC PK: Berlin Document Center: Parteikanzlei-Korrespondenz Mohr.
BDC VGH: Berlin Document Center: Volksgerichtshofurteil Mohr.
Bigalke, Hans-Günther: Telefonische Auskünfte an den Verfasser, Frühjahr 1994.
BKM: Bayerisches Kultusministerium: Akte 5b/81a5, o. Professor für Mathematik und Astronomie an der Universität Würzburg.
DMA: Deutsches Museum – Archive, Dokumentationen, Sondersammlungen: Nachlaß Sommerfeld: Schreiben Mohrs an Sommerfeld vom 6.12.1946.
EBB: Entschädigungsbehörde Berlin: Akte Mohr 17152.
Ebert, Hans: „Häftlingswissenschaftler" im Einsatz für die SS 1944/45. Manuskript in TUB HA.
GbdL: Generalstaatsanwalt bei dem Landgericht Berlin: Akte (513) 2 P Aufh. 8/58 (83/58).
IfZ: Institut für Zeitgeschichte, München: ED 106 Archiv Walter Hammer, Bd. 80, Schriftwechsel Hammer – Mohr.
Knobloch, Eberhard: Mathematik an der Technischen Hochschule/Technischen Universität 1799-1988. Unveröffentlichtes Manuskript.
Menzler-Trott, Eckart: Schreiben vom 17.11.1995 an den Verfasser.
Mohr, Ernst: Gutachten über Hans Rohrbach vom 14.5.1947. Im Privatbesitz des Verfassers.
Rohrbach, Hans: Schreiben vom 10.7.1992 an den Verfasser.
TUB HA: Technische Universität Berlin, Hochschularchiv: Nachlaß Hans Ebert.
TUB PA: Technische Universität Berlin, Personalarchiv: Personalakte Ernst Mohr, Bd. 1, 2.
UAG MI: Universitätsarchiv Göttingen: Bestand Mathematisches Institut, Personalia.
UAG Weber: Universitätsarchiv Göttingen: Kur.-Personalakte Werner Weber (früheres Az.: XVI.V.A.d. 102).

Veröffentlichte Quellen

Bigalke, Hans-Günther: Heinrich Heesch: Kristallgeometrie, Parkettierungen, Vierfarbenforschung. Basel 1988.
Dick, Auguste; Pinl, Maximilian: Kollegen in einer dunklen Zeit. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 75 (1973/74), S. 166-208.
Eisentraut, Martin: Vom Leben und Sterben des Zoologen Walther Arndt. In: Sitzungsberichte der Gesellschaft Naturforschender Freunde zu Berlin. Neue Folge, Band 26. Berlin 1986. S. 161-187.
Goschler, Constantin: Wiedergutmachung – Westdeutschland und die Verfolgten des Nationalsozialismus 1945-1954. München 1992.
Heiber, Helmut: Universität unterm Hakenkreuz. Teil I. München 1991.

Im Namen des Deutschen Volkes – Justiz und Nationalsozialismus. Hrsg. vom Bundesminister der Justiz. Köln 1989.

Kalf, Hubert: Ernst Mohrs Version der Weylschen Theorie der Sturm-Liouville-Operatoren. In: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1988-1992. Berlin o.D. S. 221-234.

Kater, Michael H.: Das „Ahnenerbe" der SS 1935-1945. Stuttgart 1974.

Knobloch, Eberhard: Mathematics at the Berlin TH/TU – Social, Institutional, and Scientific Aspects. In: The History of Modern Mathematics. Hrsg. von David E. Rowe und John McCleary. Vol. II: Institutions and Applications. Boston 1989. S. 251-284.

Kroeschell, Karl: Rechtsgeschichte Deutschlands im 20. Jahrhundert. Göttingen 1992.

Litten, Freddy: Ernst Mohr. In: Neue Deutsche Biographie. Bd. 17. Berlin 1994. S. 707-708.

Mathematica – Ad diem natalem septuagesimum quintum data – Festschrift Ernst Mohr zum 75. Geburtstag. Hrsg. vom Fachbereich 3 – Mathematik – der Technischen Universität Berlin. Berlin 1985.

Mehrtens, Herbert: Angewandte Mathematik und Anwendungen der Mathematik im nationalsozialistischen Deutschland. In: Geschichte und Gesellschaft 12 (1986), Heft 3, S. 317-347.

Mohr (1933), Ernst: Die Darstellung der Komplexgruppe und der Charakteristiken der irreduziblen unter diesen. Dissertation Universität Göttingen 1933.

Mohr (1941), Ernst: Über den gegenwärtigen Universitätsunterricht in der angewandten Mathematik. In: Deutsche Mathematik 6 (1941), S. 493-504.

Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939-1946. Bd. 1, 2, 3, 5, 10. Wiesbaden 1948 (Bd. 1, 2, 5) bzw. Weilheim 1953 (Bd. 3, 10).

Nitsche, Johannes C. C.: Zum Gedenken an Ernst Mohr – 1910-1989. In: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1988-1992. Berlin o.D. S. 209-220. (Darin auch ein Verzeichnis der Schriften Mohrs mit den dazugehörigen Referaten im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, im Zentralblatt und in den Mathematical Reviews).

Schappacher, Norbert: Das Mathematische Institut der Universität Göttingen 1929-1950. In: Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus. Hrsg. von Heinrich Becker, Hans-Joachim Dahms und Cornelia Wegeler. München 1987. S. 345-373.

Walter, Kurt: Astronomy in Poland during the Second World War. In: Journal of the British astronomical Association 97 (1987), Heft 5, S. 270-273.

Freddy Litten
Habsburgerstr. 8
80801 München
e-mail: F. S. Litten @lrz.uni-muenchen.de

(*Eingegangen 13. 7. 1995*)

Buchbesprechungen

Ebeling, W., Lattices and Codes, A Course Partially Based on Lectures by F. Hirzebruch, Braunschweig u. a.: Vieweg 1994, 178 S., Softc., DM 48,–

Die Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen wird heute meist in der Sprache der Gitter in Vektorräumen mit quadratischer Form behandelt. Man betrachtet also einen Vektorraum V der endlichen Dimension m über $\mathbf{Q}$ mit symmetrischer Bilinearform $B(x,y)$ und zugehöriger quadratischer Form $Q(x)=B(x,x)$ und darin ein $\mathbf{Z}$-Gitter L vom vollen Rang m mit $B(L,L)\subseteq\mathbf{Z}$. Die Gram-Matrizen $(B(e_i,e_j))$ des Gitters bezüglich beliebiger $\mathbf{Z}$-Basen $\{e_i\}$ bilden dann eine Äquivalenzklasse ganzzahliger symmetrischer Matrizen S unter der Operation $S\mapsto T^tST$ der Matrizen $T\in GL_n(\mathbf{Z})$, und zwei Gitter L und L' in Räumen (V,B) bzw. (V',B') liefern genau dann die gleiche Äquivalenzklasse, wenn L unter einer Isometrie von (V,B) auf (V',B') auf L' abgebildet wird.

Ein Großteil der grundlegenden Fragen der Theorie ist heute gut verstanden. Zu nennen sind hier vor allem die Arbeiten von Hermite, Minkowski und Siegel zur Reduktionstheorie und zur Maßtheorie der Einheitengruppen, ferner die Untersuchung der Arithmetik der p-adischen Komplettierungen der Gitter und der adelischen Theorie der orthogonalen Gruppen durch Eichler, Kneser und O'Meara und schließlich der Aufbau der analytischen Theorie und der Verbindungen zur Theorie der Modulformen durch Hecke, Siegel, Eichler und Weil. Das in der letzten Zeit wieder stark anwachsende Interesse an der Theorie der Gitter bezieht sich denn auch zu einem erheblichen Teil auf die (vorübergehend mehr im Hintergrund gewesenen) Fragen der expliziten Klassifikation und der expliziten Konstruktion und Untersuchung von Gittern mit speziellen Eigenschaften, insbesondere für den Fall positiv definitiver quadratischer Form. (Auf die ebenfalls sehr aktuelle Fortentwicklung der analytischen Theorie im Rahmen der Theorie der Thetakorrespondenz und der dualen reduktiven Paare soll in dieser Besprechung nicht eingegangen werden.)

Das 1988 erschienene Buch „Sphere packings, Lattices and Groups" von Conway und Sloane [C-S] (2. Auflage 1993) spricht in einer Sammlung von Originalarbeiten, Übersichtsartikeln und speziell für das Buch verfaßten Beiträgen die wichtigsten Themen an: Das Problem der Konstruktion möglichst dichter gitterförmiger Kugelpackungen (und damit verwandte Probleme), die Realisierung endlicher Gruppen als Einheitengruppen (d. h. Isometriegruppen) von Gittern und die Verbindung beider Fragen zur algebraischen Kodierungstheorie über die Konstruktion von Gittern mit Hilfe von Codes über endlichen Körpern.

Das vorliegende Buch von Ebeling bietet, basierend auf Vorlesungen des Verfassers und von F. Hirzebruch, eine gut lesbare Einführung in den letztgenannten Themenkreis, zu dem es bisher keine lehrbuchmäßige Darstellung gab (das Thema der Konstruktion von Kugelpackungen wird nur am Rande gestreift). Es geht dabei um folgendes einfache Prinzip: Ist $L\subseteq V$ wie oben ein ganzzahliges Gitter (d. h. $B(L,L)\subseteq\mathbf{Z}$), so ist das Dualgitter $L^\#=\{x\in V|B(x,L)\subseteq\mathbf{Z}\}$ ein Obergitter von L und man kann die Diskriminantengruppe $\Delta(L):=L^\#/L$ betrachten. Wir nehmen $Q(L)\subseteq 2\mathbf{Z}$ an (das Gitter L heißt dann gerade) und haben mit $2N^{-1}\mathbf{Z}=Q(L^\#)\mathbf{Z}$ auf $\Delta(L)$ eine quadratische Form $q=\overline{(NQ)/2}$ mit Werten in $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ und eine zugehörige symmetrische Bilinearform $b(x,y)=q(x+y)-q(x)-q(y)$; da $NL^\#\subseteq L$ gilt, können wir $\Delta(L)$ auch als Modul über $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ auffassen. Die ganzzahligen Obergitter von L stehen dann in Bijektion zu den Untergruppen H von $\Delta(L)$, für die $b(H,H)=0$ gilt, gerade Gitter erhält man, falls auch noch $q(H)=0$ erfüllt ist.

Speziell betrachtet man meist den Fall, daß $N=p$ eine Primzahl ist und daß bei geeigneter Koordinatenwahl die induzierte Bilinearform b auf $\Delta(L)$ die Standardbilinearform $\sum x_iy_i$ ist; dann sind die oben betrachteten Untergruppen von $\Delta(L)$ genau die Codes im

$\mathbf{F}_p^n$ (wo $n = \dim_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \Delta(L)$ ist), die in ihrem Dualcode enthalten sind (und zusätzlich doppelt gerade sind). Schon in dieser Grundversion erhält man so eine Reihe hübscher Konstruktionen. Der Fall, daß (L, Q) das Würfelgitter ist $(B(e_i, e_j) = 2\delta_{ij})$ liefert etwa die bei Sloane „Konstruktion A" genannte Methode, zu einem selbstdualen Code C über $\mathbf{F}_2$ ein unimodulares (d. h. selbstduales) Gitter L_C zu konstruieren. Einfallsreiche Varianten findet man etwa in [Qu, C-S, Ch. 8].

Das Buch von Ebeling beginnt in Kapitel 1 mit einer Zusammenstellung der Grundbegriffe sowohl der Gittertheorie als auch der algebraischen Kodierungstheorie und stellt mit der bekannten Klassifikation der Wurzelgitter aus der Theorie der einfachen Lie-Algebren den üblichen Vorrat von Standardgittern zu Verfügung. Kapitel 2 wendet sich dem zweiten Hauptthema des Buches zu: der Thetareihe $\sum_{x \in L} \exp(\pi i Q(x) z)$ des positiv definiten Gitters (L, Q). Die Grundbegriffe der Theorie der Modulformen zur vollen Modulgruppe $SL_2(\mathbf{Z})$ werden in Anlehnung an Serres „Cours d'arithmétique" eingeführt und mittels der Poissonschen Summenformel gezeigt, daß die Thetareihe eines geraden unimodularen Gitters eine solche Modulform ist. Das Analogon der Thetareihe für Codes $C \subseteq \mathbf{F}_2^n$ ist das Gewichtepolynom (weight enumerator) $W_C(X, Y) = \sum_{i=0}^n A_i X^i Y^{n-i}$, wo A_i die Anzahl der $c \in C$ ist, die genau i Einsen enthalten. Im Fall des oben erwähnten Gitters L_C wird gezeigt, daß man die Thetareihe von L_C erhält, indem man in W_C die Thetanullwerte $\vartheta_{00} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 z)$ und $\vartheta_{10} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 z\right)$ einsetzt. Mittels der bereits gezeigten Ergebnisse über Modulformen und Thetareihen gewinnt man dann die MacWilliams-Identität für Gewichtepolynome selbstdualer Codes über $\mathbf{F}_2$ und den Satz von Gleason über die Struktur des Ringes der Gewichtepolynome doppelt gerader selbstdualer Codes über $\mathbf{F}_2$, Ergebnisse, die man natürlich auch direkt durch diskrete Fourieranalysis erhalten kann. Eine Reihe von Beispielen (u. a. quadratische Restcodes, Golay-Code, Steiner-Systeme und Konstruktion des Leech-Gitters) rundet dieses Kapitel ab. In Kapitel 3 wird die Transformationsformel der Thetareihen mit harmonischen Polynomen von ganzzahligen Gittern beliebiger Stufe bewiesen (obgleich hier im weiteren eigentlich nur der viel einfachere Fall gerader unimodularer Gitter benötigt wird). Anschließend wird der von B. B. Venkov stammende Beweis für die Richtigkeit der Niemeierschen Klassifikation der geraden unimodularen Gitter in Dimension 24 mit Hilfe der Thetareihen mit harmonischen Polynomen vom Grad 2 teilweise ausgeführt. Als Vorbereitung hierfür werden (in Anlehnung an Arbeiten von Koch und Venkov) die oben skizzierten Beziehungen zwischen den Obergittern eines festen ganzzahligen Gitters und Untergruppen der Diskriminantengruppe im Falle von Wurzelgittern ausführlich diskutiert und in Beziehung gesetzt zu analogen Ergebnissen für Codes über $\mathbf{F}_2$, die von H. Koch stammen. Etwas irritierend ist hier allerdings die Definition, zwei Obergitter Γ, Γ' eines Gitters Λ isomorph zu nennen, wenn sie durch eine Λ in sich überführende Isometrie ineinander übergehen. Insbesondere wird dadurch nicht deutlich, worin die Schwierigkeit bei dem (dem Leser als Übung überlassenen) Beweis des Theorems 3.3 liegt, in dem es um Isomorphie ohne diese Zusatzbedingung geht. Kapitel 4 ist einer ausführlichen Untersuchung des Leech-Gitters (das bis auf Isometrie eindeutig bestimmte gerade unimodulare Gitter in Dimension 24 ohne Vektoren x mit $B(x, x) = 2$) gewidmet. Insbesondere wird die Methode von Borcherds zur Untersuchung des Überdeckungsradius (covering radius) und der sogenannten deep holes des Leech-Gitters mit Hilfe der Einbettung in ein 26-dimensionales Gitter der Signatur (25,1) (der hyperbolischen Einbettung) durchgeführt. Kapitel 5 schließlich kehrt wieder zurück zum Thema des Zusammenhangs zwischen Codes, Gittern und Thetareihen. Man geht hier aus von dem Primideal $\mathfrak{P}$ über p im Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{O}$ des Kreisteilungskörpers $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ mit der Bilinearform $Tr(x\bar{y})/p$. Die Diskriminantengruppe hiervon ist $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, und man kann gemäß dem eingangs diskutierten Prinzip Obergitter von

$\mathfrak{P}^n$ in Beziehung setzen zu Codes im $\mathbf{F}_p^n$. Die hierfür eigentlich schon in Kapitel 3 etablierten allgemeinen Prinzipien werden im konkreten Fall erneut hergeleitet. Neu ist, daß man die

hat, wo $\mathfrak{O}^+$ der Ring der ganzen Zahlen im total reellen Teilkörper von $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ ist. Als solche haben sie Thetareihen, die Hilbertsche Modulformen sind. Für diese wird der Satz von Hirzebruch und van der Geer gezeigt, nach dem man hier ähnlich wie in Kapitel 2 einen Zusammenhang zwischen dem vollständigen Gewichtepolynom (Lee weight enumerator) des Codes und der Thetareihe des Gitters hat. In den Spezialfällen $p=5$ und $p=3$ kommt man dadurch mittels der Kenntnisse, die man über den Ring der Modulformen hat (wieder ähnlich wie in Kapitel 2) zu hübschen Beweisen von Sätzen über die Gewichtepolynome von selbstdualen Codes über $\mathbf{F}_p$.

Das Buch gibt eine empfehlenswerte erste Einführung in das Thema. Die Stoffauswahl ist dabei deutlich von der Entstehung aus Vorlesungen beeinflußt. Für ein reines Lehrbuch hätte man wohl darauf verzichtet, in anderen Lehrbüchern gut nachlesbare Beweise zu wiederholen (wie hier etwa die Theorie der Wurzelsysteme und die Transformationsformel der Thetareihen) und dafür vielleicht bei weiterführenden Themen versucht, mehr Vollständigkeit zu erreichen. Daß der Autor von dem ursprünglichen Vorlesungskonzept nicht abgewichen ist, mag so zwar gewisse formale Mängel mit sich bringen, erhält aber andererseits die Lebendigkeit der zugrundeliegenden Vorlesungen und führt den Leser mit einem Minimum an Vorkenntnissen in eine interessante Theorie und ihre Verbindungen zu anderen Gebieten ein.

[C-S] Conway, J. H.; Sloane, N. J. A.: Sphere packings, lattices and groups. Grundlehren d. math. Wiss. 290, Springer 1988

[Qu] Quebbemann, H.-G.: A construction of integral lattices. Mathematika **31** (1984) 137–140

Saarbrücken R. Schulze-Pillot

Fulton, W., Introduction to Toric Varieties (Annals of Math. Studies 131), Princeton University Press 1993, 157 S., pb. DM 60,–

Kapitel 1 enthält die Grundlagen über konvex polyedrische Kegel sowie die Definition von Torus-Varietäten. Kapitel 2 gibt Kriterien für Kompaktheit und Nichtsingularität, Singularitäten werden untersucht und aufgelöst. Kapitel 3 behandelt die Operation des zugrundeliegenden algebraischen Torus, die den Varietäten den Namen gibt, führt Divisoren und Geradenbündel ein und berechnet deren Kohomologie. Kapitel 4 führt die Momentenabbildung und das Tangentialbündel ein. Die Serre-Dualität wird bewiesen und die Betti-Zahlen ausgerechnet. In Kapitel 5 wird Schnittheorie betrieben und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch bewiesen. Schließlich enthält Kapitel 5 eine Reihe von Anwendungen für die konvexe Geometrie. Um nur zwei Beispiele zu geben: Die Alexandrov-Fenchel-Ungleichung ist eine einfache Folgerung des Hodge-Index-Satzes und Stanleys Satz über die Charakterisierung von Zahlenfolgen $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$, die als Anzahlen von Ecken, Kanten, ..., $(n-1)$-Seiten von n-dimensionalen konvexen simplizialen Polytopen vorkommen, ergibt sich aus einfachen kohomologischen Ergebnissen der zugehörigen Torus-Varietät.

Der Stil ist derselbe wie in allen Büchern Fultons: Es wird weniger Wert gelegt auf Vollständigkeit der Beweise und größtmögliche Allgemeinheit als darauf, die Ergebnisse zu erklären und die wesentlichen Beweisideen herauszuarbeiten. Überdies enthält das Buch eine Fülle von Beispielen, die meisten von ihnen in Form von Exercises, wobei die schwierigeren mit Hinweisen versehen sind. Es gibt bemerkenswert wenig Druckfehler. Einen möchte ich als Erlanger allerdings nicht verschweigen: Paul Gordan wurde amerikanisiert, sein Lemma über die endliche Erzeugung der Halbgruppe der ganzzahligen Punkte eines rationalen konvexen polyedrischen Kegels heißt hier Gordons Lemma.

Das Buch kann uneingeschränkt als Einführung in die Torus-Varietäten nebst Anwendungen oder auch in weitestem Sinne in die Algebraische Geometrie empfohlen werden. Nicht zuletzt wegen der vielen Beispiele und Übungsaufgaben eignet es sich hervorragend als Vorlage für ein Seminar (Das habe ich ausprobiert und zwar mit Studenten des 5ten und 6ten Semesters).

Erlangen H. Lange

Kostrikin, A. L., Shafarevich, I. R. (Eds.) **Algebra IV, Infinite Groups. Linear Groups,** with contributions by A. Yu. Ol'shanskij, A. L. Shmel'kin, A. E. Zalesskij, übersetzt aus dem Russischem von J. Wiegold (Enzyclopaedia of Mathematical Sciences 37), Berlin u. a.: Springer 1993, 203 S., DM 144,–

This volume is a composite of two short books by different authors. Approximately half the book is on Linear Groups and is by A. E. Zalesskij. I found this attractively and informatively written. It is not easy to write at this level, being all to easy to fall between two stools, to bore the expert while failing to inform the novice. The author has a sure touch for the amount of explanation to put in and to leave out. The sections, where I am not expert, I found informative and comprehensible, while those where I am expert, I still found pleasure in reading. As one would expect the author has a wider knowledge of the Russian literature than that of the West. Although on occasion this might be galling to the western expert, over all this probably makes the whole exercise more useful to the western reader, since our knowledge of the Russian literature can also leave something to be desired. It was a bit of a fidget that works refered to in the text often do not appear in the references at the end, although I accept that a complete list would have been unreasonably long. Another, very minor, criticism is that it seems in places to read like an elderly out-of-date account that has been spiced up with the insertion of more recent material. We consider the detailed contents later in this review.

The remainder of the volume, entitled Infinite Groups and by A. Yu. Ol'shanskij and A. L. Shmel'kin, is again split into two quite separate parts. The first has the title Combinatorial Group Theory. This is also excellently written and great fun to read, with technical explanation kept to a minimum but still with enough to carry the uninitiated along; a very difficult thing to do as anyone who has tried will know.

The second part, a mere fifty pages is devoted to all the rest of infinite group theory. The authors here have clearly set themselves an impossible task and, I am afraid, in my view, fail badly. These very brief potted summaries of small parts of very large sections of mathematics will not give any feel for the areas even to the semi-expert and will be quite unhelpful for the uninitiated. The difference with the other parts of the book is very marked. In a sense I think there is a failure here on the part of the editors. It should be their responsibility to divide the mathematical sciences into sensible and even volume-size pieces and present their authors with an achivable goal. This here they have not done. For example one page is devoted to polycyclic groups (this section is actually one of the best and is attractively and informatively put), nearly 10 pages to abelian groups, while 36 pages (more if one counts in some parts of Section I, Chapter 2) are also related to combinatorial group theory. Moreover a later volume of the Encyclopaedia (Algebra VII), called Combinatorial Group Theory; Applications to Geometry, must contain much of the same type of material. By any reasonable measure this is surely wildly out of balance. The introductions to the two parts of Infinite Groups seem very pompus, at least to this English reader, who is more used to a lower key style. Also the introducton to Chapter 2 on Infinite Groups puts forward a philosophy of group theory that is certainly alien to me and I suspect to many working group theorists. However it is good sometimes to be forced to rethink the basis of ones attitude to mathematics, even if one comes to the conclusion that one was right to begin with.

We now give a more technical summary of the volume's contents. The section on combinatorial group theory kicks off with free groups and moves rapidly on to subgroups of free groups, Schreier transversals, Nielsen's method, defining relations, presentations of groups, free products, free products with amalgamation, HNN-extensions, bipolar structures, groups acting on trees, finitely presented groups, one-relator groups, small cancellation groups, the geometric interpretation of cancellation in terms of diagrams (built from vertices, edges and, coming from the defining relations, 2-cells, Novikov and Adian's work on the Burnside problem (the completions of the solution to both the general and the restricted Burnside problems are too recent to be included), Ol'shanskij's work on Tarski monsters and related groups, algorithmic problems for groups and finally growth functions of groups and the work of Gromov in particular.

The second chapter of the section on Infinite Groups runs rapidly through the following with, on average, some 10 pages on each, abelian groups, group extensions and homological questions, soluble groups, nilpotent groups and finally periodic groups.

The section on Linear Groups covers the following topics in three chapters. The first starts with many explicit examples of linear groups and is excellent reading for the beginner; then comes linear group constructions, viz. direct sums, tensor products and many other types, then the classical groups are introduced, symplectic, orthogonal and unitary, then linear groups over evaluated fields, the Zariski topology and finally algebraic groups. Chapter 2 is called "The Machinery of Linear Group Theory". It starts at the beginning with irreducibility, indecomposability, primitivity and Clifford's theorem and goes on to topological methods, algebraic group methods and residual methods (effectively making use of the theory of commutative finitely generated domains).

Chapter 3 is satisfactorily summarized by its title "A sketch of the Contemporary State of the Theory of Linear Groups". It sweeps over a very wide field very briefly and touches in particular on maximal subgroups of linear groups, finite linear groups, linear groups over the integers and similar ground rings, skew linear groups (i. e. matrix groups over potentially non-commutative division rings) and finally, and in passing, finitary groups and semi-linear groups (where the "linear" maps are twisted by automorphisms of the ground ring).

The translation seems generally to be good and I suspect retains some of the feel of the Russian original. A small point: it is a pity that the Russian PH is translated as RN and not the usual SN (the S here stands for soluble and the N for normal; a knowledge of the Russian for these words will explain the PH). The same comment applies to the use of RI in place of the more usual SI.

The above, of course is a very personal impression of this book. Overall I greatly enjoyed reading it and I feel the efforts of the three authors (and of the translator) were well worthwhile.

London B. Wehrfritz

Gruber, P. M., Wills, J. M., (Herausgeber), **Handbook of Convex Geometry** – Vol. A und Vol. B, Amsterdam: North Holland 1993, 816 und 780 S., Dfl 295 und 285, zusammen Dfl 540

Das Vorwort zu diesen beiden gewichtigen Bänden beschreibt das Hauptziel: *„One aim of this handbook is to survey convex geometry, its many ramifications and its relations with other areas of mathematics. We believe that it will be a useful tool for the expert."* Diesem Ziel wird das vorliegende Handbuch in hervorragender Weise gerecht.

Das Vorwort fährt fort: *„A second aim is to give a high level introduction to most branches of convexity and its applications, showing the major ideas, methods and results."* Ich behaupte, daß dies ganz einfach unmöglich ist – wenn man seinen Begriff von „Introduction" nicht so eng faßt, daß man mit einer Skizze der wesentlichen Fragestellungen, einer Skizze der hauptsächlichen Methoden, und den entsprechenden Literaturhinweisen zufrieden ist – denn zu ausgeführten Beispielen oder zur Demonstration der Methoden „am lebenden Objekt" fehlt schließlich doch der Platz.

Denn eines wird auf den rund 1600 Seiten deutlich: die Konvexgeometrie ist ein weites Feld, mit vielen Seitenwegen und Verbindungen; jede halbwegs vollständige Übersicht muß trotz „Mut zur Lücke" ziemlich umfangreich ausfallen. Konvexgeometrie als mathematische Disziplin schließt eben auch die Geometrie der Zahlen mit ein, die Differentialgeometrie konvexer Flächen, analytische Hilfsmittel, Geometrie der Banachräume, diskrete Geometrie und Geometrie der Polytope, lineare und konvexe Optimierung, und vieles mehr.

Eine Übersicht über das Gebiet, von den historischen Entwicklungslinien her gesehen, liefert das Eingangskapitel „History of Convexity" von P. Gruber. Leider vermißt man dort das unabdingbare Literaturverzeichnis, und (wie auch in anderen Kapiteln) die Querverweise in die anderen Kapitel: mit den nötigen „Zeigern" hätte man viel besser die Funktion eines Einstiegskapitels erfüllen können.

Im vorliegenden Handbuch wird das weite Feld der Konvexgeometrie in fünf große

In beiden Bänden findet man das Autoren- und Stichwortverzeichnis für beide Bände. Diese Verzeichnisse (von entscheidender Bedeutung für die Brauchbarkeit eines solchen Werkes!) scheinen weitgehend sorgfältig gearbeitet, wenn auch nicht perfekt. Dasselbe gilt auch für die Literaturverzeichnisse der einzelnen Kapitel.

Die vergleichsweise relativ kurze Entstehungszeit („nur wenige Jahre“) garantiert, daß das Handbuch für eine Weile wirklich den „Stand der Technik“ darstellen kann. Es wäre natürlich schön, wenn sich die Aktualität irgendwie halten ließe. Dafür böte es sich hier an (statt der Produktion von Loseblattsammlungen, wie sie wohl juristische Fachverlage zum Geldverdienen erfunden haben) regelmäßige Ergänzungen elektronisch am Netz abzulegen. Dies könnte sich auch in Bezug auf Fortschritte zu den zentralen und interessanten Forschungsproblemen bewähren, die in einigen der Kapitel angeboten werden.

Die einzelnen Kapitel des Handbuches decken weite Bereiche der Konvexgeometrie und angrenzender Gebiete ab, wobei die Aufteilung in Einzelthemen, und somit auch die vereinzelten Lücken im Themenangebot, sich stark den Autoren anpassen. Das Handbook ist eben durchaus kein reines Nachschlagewerk. Die Stile der Einzelkapitel sind höchst

lich zeichnen (alle Fachleute auf ihrem Gebiet, ein großer Teil aus dem deutschen Sprachraum). So findet man recht trockene Übersichten wie auch lebendige Skizzen, Hauptergebnisse wie Hilfsmittel, auch Beweisskizzen und Beispiele, und immer eine große Fülle an Information, und Hinweise auf mehr. *(„The manuscripts which we finally received turned out to be much more diverse than we had anticipated. They clearly exhibit the most different characters and scientific styles of the authors and this should make the volume even more attractive“.)*

Mathematisierung und Problemlösung an diesen Objekten zu üben. Die Autoren sprechen propädeutisch eine ganze Reihe von geometrischen und algebraischen Konzepten der niederdimensionalen Topologie an, können aber Beweise immer nur da anbieten, wo es „leicht geht". Darin liegt eine gewisse Problematik, insbesondere für die Verwendung des Buches im deutschen Universitätsbetrieb, denn es ist ausdrücklich für „undergraduates" gemacht. Sicherlich ließen sich Proseminare über solche Themen neben den kanonischen Anfängerkursen mit Gewinn für die Studenten durchführen; die Freiräume dafür sind aber meist nicht vorhanden. Den Ansprüchen höherer Semester ist die Darstellung nicht gewachsen.

Zum Inhalt: Im ersten Kapitel werden Knotendiagramme und Reidemeister-Prozesse eingeführt, dazu Beispielmaterial. Im zweiten findet man eine Begründung des Jones-(Kauffman-) Polynoms; das Homfly-Polynom wird mit einigen seiner Eigenschaften besprochen – seine Existenz kann in diesem Rahmen nicht bewiesen werden. Die auf Alexander zurückgehende kombinatorische Definition seines Polynoms wird nur skizziert. Es folgt im dritten Kapitel eine kurze Einführung in Begriffe der Allgemeinen Topologie, um das Knotenproblem in seiner eigentlichen dreidimensionalen Qualität einordnen zu können. Die Klassifikation der kompakten Flächen wird im folgenden Kapitel durchgeführt und im fünften werden Geschlecht, Summe, Brückenzahl von Knoten besprochen, meist ohne Beweise der zugehörigen Sätze. Die Kapitel 6, 8, 9, 10 behandeln Gruppenpräsentationen, den Foxschen Differentialkalkül sowie die Fundamentalgruppe mit dem van-Kampen-Theorem. Ausführlicher und auch tiefer gehend wurden dieselben Themen in Crowell und Fox' Buch „Introduction to Knot Theory" dargestellt. Das Buch schließt mit ein wenig Überlagerungstheorie – wobei wieder kritische Stellen umschifft werden, z. B. wird die Existenz einer universellen Überlagerung angenommen.

Als Anstoß und Anregung mag das Buch gute Dienste leisten.

Frankfurt/M G. Burde

Enock, M., Schwartz, J.-M., Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups, with a preface by A. Cones, with an afterword by A. Ocneau, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 257 S., DM 158,–

Die Frage nach einer eleganten und gut formulierbaren Dualitätstheorie für lokalkompakte topologische Gruppen hat Mathematiker immer wieder beschäftigt, nachdem L. S. Pontrjagin die Dualitätstheorie abelscher lokal-kompakter topologischer Gruppen topologisch und wenig später D. A. Raikow diese Theorie analytisch beschrieben hatte. Die von G. I. Kac (dies ist nicht der durch seine Arbeiten über unendlichdimensionale Lie-Algebren und Lie-Superalgebren sehr viel bekanntere V. G. Kac) Anfang der sechziger Jahre in diesem Zusammenhang eingeführten Ringgruppen, heute Kac-Algebren genannt, haben sich als ein sehr geeignetes Mittel zur Formulierung einer analytischen Dualitätstheorie erwiesen, die die Dualitätstheorie lokal-kompakter topologischer Gruppen einschließt suchungen zu Quantengruppen haben in jüngster Zeit für die algebraische Theorie der nicht kommutativen und nicht cokommutativen Hopf Algebren großes Interesse geweckt. S. L. Woronowicz hat hier die C^*-Struktur als analytisches Element zusätzlich eingeführt und betrachtet. So können gerade die Strukturaussagen zu Kac-Algebren, wie sie in dem vorliegenden Buch behandelt werden, wichtige Grundvorstellungen und neue Gesichtspunkte für eine Theorie der C^*-Quantengruppen liefern, auch wenn sie, wie A. Connes in seinem Vorwort bemerkt, noch nicht hinreichend „nicht unimodular" sind. Untersuchungen zur Thematik der Quantengruppen sind im Literaturverzeichnis weitgehend berücksichtigt.

Kac-Algebren sind co-involutive Hopf-von-Neumann-Algebren, die ein linksinvariantes Gewicht besitzen. Es handelt sich um eine Kategrorie in verschiedener Beziehung reich strukturierter komplexer Algebren; um Hopf-Algebren, genauer Hopf-Algebren mit Integral, im Sinne von M. Sweedler, in diesem Buch Gewicht genannt, die gleichzeitig C^*- bzw. W^*-Algebren sind, wobei Involution, Coprodukt und Antipode gewissen Verträglichkeitsbedingungen genügen. Eine ausreichende Kenntnis der Theorie der C^*- und W^*-Algebren, wie der Grundlagen der Theorie der Hopf-Algebren ist nach Ansicht des Referenten eine notwendige Voraussetzung für das Verständnis des sehr präzise aber mitunter knapp geschriebenen Textes.

Das Standardbeispiel einer Kac-Algebra ist die Algebra $L^\infty(G)$ der Klassen mit Bezug auf ein linksinvariantes Haar-Maß meßbarer, wesentlich beschränkter, komplexwertiger Funktionen auf einer lokal-kompakten topologischen Gruppe G mit der Algebra $L^1(G)$ der Klassen summierbarer Funktionen als präduale Algebra, wobei das Coprodukt und die Coinvolution in $L^\infty(G)$ durch Dualisieren aus dem Produkt bzw. der Involution in $L^1(G)$ erklärt sind. Diese Kac-Algebra $\mathbb{K}_a(G)$ ist kommutativ, hier abelsch genannt.

Die beiden ersten Kapitel des Buches haben vorbereitenden Charakter. Es werden notwendige Definitionen sowie Ergebnisse über Hopf-Algebren, über C^*- und W^*-Algebren zusammen- und bereitgestellt, erste Sätze über Hopf-von Neumann-Algebren, über Gewichte und Kac-Algebren werden bewiesen. Der zentrale Teil für die Dualitätstheorie sind die Kapitel 3 und 4, in denen die dualen Algebren definiert und beschrieben und die Dualitätssätze bewiesen werden. Die zur kommutativen Kac-Algebra $\mathbb{K}_a(G)$ duale ist die Kac-Algebra $\mathbb{K}_s(G)$, sie besteht aus der von der linken regulären Darstellung erzeugten von Neumann-Algebra versehen mit einem Coprodukt einer Antipode und einem Gewicht, die durch geeignete Bindung an die linke reguläre Darstellung wohlbestimmt sind. Die Kac-Algebra $\mathbb{K}_s(G)$ ist cokommutativ, hier symmetrisch genannt.

Die letzten beiden Kapitel sind kategoriellen Aspekten sowie speziellen Klassen von Kac-Algebren gewidmet. Das ausführliche Inhaltsverzeichnis gibt einen guten Einblick in den Aufbau des Buches und die abgehandelten Probleme: Introduction, Chapter 1. Coof the Representations and Wendel's Theorem, 4.6 Heisenberg's Pairing Operator, 4.7 A Tatsuuma Type Theorem for Kac Algebra, Chapter 5. The Category of Kac Algebras, 5.1 Kac Algebra Morphisms, 5.2 H-Morphisms of Kac Algebras, 5.3 Strict H-Morphisms, 5.4 Preliminaries About Jordan Homomorphisms, 5.5 Isometries of the Preduals of Kac Algebras, 5.6 Isometries of Fourier-Stieltjes Algebras, Chapter 6. Special Cases: Unimodular, Compact, Discrete and Finite-Dimensional Kac Algebras, 6.1 Unimodular Kac Algebras, 6.2 Compact Type Kac Algebras, 6.3 Discrete Type Kac Algebras, 6.4 Krein's Duality Theorem, 6.5 Characterisation of Compact Type Kac Algebras, 6.6 Finite Dimensional Kac Algebras, Postface, Bibliography, Index.

Greifswald H. Boseck

Connes, A., Noncommutative Geometry, San Diego: Academic Press 1994, 661 S., $ 59.95

Das vorliegende Buch nimmt unter den Neuerscheinungen im Bereich der Mathematik eine Sonderstellung ein. Alain Connes, einer der bemerkenswertesten Mathematiker der neueren Zeit, unternimmt hier einerseits eine Darstellung und Erläuterung seines Werkes. Andererseits und gleichzeitig gibt er einen faszinierenden Überblick über die nichtkommutative Geometrie, die großenteils von seinen Ideen geprägt ist, mit einer Fülle von neuen Einsichten, Anregungen und Perspektiven. Das Buch beruht zwar ursprünglich auf einer Übersetzung des französischen „Géometrie non commutative", das seinerseits auf einer Zusammenfassung mehrerer Übersichtsartikel von Connes basierte, hat aber damit letzten Endes nur wenig gemein. Die interessantesten Teile sind die, die neu hinzugekommen sind, und die ursprünglichen Teile sind vollständig überarbeitet. Es liegt ein ganz neues und in sich geschlossenes Werk vor.

Die nichtkommutative Geometrie hat sich in natürlicher Weise aus der Theorie der Operatoralgebren heraus entwickelt. Schon in den 30er Jahren begannen Murray und von Neumann das Studium von Algebren von Operatoren auf einem Hilbertraum, die unter der Bildung des Adjungierten eines Operators invariant und außerdem abgeschlossen in der starken Operatortopologie sind (diese Algebren werden jetzt als von Neumann Algebren bezeichnet). Motiviert waren diese Arbeiten durch von Neumanns Untersuchungen zur Struktur der Quantenmechanik. Für von Neumann repräsentierten die Elemente dieser Algebren Funktionen nichtkommutierender Variablen und führten zu einer neuen Art von Geometrie („continuous geometry").

Die nächste wichtige Etappe wird in den 40er Jahren erreicht in Arbeiten von Gelfand-Neumark und I. Segal, die zu einer algebraischen Charakterisierung normabgeschlossener involutiver Algebren von Operatoren auf einem Hilbertraum (C^*-Algebren) führen und zeigen, daß nichtkommutative C^*-Algebren gerade die kanonischen nichtkommutativen Verallgemeinerungen der Algebren von stetigen Funktionen auf lokalkompakten Räumen sind. Auch hier standen wieder Untersuchungen zur Struktur der Quantenmechanik, wenigstens teilweise, Pate. Nach einer längeren Phase mit Anwendungen eher technischer Natur, z. B. in der abstrakten Theorie der unitären Darstellungen lokalkompakter Gruppen, erhielt das Gebiet Ende der 60er Jahre einen wichtigen Impuls durch die Tomita-Takesaki-Theorie. Diese ganz neue Methode führte dann auch zu der Klassifikation der amenablen von-Neumann-Algebren durch Connes. Damit kommen wir zum Inhalt des Buches.

Als Beispiele von (in der kommutativen Theorie pathologischen) Räumen, deren Topologie und Geometrie mit den Methoden der nichtkommutativen Geometrie untersucht werden können, gibt der Autor in der Einleitung an:

der Raum aller Penrosepflasterungen
der Raum der Blätter einer geblätterten Mannigfaltigkeit
der Raum der irreduziblen Darstellungen einer diskreten Gruppe
der Phasenraum in der Quantemechanik
die Brillouinzone im Quanten-Hall-Effekt
die Raum-Zeit

Dies sind natürlich Beispiele, die noch relativ nahe bei gewöhnlichen klassischen Räumen liegen. Der neue Begriff eines nichtkommutativen Raums (d. h. eine nichtkommutative Algebra, meistens spezieller eine C^*-Algebra) ist in Wirklichkeit viel allgemeiner und flexibler. Wie im klassischen Fall können die folgenden Strukturen und Eigenschaften von Räumen untersucht werden:

Maßtheorie
Invarianten der algebraischen Topologie
Differentialgeometrische Strukturen und Invarianten

Ganz grob gesprochen wird die klassische Maßtheorie durch die Theorie der von-Neumann-Algebren verallgemeinert. Die Basis für die Untersuchung der Topologie nichtkommutativer Räume ist in erster Linie die K-Theorie von C^*-Algebren und ihre von Kasparov und anderen entwickelte bivariante Form in verschiedenen Versionen (wie etwa die neuere E-Theorie von Connes-Higson). Auf differentialgeometrische Strukturen auf nichtkommutativen Algebren werden wir noch zu sprechen kommen.

Ein Ausgangspunkt für die Entwicklung und Anwendung vieler Methoden der nichtkommutativen Geometrie war die Indextheorie. Selbst die nichtkommutative Maßtheorie kann bei Indexfragen eine wichtige Rolle spielen. Will man als Index eines (verallgemeinerten) Fredholmoperators (reelle) Zahlen erhalten, so ist die gut ausgearbeitete Theorie der von-Neumann-Algebren ein wichtiges Hilfsmittel (dies hängt eng mit dem Begriff der reellwertigen Dimension bestimmter Hilberträume nach Murray-von-Neumann zusammen). Der mit Begriffen der nichtkommutativen Maßtheorie formulierte Indexsatz für longitudinal elliptische Operatoren auf geblätterten Mannigfaltigkeiten war ein Ansatzpunkt für Connes auf diesem Gebiet.

Die K-theoretische Formulierung dieses und vieler weiterer ähnlicher Indexsätze benutzt dann natürlich die K- und KK-Theorie für nichtkommutative C^*-Algebren. Die im klassischen Fall wohlbekannte kohomologische Formulierung des Indexsatzes führt auf die Frage nach einer Version der de-Rham-Theorie und von charakteristischen Klassen im nichtkommutativen Fall. Diese Rolle wird von der von Connes entdeckten zyklischen Kohomologie übernommen. Die „periodische" Form dieser Theorie ergibt im klassischen Fall tatsächlich die de-Rham-Theorie und es ist (seit kurzem) bekannt, daß sie dieselben formalen Eigenschaften wie die K-Theorie besitzt. Ein geeigneter „Cherncharakter" von der K-Theorie in die zyklische Homologie existiert in natürlicher Weise.

Ein konkreter Differentialkalkül und damit eine differenzierbare Struktur auf einer C^*-Algebra A wird nach Connes gegeben durch eine Darstellung von A in einem Hilbertraum und einen selbstadjungierten Operator F mit $F^2=1$, der modulo kompakten Operatoren mit einer dichten Teilalgebra von A vertauscht (man nennt das Paar (A, F) einen Fredholmmodul). Differentialformen über A werden dann definiert durch die Korrespondenz $df=[F,f]$. Die sogenannte Dixmierspur führt zu einer Theorie der Integration von Differentialformen mit verblüffenden Anwendungen und Beziehungen. Eine Riemannsche Struktur auf A schließlich wird durch einen unbeschränkten Fredholmmodul definiert, d. h. durch eine Darstellung von A zusammen mit einem unbeschränkten selbstadjungierten Operator D mit kompakter Resolvente, so daß eine dichte Unteralgebra von A modulo beschränkter Operatoren mit D kommutiert. Im klassischen Fall $A=C(M)$ ist D der Diracoperator, der, wie Connes zeigt, nicht nur die differenzierbare Struktur, sondern auch die Metrik auf der Mannigfaltigkeit M (mit Spinstruktur) eindeutig bestimmt. Viele Begriffe der Differentialgeometrie, wie Vektorraumbündel, Zusammenhänge, Krümmung usw. haben natürliche Entsprechungen im Nichtkommutativen.

Alle diese Methoden und Ergebnisse und noch vieles mehr werden dargestellt in der bekannten suggestiven Art des Autors und mit einer Unzahl von schlagenden Beispielen. Er vermittelt die richtige Sichtweise zu vielen tiefliegenden Resultaten aber auch im Vorübergehen zu wohlbekannten klassischen Sachverhalten. Das Buch ist so reichhaltig an Ideen und Ergebnissen, daß es unmöglich ist, hier einen Eindruck davon zu geben. Die (teilweise sehr tiefliegenden) Resultate werden anschaulich erklärt und in Zusammenhang gestellt, aber natürlich werden in den allermeisten Fällen keine Beweise gegeben. Viel Wert wird auf Anwendungen und Illustrationen gelegt. In der Mathematik reichen diese von einer Vielzahl sehr allgemeiner Indexsätze über die Novikovvermutung, die Frage der Existenz von

Liste solcher Probleme, wie harmonische Abbildungen, Yang-Mills-Gleichungen etc. ist praktisch endlos.

Bei der Untersuchung von Problemen mit einer variationellen Struktur ist die Palette verfügbarer Methoden ungleich größer als im allgemeinen Fall. Auch erwartet man vom variationellen Problem mehr Lösungen, als dies bei einem nichtvariationellen Problem der Fall wäre. Man denke nur daran, daß ein allgemeines Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit im allgemeinen weniger Nullstellen hat als ein Gradientenfeld.

Die Behandlung eines konkreten Problems, wie zum Beispiel eines Randwertproblems für eine partielle Differentialgleichung, bedarf mehrerer Schritte, die, abhängig vom Problem, unterschiedlich schwierig sein können. Schritt eins ist im allgemeinen das Finden eines guten Funktionenraumes, auf dem das Funktional wohldefiniert ist. Der zweite Schritt besteht darin zu zeigen, daß genügend Kompaktheit im Problem ist. Eine besondere Rolle spielt hier die sogenannte Palais-Smale-Bedingung. Gilt diese (was leider insbesondere bei geometrischen Problemen häufig nicht der Fall ist), so hat man optimale Voraussetzungen für die erfolgreiche Anwendung abstrakter Variationsmethoden. Der dritte Schritt besteht dann in der Untersuchung der bereits bekannten Lösungen, der Topologie des zugrunde liegenden Raumes und mit Hilfe topologischer Hilfsmittel dem Aufspüren weiterer Lösungen.

Das Ziel von Changs Buch ist die Darstellung von funktionalanalytischen Variationsmethoden und deren Illustration durch diverse Anwendungen.

Das Buch beginnt mit einer klaren Darstellung der unendlich-dimensionalen Morsetheorie. Es werden die lokalen kritischen Gruppen einer unter Umständen degenerierten Mannigfaltigkeit eingeführt, wie auch die Morseungleichungen. Es wird auch die äquivariante Morsetheorie behandelt.

Im zweiten Kapitel werden die Variationsmethoden entwickelt, die speziell auf die Anwendungen auf elliptische Randwertprobleme und Hamiltonsche Systeme zugeschnitten sind. Bei den Anwendungen ist die Situation häufig die folgende. Das Verhalten des vorgegebenen Funktionals ist zum Beispiel nur asymptotisch bekannt und es mögen ebenfalls ein paar (triviale) Lösungen bekannt sein, wie auch das Verhalten des Funktionals in ihrer Nähe. Die Frage ist dann, gibt es weitere Lösungen, die im Zusammenspiel des lokalen und asymptotischen Verhaltens zusätzlich existieren müssen? Hier ist die Methode des topologischen „Linkings" sehr wichtig. Diese wird im zweiten Kapitel erklärt, wie auch der Zusammenhang zwischen der „Dimension" des topologischen Linkings und der Morseindizes der dabei gefundenen globalen kritischen Punkte. Insbesondere werden hier auch Zusammenhänge zwischen den lokalen Gruppen eines kritischen Punktes und dem lokalen Leray-Schauder-Abbildungsgrad hergeleitet.

Im dritten Kapitel wendet der Autor die entwickelten Methoden auf elliptische Randwertprobleme an. Die Probleme sind abstrakt gesehen von der Form $Lu = Fu$, wobei L ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator und $F = \Phi'$ ein nichtlinearer Potentialoperator ist. Das vorliegende Problem läßt nun als Konsequenz der Interaktion der Nichtlinearität F mit dem Spektrum des Operators L eine bestimmte Anzahl von Lösungen erwarten. Das Potential von L ist eine quadratische Form. Verschiedene Phänomene erhält man in Abhängigkeit des asymptotischen Verhaltens von Φ.

Das vierte Kapitel ist der Untersuchung Hamiltonscher Systeme gewidmet. Es werden ein paar wichtige Spezialfälle der Arnoldvermutung dargestellt. So zum Beispiel das bahnbrechende Conley-Zehnder-Theorem wie auch ein Satz über Lagrangesche Schnitte im $\mathbf{CP}^n$.

Im fünften Kapitel, das sich etwas vom Stil der ersten vier Kapitel abhebt, werden Harmonische Abbildungen und das Plateausche Problem für Minimalflächen untersucht. Im Gegensatz zu den ersten vier Kapiteln, in denen erst eine abstrakte Theorie entwickelt wird, die dann ohne große Schwierigkeiten auf eine bestimmte Klasse von Problemen angewendet wird, muß hier näher am Problem gearbeitet werden, da zum Beispiel die Geometrie der Zielmannigfaltigkeit eine wichtige Rolle für die Existenz (oder Nichtexistenz) einer Lösung spielt. Dementsprechend sind die abstrakten Resultate nicht mehr direkt, oder bestenfalls nur partiell anwendbar. Hingegen ist natürlich die zugrundeliegende Beweisphilosophie immer noch dieselbe.

Das Buch schließt mit einem Appendix über Wittens Beweis der Morseungleichungen. Dieser alternative Beweis selbst wird im Buch nicht gebraucht. Es sei hier noch vermerkt, daß Wittens Beweis einer der Ausgangspunkte von A. Floers bahnbrechender Verallgemeinerung der Morsetheorie (Floerhomologie) gewesen ist.

Zusammenfassend kann man das folgende sagen. Das Buch ist vom mathematischen Standpunkt sorgfältig geschrieben. Man könnte sich jedoch eine kohärentere Darstellung wünschen, insbesondere vermißt der Leser häufig motivierende Erläuterungen. Der Autor ist auch häufig etwas ungenau mit seinen bibliographischen Bemerkungen. So ist zum Beispiel das von ihm als „Kato-Hess-Theorem" aufgeführte Resultat ein Satz von Manes und Micheletti. Das besser als Hess-Kato-Theorem bezeichnete „Kato-Hess-Theorem" ist eine Erweiterung des Manes-Micheletti-Satzes auf nicht selbstadjungierte elliptische Differentialoperatoren der zweiten Ordnung und war auch von diesem motiviert.

Das Buch stellt grob gesprochen sehr ausführlich Variationsmethoden dar, die am besten anwendbar sind, falls die sogenannte Palais-Smale-Bedingung gilt. Allerdings muß gesagt werden, daß die meisten Variationsprobleme, die heute in der Forschung untersucht werden, diese Bedingung genau nicht erfüllen. Es wäre jedoch ein gravierender Fehlschluß deshalb dem Buch die Aktualität abzusprechen. Es handelt sich hier um ein äußerst nützliches Buch, in dem viele wichtige Resultate und Methoden, die man im Gebiet ständig braucht, zum erstenmal zusammenfassend dargestellt werden. Ich glaube jedoch nicht, daß dieses Buch für ein Selbstudium geeignet ist, falls der Leser nicht schon über eine gewisse mathematische Reife und gute Grundkenntnisse der nichtlinearen Funktionalanalysis verfügt. Jedoch erfüllt es als Nachschlagwerk wie auch in Zusammenhang mit anderer Literatur wie zum Beispiel Struwes „Variational Methods" einen guten Zweck.

Zürich H. Hofer

Levendorskii, S., Degenerate Elliptic Equations (Mathematics and its Applications Vol. 258), Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers 1993, 431 + si S., Dfl 320.00

In der vorliegenden Monographie beschäftigt sich S. Levendorskii mit der Theorie degenerierter elliptischer Differentialgleichungen der Ordnung $2m$. Die Ausartung kann sowohl im Inneren eines betrachteten Gebiets erfolgen, als auch am Rande. Die Behandlung von (linearen) Problemen bei partiellen Differentialgleichungen benutzt heute üblicherweise Pseudodifferentialoperatoren. Daher wird in Kapitel 1 ein allgemeiner Weyl-Hörmander-Kalkül von Pseudodifferentialoperatoren eingeführt. Um später Randwertprobleme behandeln zu können, müssen auch sogenannte „double symbols" studiert werden. In Kapitel 2 werden vier Modellklassen von ausgearteten elliptischen Operatoren mit „elementaren" Methoden studiert, Kapitel 3 und 4 behandelt mit aufwändigeren Mitteln den allgemeinen Fall. Ziel ist es, Fredholm-Sätze und die dazu benötigten a priori Abschätzungen (Gårdingsche Ungleichung, etc.) zu beweisen. In Kapitel 5 wird die L^p-Theorie für derartige Gleichungen andiskutiert, während sich Kapitel 6 mit dem Koerzitivitätsproblem der zugehörigen quadratischen Form beschäftigt. Hypoelliptischen Pseudodifferentialoperatoren auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten ist Kapitel 7 gewidmet, und Kapitel 8 behandelt eine Algebra von pseudodifferentiellen Randwertproblemen. Die Kapitel 9–11 behandeln

Fragen der Spektralasymptotik (Allgemeines in Kap. 9, Spezielles für ausgeartete elliptische Operatoren in Kap. 10 und den Fall von gewissen hypoelliptischen Pseudodifferentialoperatoren in Kap. 11).

Die Ausartung wird typischerweise durch Gewichte in den zugrunde liegenden Sobolev-Räumen „kompensiert". Diese Räume werden in den einzelnen Kapiteln mit behandelt. Ein fairer Literaturüberblick und eine ausführliche Bibliographie beenden dieses m. E. wichtige Buch.

Erlangen N. Jacob

Young, R., K., Wavelet Theory and its Applications, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1993. 223 S., US $ 130.00

Am Ende des 20. Jahrhunderts, das mit einigem Recht als das Zeitalter der Informationstechnik bezeichnet wird, hat sich auch die Mathematik der Informationstheorie und ihrer High-Tech-Anwendungen angenommen. Der Algebra und Kombinatorik sind mit der Kodierungstheorie ein blühender Zweig zugewachsen, die angewandte Mathematik studiert intensiv die Approximationseigenschaften orthogonaler Waveletbasen. Wichtige technische Realisierungen sind die 1982 weltweit in den Markt eingeführte Compact Disc (CD), die auf einer Implementierung des Cross Interleave Reed-Solomon Codes (CIRC-Algorithmus) als Fehlerschutzkode beruht ([2]), sowie die seit etwa 10 Jahren der nichtinvasiven radiologischen Diagnostik zur Verfügung stehenden Magnetresonanztomographen, welche Serien von Quantenhologrammen, die von schnellen Prozessoren der symplektischen Fourier-Transformation ausgelesen werden, routinemäßig als symplektische Spinoren zu erzeugen und mit Hilfe der Echoplanartechnik sogar in Echtzeit aufzunehmen und zu übertragen gestatten ([3]).

Die grundlegende Idee der Theorie der affinen Wavelets besteht darin, aus einem Mutterwavelet durch Hintereinanderausführung von Skalierungs-, Translations-, und Normierungsoperatoren eine sogenannte Multiresolutionsanalysis zu erzeugen. Ausschöpfung der Folge ineinander geschachtelter Funktionenräume erlaubt dann aus schrittweise modifizierten Kopien des Mutterwavelets bestehende Orthogonalbasen zu konstruieren, die beispielsweise zur Datenkompression vor der Einspeisung in Daten-Autobahnen eingesetzt werden können.

Ausgangspunkt der Anwendungen affiner Wavelets war ursprünglich die geophysikalische Exploration, von der sich die Theorie der Wavelets aber bald emanzipiert hat, um zu einer eigenständigen mathematischen Disziplin algorithmischer Prägung heranzuwachsen. Der heute herrschenden Tendenz, die ursprünglich als Ausgangspunkt dienenden, physikalischen Anwendungen in Vergessenheit geraten zu lassen, versucht das vorliegende Buch entgegenzuwirken. Es ist aus einer beim Department of Electrical Engineering der Pennsylvania State University in University Park, PA, eingereichten Ph.D.-Dissertation entstanden und entwickelt unter nur geringen mathematischen Voraussetzungen anhand von Anwendungen, meist aus dem Bereich der Bildgebung ([6]), die Hauptideen der Theorie affiner Wavelets. Weil der Autor, seiner Ausbildung entsprechend, systemtheoretische Methoden bevorzugt, werden die ursprünglich von Alberto P. Calderón für Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen entwickelten subtilen Techniken, ebenso wie der darstellungstheoretische Zugang der Theorie der Lie-Gruppen zur Faltung und den reproduzierenden Kernfunktionen, nicht in Betracht gezogen, sondern die Begriffe der Informationstechnik in den Vordergrund gestellt. Puristen unter den Lesern, die etwa unter einem Filter stets einen mit Hilfe des Zornschen Lemmas zu verfeinernden Ultrafilter verstehen, ohne aber die für die Anwendungen viel bedeutsameren adaptiven und angepaßten Filter der Informationstechnik, Bildgebung und Photonik würdigen zu können, werden deshalb bei der Lektüre des Buchs keine besondere Freude empfinden. Schwerwiegender aber ist der Einwand, daß das Buch, trotz vieler bestehender Querverbindungen zu

den affinen Wavelets ([4]), den phasenkohärenten Wavelets und der Implementierung ihrer Synchronisation nicht die gebührende Behandlung zukommen läßt. Damit ist aber die der praktischen Bedeutung angemessene Behandlung von massiv parallel operierenden Analogrechnern, wie etwa des hochauflösenden konfokalen Abtastmikroskops ([3)], der holographischen Bildgebungsverfahren der Photonik ([5]) und der schon als Paradebeispiele der High-Tech Diagnostik angeführten Magnetresonanztomographen ([3]), die alle auf phasenkohärenten Wavelets und ihren räumlichen oder temporalen Filterbankeigenschaften beruhen, von vornherein ausgeschlossen. Zur Dekade der Hirnforschung, um ein anderes Schlagwort der aktuellen Wissenschaftspolitik zum soeben in Gang gekommenen Dialog

Einsicht in den neuerdings entwickelten rechnergestützten Mehrkoordinaten-Manipulator (MKM) der stereotaktisch geführten Neuronavigation ([3]), kann damit kein Beitrag

geleistet werden.

Zum zwiespältigen Eindruck des Buches trägt noch die unglückliche Wahl des