

E 20577 F

98. Band Heft 3

ausgegeben am 23. 10. 1996

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

## Verlag:

B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart  
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax (0711) 78901-10  
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, 80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart 1996 – Verlagsnummer 2911/3

Printed in Germany – ISSN 0012-0456

Satz: Elsner & Behrens GdbR, D-68723 Oftersheim

Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 98, Heft 3

### 1. Abteilung

P. Schneider: Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern .....	135
Sir P. Swinnerton-Dyer: Diophantine Equations: the geometric approach .....	146
L. van den Dries: O-minimal structures on the field of real numbers .....	165

### 2. Abteilung

DeVore, R. A., Lorentz, G. G., Constructive Approximation ( <i>R. Schaback</i> ) .....	17
Dembo, A., Zeitouni, O., Large Deviations Techniques and Applications ( <i>K. Fleischmann</i> ) .....	18
Prüss, J., Evolutionary Integral Equations and Applications ( <i>G. Leugering</i> ) .....	19
de Melo, W., van Strien, S., One-Dimensional Dynamics ( <i>G. Keller</i> ) .....	21

Malliavin, P., Nica, A., Voiculescu, D., Free Probability Theory

Barnsley, M., Fractals Everywhere ( <i>Ch. Bandt</i> ) .....	24
Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Table of Integrals, Series and Products	

**In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

**H. Esnault:** Recent development on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds

**G. Harder:** Wittvektoren

**E. Heinz:** Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme

**F. Litten:** Ernst Mohr – Das Schicksal eines Mathematikers

**J. Zowe:** Mathematik und Entwurf mechanischer Strukturen

---

**Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen

---

---

---

---

---

# Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern

P. Schneider, Münster

Dieser Artikel ist eine leicht erweiterte Fassung meines Vortrages auf der DMV-Tagung 1994 in Duisburg. Ziel ist der Versuch, dem Leser etwas von der Faszination zu vermitteln, die die Bruhat-Tits-Gebäude auf den Autor ausüben. Alle Graphiken sind mit Hilfe eines Computerprogrammes erstellt, das von meinen Mitarbeitern Erdmann, Landvogt und Wettig entwickelt wurde.

Ich möchte mit einer Analogie beginnen, die allen vertraut ist. Die obere Halbebene  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$  stellt sich mittels der Bijektion

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R})/\operatorname{SO}(2) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{H} \\ g &\longmapsto g^i \end{aligned}$$

als ein homogener Raum der Liegruppe  $SL_2(\mathbb{R})$  nach der maximalen kompakten Untergruppe  $\operatorname{SO}(2)$  dar. Welch fundamental wichtige Rolle die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  in verschiedenen Bereichen der Mathematik spielt, braucht hier nicht näher erläutert werden. Zum Vergleich mit dem, was später gesagt werden wird, sei ein Aspekt aber herausgestellt: Geeignete Räume von Funktionen auf  $\mathbb{H}$  liefern explizite Modelle für gewisse Serien von (unendlich-dimensionalen) Darstellungen der Liegruppe  $SL_2(\mathbb{R})$ .

Obige Bijektion ist ein Spezialfall des allgemeinen Prinzips

$$\text{halbeinfache } / \text{ maximale kompakte } = \text{symmetrischer Raum.} \\ \text{reelle Liegruppe } \quad \quad \quad \text{Untergruppe}$$

Die Wahl der maximalen kompakten Untergruppe spielt dabei keine Rolle, da sie nach dem Cartanschen Fixpunktsatz alle konjugiert sind.

In der Zahlentheorie stehen gleichberechtigt neben dem Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen die lokalen oder  $p$ -adischen *Zahlkörper*  $\mathbb{Q}_p$  zu jeder Primzahl  $p$ . Der Körper  $\mathbb{Q}_p$  entsteht aus dem Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  durch Vervollständigung bezüglich des  $p$ -adischen Absolutbetrages  $| \cdot |_p$ , der wie folgt definiert ist: Schreiben wir die rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  als  $x = p^m \cdot \frac{a}{b}$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  und zu  $p$  teilerfremden  $a, b \in \mathbb{Z}$ , so ist  $|x|_p := p^{-m}$ . Mit anderen Worten der  $p$ -adische Betrag mißt, wie oft eine gegebene Zahl durch die Primzahl  $p$  teilbar ist. Eine wichtige Besonderheit dabei ist, daß  $| \cdot |_p$  ein nicht-archimedischer Betrag ist, d. h. die strikte Dreiecksungleichung  $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$  erfüllt. Das hat zur Folge, daß  $\mathbb{Q}_p$  den diskreten Bewertungsring

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$$

mit maximalem Ideal

$$p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < 1\}$$

enthält. Der zugehörige Restklassenkörper  $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$  ist natürlich der endliche Körper mit  $p$  Elementen. Also:

$$\mathbb{Q}_p \xleftarrow{\cong} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{pr} \mathbb{F}_p.$$

Durch  $|\cdot|_p$  als Metrik ist  $\mathbb{Q}_p$  in natürlicher Weise mit einer Topologie versehen. Allerdings ist diese wiederum wegen der strikten Dreiecksungleichung total-unzusammenhängend. Die Teilmenge  $\mathbb{Z}_p$  ist kompakt und offen; folglich ist  $\mathbb{Q}_p$  lokalkompakt.

Das Analogon der Liegruppe  $SL_2(\mathbb{R})$  ist in diesem Kontext offensichtlich die Gruppe  $G := SL_2(\mathbb{Q}_p)$ , die wir zunächst etwas genauer anschauen wollen. Die Topologie auf  $\mathbb{Q}_p$  führt über den Vektorraum der  $2 \times 2$ -Matrizen zu einer natürlichen Topologie auf  $G$ . Man stellt unschwer fest:

- $G$  ist eine lokalkomplexe total-unzusammenhängende topologische Gruppe.
- $K_0 := SL_2(\mathbb{Z}_p)$  ist eine maximale kompakte Untergruppe von  $G$ .

Aber es treten zwei von der Situation bei reellen Liegruppen wesentlich abweichende Phänomene auf:

- $K_0$  ist offen in  $G$ . Folglich ist der homogene Raum  $G/K_0$  diskret und damit topologisch uninteressant.

$\underline{K_0 := \{(a \quad p^{-1}b) \in G : a, b \in \mathbb{Z}\}}$  ist ebenfalls eine maximale kompakte

Untergruppe von  $G$ ;  $K_1$  und  $K_0$  sind nicht konjugiert in  $G$ .

Die letztere Tatsache liegt darin begründet, daß die beiden  $\mathbb{Z}_p$ -Gitter  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$  und  $\mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p$  in dem Vektorraum  $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p$  nicht durch eine Matrix in  $G$  ineinander überführt werden können.

Wir stellen also fest, daß zwar die einzelnen Mengen  $G/K_i$  keine topologische Struktur besitzen. Dafür entsteht aber das Problem, die Konjugationsklassen maximaler kompakter Untergruppen zu klassifizieren und die Lage solcher nichtkonjugierter Untergruppen zueinander zu verstehen. Es stellt sich heraus, daß die Antwort darauf am besten in geometrischer Weise gegeben werden kann. Sei

$$I := K_0 \cap K_1$$

die sogenannte Iwahori-Untergruppe. Dann gilt das folgende

Dies ergibt den wohlbekannten Baum  $X$ , der für  $p = 2$  wie in Fig. 1 aussieht:

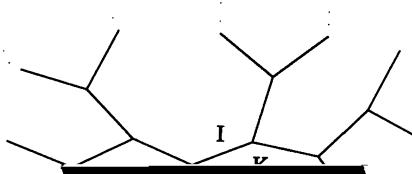


Fig. 1

Offensichtlich induziert die Konjugation eine Operation von  $G$  auf  $X$  durch simpliziale Automorphismen. Deren fundamentale Eigenschaft drückt sich aus durch die Identität

Stabilisator einer Ecke = die Ecke repräsentierende  
maximale kompakte Untergruppe.

Außerdem wird die Größe des Durchschnittes  $K \cap K'$  zweier maximaler kompakter Untergruppen  $K$  und  $K'$  dadurch kontrolliert, wie weit die zugehörigen Ecken in  $X$  voneinander entfernt sind. Zusammenfassend können wir also sagen, daß die Operation von  $G$  auf  $X$  vollständig die Lage der maximalen kompakten Untergruppen in  $G$  beschreibt.

Dieses Konstruktionsprinzip läßt sich ohne große Schwierigkeiten auf die Gruppe  $G = SL_n(\mathbb{Q}_p)$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig ist, verallgemeinern. Das zugehörige *Bruhat-Tits-Gebäude*  $X = X(G)$  ist jetzt ein  $(n - 1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex, dessen Ecken ebenfalls den maximalen kompakten Untergruppen von  $G$  entsprechen. Seine globale Struktur ist, wie nicht anders zu erwarten, kombinatorisch sehr kompliziert. Der Gewinn liegt darin, daß sich eine schwierige Kombinatorik auf geometrisch-anschauliche Weise ausdrückt. Gute Aussagen über  $X$  lassen sich in zweierlei Hinsicht machen:

- 1) Die lokale Struktur um eine Ecke:

Umgebung einer Ecke zurückgeführt auf die wohlverstandene Kombinatorik der parabolischen Untergruppen in der algebraischen Gruppe  $SL_n$  über dem endlichen Körper  $\mathbb{F}_p$ .

Hierzu zwei Bilder: Im Falle der Gruppe  $SL_3(\mathbb{Q}_2)$  ist jede Ecke von  $X$  in genau 21

Dimensionen enthalten. Diese 1204 nicht absehbaren Schichten sind nicht mehr

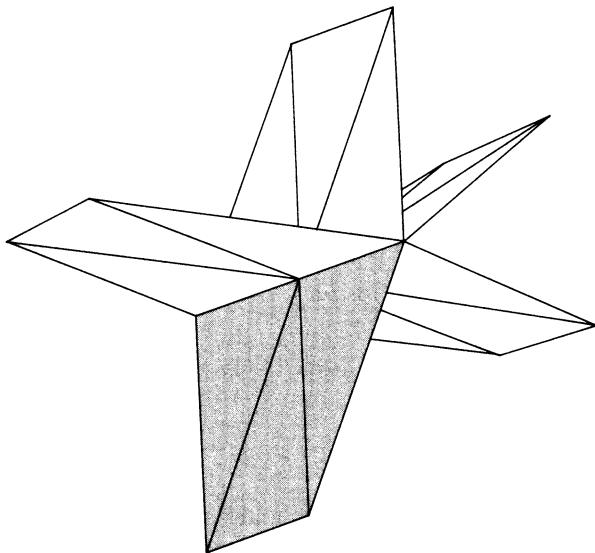


Fig. 3

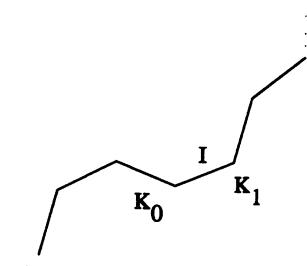


Fig. 4

Die allgemeine Theorie geht aus von einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe  $\mathbf{G}$  über  $\mathbb{Q}_p$ . Die Gruppe  $G = \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$  der  $\mathbb{Q}_p$ -rationalen Punkte von  $\mathbf{G}$  ist in natürlicher Weise eine lokalkomplexe total-unzusammenhängende topologische Gruppe. Am leichtesten sieht man dies, indem man  $\mathbf{G}$  als Gruppe von Matrizen realisiert. Nach ähnlichen, wenn auch ungleich komplizierteren Prinzipien konstruieren Bruhat und Tits ([BT]) das *Gebäude*  $X = X(G)$  zu  $G$ . Dabei handelt es sich um einen topologischen Raum, der in natürlicher Weise mit einer Zellenstruktur, einer Metrik und einer  $G$ -Operation versehen ist. Letztere respektiert Zellenstruktur und Metrik. Auch die Strukturaussagen 1) und 2) sind Spezialfälle allgemeiner Sachverhalte:

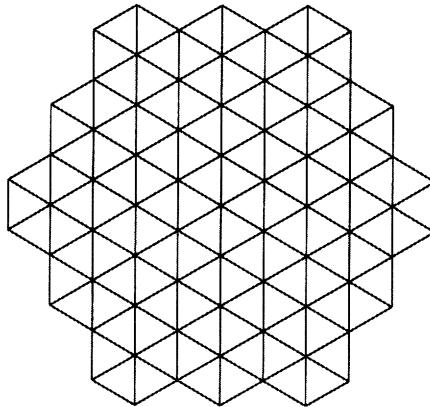


Fig. 5

**Ad 1):** Zu jeder Ecke  $x$  von  $X$  konstruieren Bruhat und Tits ein „Modell“ von  $\mathbf{G}$  über  $\mathbb{Z}_p$ , also ein Gruppenschema  $\mathcal{G}_x$  über  $\mathbb{Z}_p$ , dessen allgemeine Faser über  $\mathbb{Q}_p$  gerade die algebraische Gruppe  $\mathbf{G}$  ist. Dabei gilt:

- Die Schnittgruppe  $\mathcal{G}_x(\mathbb{Z}_p)$  stimmt im wesentlichen mit dem Stabilisator  $P_x$  der Ecke  $x$  in  $G$  überein;
- die Struktur des Gebäudes  $X$  in der Umgebung der Ecke  $x$  ist bestimmt durch die Struktur der endlichen Gruppe  $\mathcal{G}_x(\mathbb{F}_p)$ .

Wieder ein Bild dazu: Im Gebäude zur Gruppe  $Sp_4(\mathbb{Q}_2)$  gibt es Ecken, die in genau 45 2-Simplizes enthalten sind. Entsprechend dem obigen Auswahlkriterium stellen wir nur 19 davon dar, was allerdings schon eine Selbstdurchdringung erzwingt. Sämtliche hell wie dunkel ausgefüllten Simplizes liegen sogar in einem gemeinsamen Apartment (Fig. 6).

**Ad 2):** Die Apartments des Gebäudes  $X$  sind als metrische Räume sämtlich isometrisch zum euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$ , wobei  $d$  den halbeinfachen  $\mathbb{Q}_p$ -Rang der Gruppe  $\mathbf{G}$  bezeichnet. Die Zellenstruktur der Apartments ist im wesentlichen bestimmt durch das zur reduktiven Gruppe  $\mathbf{G}$  gehörige Wurzelsystem in  $\mathbb{R}^d$ . Stets wird  $X$  von seinen Apartments überdeckt.

Ein Apartment zur Gruppe  $Sp_4(\mathbb{Q}_p)$  sieht wie in Fig. 7 aus.

Spaßshalber in Fig. 8 noch die Zusammenfügung eines Apartmentbildes mit einem „lokalen“ Bild.

**Zusammenfassung:** Die Operation der Gruppe  $G$  auf ihrem Bruhat-Tits-Gebäude  $X(G)$  beschreibt in geometrischer Weise die innere Struktur von  $G$ .

Im Weiteren möchte ich zeigen, daß das Gebäude  $X$  auch geeignet ist, „äußere“ Strukturen der Gruppe  $G$  zu beschreiben. Dabei beschränke ich mich auf die sogenannte *glatte Darstellungstheorie* von  $G$  und berichte über Resultate aus der gemeinsamen Arbeit [SS] mit U. Stuhler.

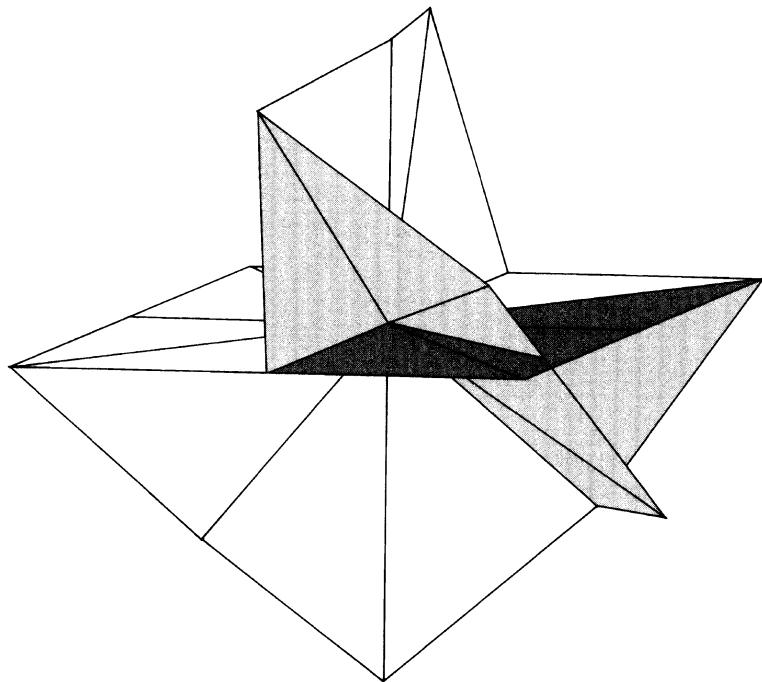


Fig. 6

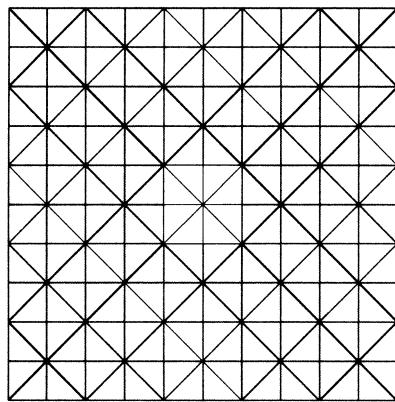


Fig. 7

**Definition:** Eine glatte Darstellung  $V$  von  $G$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  mit einer linearen  $G$ -Aktion, so daß für alle  $v \in V$  gilt:

$\{g \in G : gv = v\}$  ist offen in  $G$ .



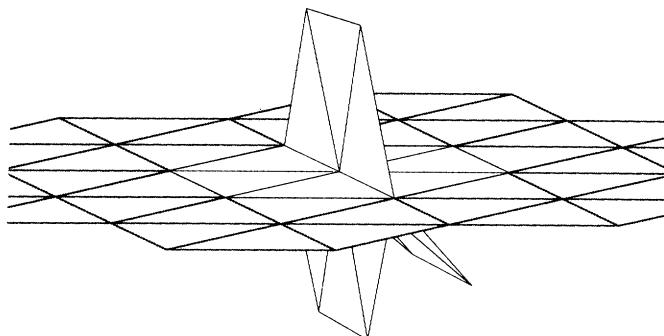


Fig. 8

Es ist wichtig sich bewußt zu machen, daß eine so naheliegende Darstellung wie die Standardaktion der Gruppe  $SL_n(\mathbb{Q}_p)$  auf dem  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{Q}_p$ -Vektorraum nicht glatt ist. In der Tat sind, von der trivialen Darstellung abgesehen, alle irreduziblen glatten Darstellungen von  $SL_n(\mathbb{Q}_p)$  unendlich-dimensional! Dies ist ein typisches Phänomen, das das Aussehen der Theorie prägt. Insbesondere ist es nicht erstaunlich, daß die harmonische Analyse auf der lokalkompakten Gruppe  $G$  eine tragende Rolle spielt. Ein sehr gutes Beispiel für eine irreduzible glatte Darstellung ist die sogenannte Steinberg-Darstellung  $St$  von  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ : Dazu bezeichne  $V$  den Raum der  $\mathbb{C}$ -wertigen lokalkonstanten Funktionen auf der projektiven Geraden  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$

unserem Kontext großzügigerweise als „bekannt“ ansehen wollen. Ist  $V$  eine glatte  $G$ -Darstellung endlicher Länge, so ergibt sich (vgl. [Ca]), daß sich  $V$  als  $K$ -Darstellung in eine direkte Summe

$$V \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} m_V(\pi) \cdot \pi$$

über die irreduziblen glatten  $K$ -Darstellungen  $\pi \in \hat{K}$  mit endlichen Multiplizitäten  $m_V(\pi)$  zerlegt. Die Hoffnung ist nun, daß irreduzible  $V$  durch die Wahl von  $K$  und die Multiplizitäten  $m_V(\pi)$  charakterisiert werden. Für die Gruppen  $GL_n(\mathbb{Q}_p)$  ist diese Strategie jüngst in [BK] erfolgreich verwirklicht worden.

Der Wunsch ist naheliegend, diese Betrachtungsweise in eine funktorielle Form zu bringen. Sicherlich müssen dazu alle möglichen  $K$  simultan betrachtet werden, wodurch wohl das Gebäude  $X = X(G)$  ins Spiel zu kommen hat. In [SS] gehen wir folgendermaßen vor (der Einfachheit halber sei hier die reduktive Gruppe  $\mathbb{G}$  als halbeinfach vorausgesetzt):

Zu jeder Zelle  $F \subseteq X$  bezeichne  $P_F^\dagger \subseteq G$  den Stabilisator; dies ist eine kompakte offene Untergruppe. Wir konstruieren eine natürliche  $G$ -äquivariante Filtrierung

$$P_F^\dagger \supseteq U_F^{(0)} \supseteq \dots \supseteq U_F^{(e)} \supseteq \dots$$

durch kompakte offene Normalteiler  $U_F^{(e)}$  in  $P_F^\dagger$ . Für das Folgende fixieren wir einen „Level“  $e \geq 0$ . Sei  $V$  eine glatte  $G$ -Darstellung endlicher Länge und setze

$$V^{U_F^{(e)}} := \{v \in V : gv = v \text{ für alle } g \in U_F^{(e)}\}.$$

Dann hat man das

~~Für alle Punktvariantenraume  $V^{U_F^{(e)}}$  ist eine endlich dimensionale Dar~~

stellung der endlichen Gruppe  $P_F^\dagger / U_F^{(e)}$ .

Die eigentlich einfache Beobachtung ist nun, daß sich diese Invariantenräume für variiertes  $F$  (aber festes  $e$ ) zusammenfassen lassen zu einer *Garbe*  $\tilde{V}$  auf dem Gebäude  $X$ , so daß gilt:

Halm von  $V$  im Punkte  $x = V^{U_F^{(e)}}$ , falls  $x \in F$ .

(Co)homologiegruppen Aussagen über die homologische Algebra der Kategorie der glatten  $G$ -Darstellungen. Beenden möchte ich diesen Bericht aber damit, daß ich eine Anwendung auf die harmonische Analyse der Gruppe  $G$  beschreibe.

Ist  $V$  unendlich-dimensional, so ist es sinnlos, die Spur eines Elementes  $g \in G$  auf  $V$  im Sinne der linearen Algebra bilden zu wollen. Nichtsdestoweniger existiert aber der Charakter der Darstellung  $V$  als Distribution. Das bedeutet das Folgende. Bezeichne  $\mathcal{H}$  den Raum aller  $\mathbb{C}$ -wertigen lokalkonstanten Funktionen mit kompakten Träger auf  $G$ . Dies ist eine assoziative Algebra bezüglich der Konvolution

$$(\varphi * \psi)(h) := \int_G \varphi(g)\psi(g^{-1}h)dg;$$

dabei ist  $dg$  ein fest gewähltes Haar-Maß auf der lokalkompakten Gruppe  $G$ . Die Algebra  $\mathcal{H}$  heißt Hecke-Algebra und ist als die in diesem Kontext richtige Version der Gruppenalgebra anzusehen. Die Glattheitsbedingung hat nämlich zur Folge, daß jede glatte  $G$ -Darstellung  $V$  automatisch ein  $\mathcal{H}$ -Modul ist mittels

$$\varphi * v := \int_G \varphi(g)gv dg.$$

Hat  $V$  endliche Länge, so hat der Konvolutionsoperator  $\varphi * . : V \rightarrow V$  endlichen Rang, so daß die Spur  $\text{Tr}(\varphi; V)$  definiert ist ([Ca]). Wir erhalten also eine Linearform

$$\text{Tr}( . ; V) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ein tief liegendes Theorem von Harish-Chandra und Howe aus der harmonischen Analyse besagt (vgl. [Si]), daß eine lokal-integrale Funktion  $\theta_V$  auf  $G$  existiert, so daß gilt:

$$\text{Tr}(\varphi; V) = \int_G \varphi(g)\theta_V(g)dg \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Diese Charakterfunktion  $\theta_V$  besitzt die übliche Eigenschaft, irreduzible  $V$  bis auf Isomorphie zu charakterisieren. Aber die Bedeutung der Werte der Funktion  $\theta_V$  bleibt unklar.

Zumindest für die sogenannten elliptischen Elemente in  $G$  führt unsere Lokalisierungstheorie hier zu einer Antwort. Ein Element  $g \in G$  heißt elliptisch, falls sein Zentralisator in  $G$  kompakt ist. In vielen Problemen der harmonischen Analyse läßt sich das Studium der nicht-elliptischen Elemente auf den elliptischen Fall zurückführen durch Übergang zu geeigneten reduktiven Untergruppen von  $G$ . In gewisser Weise bilden also die elliptischen Elemente den „harten Kern“ von  $G$ . Ist  $g \in G$  elliptisch, so ist die Fixpunktmenge

$$X^g := \{x \in X : gx = x\}$$

im Gebäude kompakt. Da die Garbe  $\tilde{V}$  konstruierbar ist, sind die Cohomologiegruppen  $H^*(X^g, \tilde{V})$  also endlich-dimensional. Wegen der  $G$ -Äquivarianz von  $\tilde{V}$  operiert außerdem das Gruppenelement  $g$  nach wie vor auf dieser Cohomologie. In [SS] zeigen wir, daß folgende Spurformel vom Hopf-Lefschetz-Typ gilt.

**Spurformel:** Für  $V$  von endlicher Länge, für genügend groß gewählten Level  $e$  und für elliptisches  $g \in G$  gilt

$$\theta_V(g) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \cdot \text{Spur}(g; H^i(X^g, \mathbb{Q}_V)).$$

## Literatur

- [BK] Bushnell C., Kutzko P.: The admissible dual of  $GL(N)$  via compact open subgroups. Ann. Math. Studies **129**. Princeton Univ. Press 1993
- [BT] Bruhat F., Tits J.: Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées. Publ. Math. IHES **41** (1972). II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. Publ. Math. IHES **60** (1984)
- [Ca] Cartier P.: Representations of  $p$ -adic groups: a survey. In Automorphic Forms, Representations and  $L$ -Functions. Proc. Symp. Pure Math. **33** (1), 111-155. American Math. Soc. 1979
- [Si] Silberger A.: Introduction to harmonic analysis on reductive  $p$ -adic groups. Princeton Univ. Press 1979
- [SS] Schneider P., Stuhler U.: Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. Preprint 1995
- [Ta] Tate J.: Number theoretic background. In Automorphic Forms, Representations and  $L$ -Functions. Proc. Symp. Pure Math. **33** (2), 3-26. American Math. Soc. 1979

Peter Schneider  
 Mathematisches Institut  
 Universität Münster  
 Einsteinstr. 62  
 D-48149 Münster  
 pschnei@math.uni-muenster.de

(Eingegangen 4. 9. 1995)

# Diophantine Equations: the geometric approach

Sir Peter Swinnerton-Dyer, Cambridge

## 1 Introduction

A *Diophantine problem* is concerned with the solutions either in  $\mathbb{Z}$  or in  $\mathbb{Q}$  of a finite system of polynomial equations

$$(1) \quad f_\mu(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad \text{for} \quad 1 \leq \mu \leq m$$

with coefficients in  $\mathbb{Z}$ . Such a system is called a Diophantine equation; it is only of interest if the system is indeterminate – that is, if it has an infinity of solutions in  $\mathbb{C}$ . Some of the most obvious questions to ask about such a system are:

- Does the system have solutions?
- If so, can we exhibit a solution?
- Can we describe the set of all solutions?
- Is the phrase ‘density of solutions’ meaningful, and if so what can we say about it?

Almost all the questions and answers can be generalized to an arbitrary algebraic number field and the ring of integers in it. Some of the proofs become much harder, but there is only one place (mentioned in §3) where the theory is known to be different.

A necessary condition for (1) to be soluble in  $\mathbb{Q}$  is that it should be soluble in every completion of  $\mathbb{Q}$  – that is, in  $\mathbb{R}$  and every  $\mathbb{Q}_p$ . In what follows,  $\mathbb{Q}_v$  will denote any completion of  $\mathbb{Q}$ . As will be explained below, solubility in every  $\mathbb{Q}_v$  is a computationally decidable property; and for this and other reasons, it is useful to study the solutions of (1) also in the  $\mathbb{Q}_v$ . As a first step to this for  $\mathbb{Q}_p$ , one also needs to study the solutions in each  $\text{GF}(p)$  of the system (1) reduced mod  $p$ , where  $\text{GF}(p)$  denotes the finite field of  $p$  elements.

The subject was created by Diophantus of Alexandria, who lived at some time between 300BC and 300AD; and individual Diophantine problems were considered by such great mathematicians as Fermat, Euler and Gauss. But it was Hilbert’s address to the International Congress in 1900 which led to the development of a systematic theory. His tenth problem asked for an algorithm for determining whether any given Diophantine equation has solutions in integers. It is now known that no such algorithm can exist. Indeed Matiyasevich has shown how to write down a

polynomial  $f(c; x_1, \dots, x_n)$  with the following property: there does not exist any algorithm which will decide for given  $c$  whether  $f = 0$  is soluble in integers.

rational solutions rather than integral ones. Presumably Hilbert phrased his tenth problem in terms of integral solutions because that was the more general case: the search for rational solutions of any particular Diophantine equation is equivalent to the search for integral solutions of the homogenized equation. But for inhomogeneous equations the two theories for integral and for rational solutions have unexpectedly little in common, and the second appears to be the richer. A major reason for this is that one can make use of ideas from algebraic geometry. If  $V$  is the variety defined by (1) and  $V'$  is birationally equivalent to  $V$  over  $\mathbb{Q}$ , then the problem of finding solutions of (1) in  $\mathbb{Q}$  is the same as that of finding points on  $V$  defined over  $\mathbb{Q}$ , and this in its turn is almost the same as that of finding points on  $V'$  defined over  $\mathbb{Q}$ . Hence one expects the properties of the rational solutions of (1) to depend on the birational equivalence class of the associated variety. More generally, the way in which algebraic geometers classify varieties should provide at least a first rough classification of Diophantine equations.

The rest of this paper will be concerned with Diophantine problems over the rationals (and over other fields which one is thereby led to consider) rather than over the integers. This is equivalent to studying the properties of  $V(k)$ , the set of points defined over a field  $k$  on a variety  $V$ , and when we use this language it will always be implied that  $V$  is defined over  $k$ . For general non-algebraically-closed fields  $k$  this is a

### 1.1 Reduction mod $p$

Let  $V$  be an absolutely irreducible variety in  $\mathbb{P}^n$  defined over  $\mathbb{Q}$ , and let  $I$  be the ideal of all polynomials in  $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$  which vanish on  $V$ . For any fixed prime  $p$ , denote by  $\tilde{I}_p$  the ideal in  $\text{GF}(p)[X_0, \dots, X_n]$  obtained by reducing mod  $p$  the coefficients of all the polynomials in  $I$ . The ideal  $\tilde{I}_p$  defines a variety  $\tilde{V}_p$  defined over  $\text{GF}(p)$ , which is called the reduction of  $V$  mod  $p$ . For all but finitely many  $p$ ,  $\tilde{V}_p$  is absolutely irreducible, has the same dimension as  $V$  and is nonsingular if  $V$  is. In this case we say that  $V$  has good reduction at  $p$ .

A symbol like  $\tilde{V}$  or  $\tilde{V}_p$  will denote a variety defined over a finite field; but it does not imply the existence of a precursor  $V$  from which  $\tilde{V}$  was derived by reduction mod  $p$ .

### 1.2 Lifting

A lifting of the rational points on a variety  $V$  is a finite set of maps  $W_\nu \rightarrow V$  such that any rational point  $P$  on  $V$  is the image of some rational point  $Q_\nu$  on some  $W_\nu$ . The  $W_\nu$  corresponding to a given  $P$  will nearly always be unique, though this is not a requirement; the  $Q_\nu$  will hardly ever be unique. Usually there is a group  $G$  independent of  $P$  which acts faithfully on the fibre of the map above any given  $P$ ; the appearance of a group in this way contributes valuable additional structure. As the examples below will show, the standard way of constructing a lifting is to exhibit an infinite set of varieties  $W_\nu$  and maps  $W_\nu \rightarrow V$  such that every rational  $P$  on  $V$  lifts to one of the  $W_\nu$ , and then to show that only finitely many of the  $W_\nu$  can have rational points.

**Example 1** To any rational point  $(x, y, z)$  on the curve

$$(2) \quad V : Y^2Z = (X - c_1Z)(X - c_2Z)(X - c_3Z),$$

where the  $c_i$  are distinct integers, there are square-free integers  $m_1, m_2, m_3$  with  $m_1m_2m_3 = m^2$  such that

$$z(x - c_i z) = m_i y_i^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

for some rational  $y_i$ . There is a corresponding curve  $W$  given by the equations

$$Z(X - c_i Z) = m_i Y_i^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

and the map  $W \rightarrow V$  is given by

$$(X, Y_1, Y_2, Y_3, Z) \mapsto (X, m Y_1 Y_2 Y_3 Z^{-2}, Z).$$

It is easy to check that  $(0, 1, 0)$  lifts to the curve with  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ . For any other rational point  $(x, y, z)$  on (2) we can assume that  $x, z$  are coprime integers. Now suppose that  $p$  is a prime dividing some  $m_i$ . Then it must divide just two of the  $m_i$  because  $m_1m_2m_3$  is a square; hence it divides just two of the  $z(x - c_i z)$  to an odd power. If  $p$  divides  $z$  then it does not divide any of the  $(x - c_i z)$  and we obtain a contradiction; if not, then it must divide two of the  $(x - c_i z)$  and hence must divide  $(c_1 - c_2)(c_2 - c_3)(c_3 - c_1)$ . Thus the  $p$  which can occur belong to a finite set; in other

words only finitely many of the  $W$  contain rational points. In this example each point of  $V$  lifts to four points of  $W$ . We shall return to this example in §3.

**Example 2** Let  $f_1(\lambda, \mu), f_2(\lambda, \mu)$  be two coprime homogeneous quadratic polynomials in  $\mathbb{Z}[\lambda, \mu]$ . The equation

$$(3) \quad X^2 + Y^2 = f_1(\lambda, \mu)f_2(\lambda, \mu)Z^2$$

represents a pencil of conics (and thus a surface) in  $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$ . Any rational point on (3) can be lifted to a point on a variety of the form

$$(4) \quad X_i^2 + Y_i^2 = mf_i(\lambda, \mu) \quad (i = 1, 2)$$

for some square-free integer  $m$ , in view of the identity

$$(X_1^2 + Y_1^2)(X_2^2 + Y_2^2) = (X_1X_2 + Y_1Y_2)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2.$$

Using the same identity, we can remove from  $m$  any prime factor which is the sum of two squares – that is, 2 and any prime congruent to 1 mod 4. We can also confine ourselves to solutions of (3) for which  $\lambda, \mu$  are coprime integers. But  $p \equiv 3 \pmod{4}$  cannot divide a sum of two squares to an odd power; so  $p|m$  implies  $p|f_i(\lambda, \mu)$  for  $i = 1, 2$ , whence  $p$  divides the resultant of  $f_1$  and  $f_2$ . Since there are only finitely many such  $p$ , there are only finitely many essentially distinct systems (4) which contain rational points. In other words, what we have constructed is indeed a lifting.

If the  $f_i$  are irreducible over  $\mathbb{Q}$ , the lifting obtained in this way looks the most natural one; but it turns out not to be the most useful. To obtain the latter, write

$$f_i(\lambda, \mu) = c_i(\lambda + \alpha_i\mu)(\lambda + \alpha'_i\mu) \quad (i = 1, 2)$$

where  $\alpha_i, \alpha'_i$  are conjugate over  $\mathbb{Q}$ . Much as before, we can lift any rational point on (3) to a point on some variety  $W$  given by the equations

$$(5) \quad (P_i + \alpha_i Q_i)^2 + (R_i + \alpha_i S_i)^2 = (m_i + \alpha_i n_i)(\lambda + \alpha_i \mu) \quad (i = 1, 2)$$

for some  $m_i, n_i$  in  $\mathbb{Q}$ , together with their conjugates over  $\mathbb{Q}$ ; and as before there are only finitely many essentially distinct  $W$  which have points in every completion of  $\mathbb{Q}$ . Eliminating  $\lambda$  and  $\mu$ , we see that  $W$  can be regarded as a very special intersection of two quadrics in  $\mathbf{P}^7$ ; so it has dimension 5 whereas the original  $V$  was a surface. We shall return to this example in §4.

### 1.3 The Hasse Principle

A necessary condition for a variety  $V$  to have points in  $\mathbb{Q}$  is that it has points in every  $\mathbb{Q}_v$ . Conversely, we say that a family of varieties  $V$  satisfies the *Hasse principle* if for each  $V$  in the family

$$V \text{ has points in every } \mathbb{Q}_v \Rightarrow V \text{ has points in } \mathbb{Q}.$$

The Hasse principle is so named because Hasse proved that it held for non-singular quadrics of any dimension over an arbitrary number field – the corresponding property over  $\mathbb{Q}$  having long been known. His proof depended on class field theory, and it seems that any proof that the Hasse principle holds for a particular family of

varieties must depend either on class field theory or on analytical methods. However, it is often possible to prove the Hasse principle for one family of varieties by reducing to the case of another family for which the principle is already known.

One of the reasons for the importance of the Hasse principle is that, for a given variety  $V$ , solubility in every  $\mathbb{Q}_v$  can be tested in a finite number of steps. This is certainly true for  $\mathbb{R}$ , so we need only consider the  $\mathbb{Q}_p$ . If  $V$  has good reduction at  $p$  and  $p$  is not too small, crude estimates show that  $\tilde{V}$  contains nonsingular points defined over  $\text{GF}(p)$ . Hensel's Lemma (which is just Newton's method of successive approximation in a  $p$ -adic context) then shows that  $V$  contains points defined over  $\mathbb{Q}_p$ . Hence the only primes which need individual attention are

- ‘small’ primes, where the definition of ‘small’ depends only on the degree and dimension of  $V$ , and
- primes at which  $V$  has bad reduction; these are finite in number and can easily be listed.

For each such  $n$ , to prove solubility of  $V$  in  $\mathbb{Q}_n$  we have only to find a point of the

appropriate successive approximation algorithm.

For any family  $\mathcal{F}$  of varieties, there are three obvious questions related to the Hasse principle:

- Does  $\mathcal{F}$  satisfy the Hasse principle?
- If not, what is the obstruction to the Hasse principle?
- For what families  $\mathcal{F}$  is the previous question a sensible one to ask?

structure of a commutative group, called the *Brauer group* of  $K$  and written  $\text{Br}(K)$ . For each  $p$  there is a canonical isomorphism  $\iota_p : \text{Br}(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ; and there is a canonical isomorphism  $\iota_\infty : \text{Br}(\mathbb{R}) \simeq \{0, \frac{1}{2}\}$ , the nontrivial division algebra over  $\mathbb{R}$  being the classical quaternions.

Let  $B$  be an element of  $\text{Br}(\mathbb{Q})$ ; tensoring with any  $\mathbb{Q}_v$  induces an element of  $\text{Br}(\mathbb{Q}_v)$  which we can call  $B_v$ . There is an exact sequence

$$0 \longrightarrow \text{Br}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \bigoplus \text{Br}(\mathbb{Q}_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

due to Hasse, in which the third map is the sum of the  $\iota_v$ ; it tells us when a set of elements, one in each  $\text{Br}(\mathbb{Q}_v)$ , can be generated in this way from some element of  $\text{Br}(\mathbb{Q})$ .

Now let  $V$  be a nonsingular variety and  $A$  an Azumaya algebra on  $V$  – that is, a simple algebra with centre  $\mathbb{Q}(V)$  which has a good specialization at every point of  $V$ . If  $P$  is any point of  $V$ , with field of definition  $\mathbb{Q}(P)$ , we obtain a simple algebra  $A(P)$  with centre  $\mathbb{Q}(P)$  by specializing at  $P$ . For all but finitely many  $p$ , we have  $\iota_p(A(P_p)) = 0$  for all  $p$ -adic points  $P_p$  on  $V$ . Thus a necessary condition for the existence of a rational point  $P$  on  $V$  is that for every  $v$  there should be a  $v$ -adic point  $P_v$  on  $V$  such that

$$\sum \iota_v(A(P_v)) = 0 \quad \text{for all } A.$$

This is the *Brauer-Manin condition*. It is clearly unaffected if we add to  $A$  a constant algebra - that is, an element of  $\text{Br}(\mathbb{Q})$ . If  $G = \text{Br}(V)/\text{Br}(\mathbb{Q})$ , the group of equivalence classes of Azumaya algebras on  $V$ , is finite and if one knows a representative of each element of  $G$ , then this condition is computable. Unfortunately, at the moment we only have a straightforward process for computing  $G$  when  $V$  is unirational; and even if we know  $G$  it is not necessarily straightforward to exhibit representatives of its elements. It is generally agreed that the class of varieties for which the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle includes all unirational varieties but is wider than that. It is commonly said that there is no family of varieties for which the Brauer-Manin obstruction is known not to be the only obstruction to the Hasse principle; but this may be because in general so little is known about the Brauer group and therefore about the Brauer-Manin obstruction. The case of elliptic curves is particularly interesting, since for an elliptic curve the Brauer group is closely related to the Tate-Safarevič group. (For definitions, see §3; for a more exact statement, see the paper by Tate listed in §5.)

## 1.5 Zeta-functions and L-series

Let  $\tilde{V}$  be a nonsingular projective variety of dimension  $d$  defined over the finite field  $\text{GF}(q)$  of  $q$  elements. Weil conjectured that there are complex numbers  $\alpha_{\mu\nu}$  with  $|\alpha_{\mu\nu}| = q^{\mu/2}$  such that the number of points on  $\tilde{V}$  defined over  $\text{GF}(q^n)$  is

$$(6) \quad 1 - \sum \alpha_{1\nu}^n + \sum \alpha_{2\nu}^n - \dots + q^{nd}$$

for each  $n$ . His underlying motivation was the analogy with the Lefschetz Fixed Point Theorem, the map of  $\tilde{V}$  to itself in this case being the Frobenius map which replaces

each coordinate of a point by its  $q^{\text{th}}$  power. He implied that there should be a cohomology theory such that the  $\alpha_{\mu\nu}$  for fixed  $\mu$  were the characteristic roots of the action of Frobenius on the cohomology of  $\tilde{V}$  in codimension  $\mu$ . Hasse had already proved these results for curves of genus 1, and Weil proved them for all curves. They have now been proved by Dwork and Deligne for all varieties.

The  $\alpha_{\mu\nu}$  are roots of a characteristic polynomial, which it is convenient to write in the slightly disguised form

$$(7) \quad L_q^\mu(\tilde{V}, x) = \prod_\nu (1 - \alpha_{\mu\nu}x)^{-1}.$$

Now let  $V$  be a nonsingular projective variety defined over  $\mathbb{Q}$  and denote by  $\tilde{V}_p$  the reduction of  $V$  mod  $p$ . If  $V$  has good reduction mod  $p$ , the  $L_p^\mu(\tilde{V}_p)$  are defined by (7), and we can define them in a similar but more complicated way for primes of bad reduction. Write

$$L^\mu(V, s) = \prod_p L_p^\mu(\tilde{V}_p, p^{-s}).$$

The domain of absolute convergence of this product is  $\Re s > 1 + \mu/2$ , but by calling it an L-series we have implicitly conjectured that  $L^\mu(V, s)$  can be analytically continued over the whole  $s$ -plane except for possible isolated poles, and that it satisfies a functional equation of the form

$$\Lambda^\mu(V, \mu + 1 - s) = \pm \Lambda^\mu(V, s)$$

where  $\Lambda$  is the product of  $L$  and certain Gamma-functions. The latter can be regarded as the contribution from the infinite prime.

## 2 Survey

Geometers classify varieties by their discrete-valued invariants. The simplest and most important of these is the dimension  $d$ . Current geometric fashion is to consider next the *Kodaira dimension*  $\kappa$ , which can take the values  $-\infty$  or  $0, \dots, d$  and is defined as follows. Let  $V$  be a projective variety defined over  $\mathbb{C}$  and  $\mathfrak{d}$  a divisor on  $V$ . Denote by  $L(\mathfrak{d})$  the linear space of all functions  $f$  on  $V$  such that  $(f) + \mathfrak{d} \geq 0$ , and assume that  $L(\mathfrak{d})$  contains functions other than 0. Choose a base  $f_0, \dots, f_N$  for  $L(\mathfrak{d})$ ; then there is a rational map  $V \rightarrow \mathbb{P}^N$  defined by

$$P \mapsto (f_0(P), \dots, f_N(P))$$

which, up to a linear transformation in  $\mathbb{P}^N$ , depends only on the divisor class of  $\mathfrak{d}$ . We call it the map of  $V$  into projective space associated with the divisor class of  $\mathfrak{d}$ . Now let  $\mathfrak{k}$  be a canonical divisor on  $V$  and let  $W_n$  be the image of the map of  $V$  associated with  $n\mathfrak{k}$ ; we write  $\kappa = -\infty$  if  $L(n\mathfrak{k})$  consists only of the function 0 for every  $n > 0$  and

$$\kappa = \sup_{n>0} \dim(W_n)$$

otherwise. For number-theoretic purposes the classification given by  $\kappa$  is not entirely satisfactory, but we have to use it for lack of anything better. Classical geometers

obtained a detailed classification of curves and of surfaces with  $\kappa < 2$ , up to birational equivalence over  $\mathbb{C}$ ; present-day geometers aspire to extend this, but progress is patchy. For our purposes, the important distinction is between the four cases  $\kappa = -\infty$ ,  $\kappa = 0$ ,  $0 < \kappa < d$  and  $\kappa = d$ . The two areas in which research on Diophantine problems is currently most active are curves with  $\kappa = 0$  (described in §3) and surfaces with  $\kappa = -\infty$  (described in §4). In the rest of this section, we consider the remaining cases.

## 2.1 Curves

Curves are classified into continuous families by means of one discrete-valued invariant, the genus  $g$ ;  $g = 0$  is equivalent to  $\kappa = -\infty$ ,  $g = 1$  to  $\kappa = 0$  and  $g > 1$  to  $\kappa = 1$ .

For a curve with  $g = 0$ , canonical divisors are just those of degree  $-2$ ; thus if such a curve is defined over  $\mathbb{Q}$  it is birationally equivalent over  $\mathbb{Q}$  to a conic by means of the map induced by  $-t$ . We have already remarked that conics satisfy the Hasse principle; this answers the question of solubility but does not enable us to exhibit a solution. However, it is known that if a conic is written as  $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$  with  $a, b, c$  integers and if this equation has a nontrivial integral solution, then it has one which satisfies the three conditions like  $|X| \leq |bc|$ . This provides an algorithm for constructing a solution when one exists; it also gives a test for solubility, but one which is much less enlightening than the Hasse principle. If a conic has a rational point, then it is equivalent to the projective line; so all other Diophantine questions become trivial.

height of  $P$ , is large, then  $Q$  has smaller height than  $P$ . Here if  $P = (x_0, \dots, x_n)$  is a point of  $\mathbb{P}^n$  where the  $x_\nu$  are integers with no common factor, the height of  $P$  is defined to be

$$(8) \quad h(P) = \max |x_\nu|.$$

(This height is sometimes called the exponential height; some authors prefer the logarithmic height  $\log \max |x_\nu|$ .) This argument gives a sensible upper bound for the order of  $G/2G$  and hence for the number of generators of  $G$ , but we can only evaluate  $[G/2G]$  if we can decide which  $W$  contain points defined over  $K$ . Curves with  $g = 1$  are further treated in §3.

For curves with  $g > 1$ , there is one key result; this was conjectured by Mordell and proved by Faltings, building on ideas of Safarevič, Tate and Zarhin.

**Theorem 2** *Let  $C$  be a curve of genus  $g > 1$  defined over an algebraic number field  $K$ ; then  $C(K)$  is finite.*

The justification of this, and the natural way to try to prove it, is that if we embed  $C$  in its Jacobian  $J$  and use Theorem 1, then it will be enough to show that  $C$  meets any finitely generated subgroup of  $J$  in only finitely many points. This is a purely geometric assertion and is in fact true; unfortunately the only known proof depends on first proving Theorem 2. However, the Theorem has been proved along entirely different lines. A key step is the following:

**Theorem 3 (Safarevič Conjecture)** *Let  $K$  be an algebraic number field and  $\mathcal{S}$  a finite set of places of  $K$ . Then there are only finitely many isomorphism classes of Abelian varieties, of given dimension and polarisation degree, which have good reduction outside  $\mathcal{S}$ .*

The corresponding result for curves of fixed genus follows immediately. Now let  $C$  be a curve with  $g > 1$  defined over an algebraic number field  $K$ . Let  $\mathcal{S}$  be a finite set of places of  $K$ , containing all places lying over 2, such that  $C$  has good reduction outside  $\mathcal{S}$ . There is a finite extension  $K_1$  of  $K$  containing all extensions of  $K$  of degree at most  $2^{2g}$  which are unramified outside  $\mathcal{S}$ . It can now be shown that for some  $N$  depending only on  $C$  and for each point  $P$  of  $C(K)$  there is a curve  $\Gamma_P$  defined over  $K_1$  and a map  $f_P : \Gamma_P \rightarrow C$  of degree at most  $N$  and ramified precisely at  $P$ ; and  $\Gamma_P$  has good reduction outside  $\mathcal{S}$ . The genus of  $\Gamma_P$  is bounded, so by Theorem 3 there are only finitely many curves  $\Gamma_P$ . For each  $\Gamma_P$  there are only finitely many maps  $f_P$ ; this is where the argument uses  $g > 1$ . Hence  $C(K)$  is finite.

Unfortunately this argument does not at present provide an algorithm for constructing  $C(K)$  for any given pair  $C, K$ , nor even for deciding whether  $C(K)$  is empty. It is not beyond hope that such algorithms do exist, but the analogy with Theorem 1 suggests that a radically new approach will be needed.

## 2.2 Varieties of higher dimension

Our questions so far have been solely concerned with rational points. But a variety of dimension  $d$  defined over  $\mathbb{Q}$  contains subvarieties (and more generally  $r$ -cycles) defined over  $\mathbb{Q}$  of each dimension  $r < d$ , and we can equally ask questions

about these. The most natural questions to ask are about  $r$ -cycles modulo algebraic equivalence: for example which cohomology classes in  $H^{2(d-r)}(V)$  contain  $r$ -cycles.

Even if we work over  $\mathbb{C}$  instead of  $\mathbb{Q}$ , this is an arithmetic question; for there is a criterion due to Lefschetz which instructs one to write down certain definite integrals and investigate the linear dependence relations over  $\mathbb{Z}$  between their values. It would be ridiculous to hope that this criterion could be turned into an algorithm; but unexpectedly there is a different (conjectural) line of approach.

**Conjecture 1 (Tate)** *Let  $V$  be a complete non-singular variety defined over  $\mathbb{Q}$  and let  $n$  be the rank of the subgroup of  $H^{2r}(V)$  consisting of those cohomology classes which can be realized by codimension  $r$  subvarieties of  $V$  defined over  $\mathbb{Q}$ . Then the function  $L^{2r}(V, s)$  has a pole of order exactly  $n$  at  $s = r + 1$ .*

The full conjecture includes an interpretation of the value of the leading coefficient of  $L^{2r}(V, s)$  at  $s = r + 1$ . This and the Birch-Swinnerton-Dyer Conjecture below were the fore-runners of what is now a flourishing industry: describing the behaviour of the  $L^n(V, s)$  at integer or half-integer values of  $s$  in terms of the arithmetic or geometric properties of  $V$ . The major figures in this industry are Beilinson, Bloch and Kato, and an impressive and beautiful structure of conjectures has been built up on the basis of a rather limited amount of computation.

When  $d = 2$  the possible values of  $\kappa$  are  $-\infty, 0, 1$  and  $2$ . So far as arithmetic is concerned, there is a substantial body of knowledge only when  $\kappa = -\infty$ , and even there much more is conjectured than we currently know how to prove. It is therefore not surprising that work on varieties with  $d > 2$  has been confined to very particular examples – apart from those varieties, with  $d$  large compared to the degree, to which the Hardy-Littlewood method is applicable. Because there is most to say about the case  $\kappa = -\infty$ , the description will be in the order of  $\kappa$  decreasing.

Varieties with  $\kappa = d$  are known as ‘varieties of general type’, which indicates that they are best avoided. The simplest examples are nonsingular hypersurfaces in  $\mathbb{P}^n$  of degree at least  $n + 2$ . At present there is only one thing that can be said about them:

**Conjecture 2** *If  $V$  is of general type, there is a finite set of proper subvarieties  $W_\nu$  of  $V$  such that every rational point of  $V$  lies on some  $W_\nu$ .*

Theorem 2 is the special case of this with  $d = 1$ ; for the only proper subvarieties of a curve are points. If we knew how to obtain explicitly the  $W_\nu$  corresponding to a given  $V$ , then by induction the search for rational points on any  $V$  of general type would be reduced to similar searches on varieties of lower dimension and not of general type; but this is probably too much to hope for. A first step must be to obtain a description of all subvarieties of  $V$  defined over  $\mathbb{Q}$ , and a first step towards that is given by Conjecture 1.

The Zariski topology on  $V$  is the weakest topology in which all subvarieties are

closed sets. In that language, Conjecture 2 asserts that if  $V$  is of general type, then  $V(\mathbb{Q})$  is not Zariski dense in  $V$ . It is natural to ask whether a property of this kind can be used to characterize varieties of general type. Some adjustment is needed to allow for the fact that there are varieties  $V$  not of general type for which  $V(\mathbb{Q})$  is finite or even empty. Manin has posed the question which varieties  $V$  have the following property: there is no algebraic number field  $K$  such that  $V(K)$  is Zariski dense in  $V$ .

A sensible guess at the answer would be a useful step towards a more satisfactory classification of Diophantine problems.

If  $0 < \kappa < d$  then there is a generically surjective map  $V \rightarrow U$ , where  $U$  is some variety of dimension  $\kappa$ . Very little has been done on this case, probably because the varieties concerned do not have equations which look attractive; but some at least of the problems should be reasonably tractable. The obvious strategy is first to investigate the rational points on  $U$  and then to consider each of the corresponding fibres of the map. Clearly one should only attempt those cases in which there is already a good theory both for  $U$  and for the family which contains the generic fibre.

Surfaces with  $\kappa = 0$  fall into four families, of which the most important are Abelian surfaces and K3 surfaces; the surfaces in the other two families have special cases of these as finite coverings. There is no reason to doubt that the theory of Abelian surfaces, and indeed of Abelian varieties generally, is the natural generalisation of the theory of elliptic curves – except that the theory of modular curves generalises at most to very special classes of Abelian varieties.

The general K3 surface is an analytic object which does not possess a geometric model; the simplest kinds of variety which are K3 surfaces are nonsingular quartics and the nonsingular intersections of three quadrics in  $\mathbb{P}$ . One special but important family of K3 surfaces consists of the Kummer surfaces, which are obtained by desingularizing the quotient of an Abelian surface by the involution  $P \mapsto -P$ . A great deal of work has been done on particular K3 surfaces, and primarily on those which are well equipped with curves. But general conjectures are still lacking: it is not known, for example, whether there can be a K3 surface  $V$  for which  $V(\mathbb{Q})$  is finite but not empty. However, there are now families of K3 surfaces for which one can confidently (though conjecturally) identify and compute the obstruction to the Hasse principle: it looks like a Brauer-Manin obstruction except that it is not clear what the underlying Brauer group is.

Over  $\mathbb{C}$  there are three substantially different ways of characterizing what might be called the nicest families of varieties. To describe them, we need two further definitions. A variety is *Fano* if it can be embedded in projective space by means of  $-n\mathbf{t}$  for some  $n > 0$ , where  $\mathbf{t}$  is canonical. The complete list of Fano three-folds is known; it contains more than one hundred entries. A variety  $V$  is *unirational* if there is a generically surjective map  $\mathbb{P}^N \rightarrow V$  for some  $N$ . For general  $d$  the three alternative characterizations are

- varieties with  $\kappa = -\infty$ ;
- varieties birationally equivalent to a Fano variety;
- unirational varieties.

Even when  $d = 2$  the first of these classes is larger than either of the others, because it includes surfaces of the form  $\mathbb{P}^1 \times \text{curve}$  – which from the number-theorist's point of view cannot be regarded as 'nice'. Geometers also single out rational varieties – that is, ones which are birationally equivalent to some  $\mathbb{P}^n$  over  $\mathbb{C}$ . For surfaces, rational is the same as unirational, but in higher dimensions rationality is something for which it seems hard to provide a purely geometric criterion. Perhaps rationality is another concept which can be defined in purely geometric terms but which is in essence arithmetic, though we have no idea what the arithmetic criteria for it should be. It plays no part in the arithmetic theory as currently formulated.

**Conjecture 3** For any family of unirational or Fano varieties, the only obstruction to the Hasse principle is the Brauer-Manin obstruction.

For many families  $\mathcal{F}$  of unirational varieties, including in particular all unirational surfaces, Colliot-Thélène and Sansuc have defined a canonical lifting  $\{W_v \rightarrow V\}$ , in which they call the  $W_v$  universal torsors. It has the following property:

**Theorem 4 (Colliot-Thélène/Sansuc)** Let  $\mathcal{G}$  be the family consisting of all the universal torsors over varieties in  $\mathcal{F}$ . Then the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle on  $\mathcal{F}$  if and only if the Hasse principle holds for  $\mathcal{G}$ .

We have already seen an instance of this in Example 2, for the varieties (5) are universal torsors over the variety (3) and it follows from classical results that the family which contains them satisfies the Hasse principle. Hence for pencils of conics of the form (3) with the  $f_i$  irreducible, the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle. A more general version of the same argument

shows that this holds for all pencils of conics which have at most four degenerate fibres.

### 3 Curves of genus 1

Let  $C$  be a curve of genus 1. We have already seen that if  $C$  contains a rational point then it can be identified with its Jacobian and the rational points on it form a finitely generated commutative group. It is natural to separate Diophantine problems on curves of genus 1 into two parts:

- Does  $C$  have a rational point?
- If  $C$  is an elliptic curve, describe its Mordell-Weil group  $G$  – that is, the set of rational points on it.

Consider the classes of curves of genus 1 (under birational equivalence over  $\mathbb{Q}$ ) which have points in every  $\mathbb{Q}_v$  and have a given elliptic curve  $E$  as their Jacobian. The set of these classes can be regarded as the obstruction to the Hasse principle for curves with  $E$  as Jacobian. This set has a natural group structure; it is called the *Tate-Safarevič* group of  $E$  and is denoted by  $\text{III}$ . Since it is an obstruction, it will be no surprise that it can also be written as a cohomology group; and indeed it is closely related to the Brauer group of  $E$ . But neither of these facts helps in computing it.

In any particular case, one tackles both the questions above by means of a ‘descent’ process – a special case of lifting which goes back to Fermat. Assume that  $C$  contains points defined over each  $\mathbb{Q}_v$  and let  $E$  be its Jacobian. For any  $n > 1$  there is a lifting of  $C$  in which all the covering varieties are curves which themselves have  $E$  as Jacobian, and in which each fibre of the covering map is a principal homogeneous space under the group of  $n$ -division points on  $E$ . The curves themselves are called *n-coverings* of  $C$ ; the calculation in Example 1 illustrates this process in the particularly simple case when  $C$  is  $E$ ,  $n = 2$  and all the 2-division points on  $E$  are rational. If each covering variety is insoluble in some  $\mathbb{Q}_v$ , then  $C$  itself cannot have rational points; and

torsion part of  $G$  is straightforward. But even if  $\text{III}$  is finite (as is generally believed), this process is far from being an algorithm; and if the  $p$ -component of  $\text{III}$  is infinite then the process will not terminate for any  $n$  divisible by  $p$ .

That describes the state of the theory as it was in about 1960; there seemed to be no loose ends and it was generally accepted that (much as one would like to have them) there probably did not exist algorithms to compute  $G$  or  $\text{III}$ . The only hope of

escaping from this impasse was to introduce a new concept; the right one turned out to be the L-series, which were wholly unfashionable at that time. Changing the notation slightly from that of §1.5, if  $E$  has good reduction at  $p$  we can write the number of points on  $\tilde{E}_p$  defined over  $\text{GF}(p)$  as

$$N_p = 1 - \alpha_p - \alpha'_p + p = (1 - \alpha_p)(1 - \alpha'_p);$$

the density of  $p$ -adic points on  $E$  is then  $N_p/p$ . If  $E$  has bad reduction at  $p$  the corresponding density is  $c_p N_p/p$  where  $c_p$  is the number of components of the Néron model which contain  $p$ -adic points. Similarly we write  $c_\infty = 2$  if  $E(\mathbb{R})$  has two connected components. The only L-series of interest is

$$L(E, s) = \prod \left( (1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \alpha'_p p^{-s}) \right)^{-1},$$

and formally we have

$$L(E, 1) = \prod (p/N_p).$$

Certain rather wild analogies suggest that the faster the product on the right diverges to 0, the larger  $G$  should be. The size of  $G$  is measured by

- the order of its torsion subgroup  $G_{\text{tor}}$ ,
- $r$ , the number of generators of infinite order, and
- $R$ , the regulator, which is analogous to the regulator of a number field.

There is a canonical height on  $G$ , defined by

$$h^*(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \log h(nP)$$

where  $h$  is as in (8); it has the property that if  $P_1, \dots, P_r$  are a base for  $G/G_{\text{tor}}$  and

$$P \equiv n_1 P_1 + \dots + n_r P_r \pmod{G_{\text{tor}}},$$

then  $h^*(P)$  is equal to a quadratic form in the  $n_i$ . The regulator is just the discriminant of this quadratic form.

There are two kinds of elliptic curve for which  $L(E, s)$  can be analytically continued over the whole  $s$ -plane: curves with complex multiplication and modular

The first of these is due to Hecke, the second to Eichler, Shimura and Deuring.

Here  $\Omega$  is the real period of  $E$  and the product is over all places of bad reduction, finite or infinite. This statement of course presupposes that  $|\text{III}|$  is finite. There is an alternative formulation of (9) which brings out the similarity to other density theorems. For this we have to introduce the function

$$f(E, s) = \sum \exp(-\pi s h^*(P))$$

where the sum is taken over all rational points  $P$  on  $E$ . Now we can rewrite (9) in the

form

$$(10) \quad \Omega^{-1} L(V, s+1) (f(E, s))^2 \rightarrow |\text{III}| \prod c_v$$

as  $s \rightarrow 0$  through real positive values.

A typical family of curves  $E$  with complex multiplication is  $Y^2 = X^3 - DX$  for which  $\text{End}(E) \sim \mathbb{Z}[i]$ ; in this case it is easy to show that  $\alpha_p$  must be in  $\mathbb{Z}[i]$  if  $p \equiv 1 \pmod{4}$  and  $N_p = p + 1$  if  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Some easy congruences now determine the  $\alpha_p$  and it turns out that  $L(E, s)$  is a Hecke L-series. This provides analytic

$\Omega^{-1} |G_{\text{tor}}|^2 L(E, 1)$  is a rational integer. In the many numerical cases that have been computed, it is 0 if  $r > 0$  and  $\prod c_v$  times a non-zero square if  $r = 0$ ; and it is known that  $|\text{III}|$  is a square if it is finite.

When  $E$  has complex multiplication, the conjecture is now known to be true, except perhaps for the powers of bad primes in  $|\text{III}|$ , whenever  $L(E, s)$  has at most a simple zero at  $s = 1$ . [Coates/Wiles, ...]

*Modular curves* are curves parametrized by elliptic modular functions: the

suggested that this point was nontrivial precisely when  $r = 1$ . Kolyvagin has shown that if  $L(E, s)$  has at most a simple zero at  $s = 1$  then  $|\text{III}|$  is finite and  $r$  is equal to the order of the zero at  $s = 1$ . Gross and Zagier have shown that if  $L(E, s)$  has a simple zero at  $s = 1$  then  $L'(E, 1)/R\Omega$  is rational and the Heegner point is a point of infinite order.

The conjectures of Birch/Swinnerton-Dyer and Weil/Taniyama together imply that for curves  $C$  of genus 1 defined over  $\mathbb{Q}$  there are algorithms to decide each of the three following problems:

- Does  $C$  have a rational point?
- If so, find a set of generators for its Mordell-Weil group.
- Also if so, determine the order of  $|\text{III}|$ .

For conductors of moderate size, it would be perfectly feasible to implement these algorithms.

## 4 Rational Surfaces

If one ignores  $\mathbb{P}^2$  and quadrics, up to birational equivalence over  $\mathbb{Q}$  rational surfaces fall into two classes: pencils of conics and Del Pezzo surfaces. Any pencil of conics can be written in the form

$$(11) \quad a_0(\lambda, \mu)X_0^2 + a_1(\lambda, \mu)X_1^2 + a_2(\lambda, \mu)X_2^2 = 0$$

where the  $a_i$  are homogeneous polynomials of the same degree. They are divided into families according to the number of degenerate fibres. Over  $\mathbb{C}$  a Del Pezzo surface of degree  $d$  is obtained from  $\mathbb{P}^2$  by blowing up  $(9 - d)$  points in general position; here  $1 \leq d \leq 9$  but we can ignore the cases when  $d = 7, 8$  or  $9$  because their number-theory reduces to that of quadrics. Del Pezzo surfaces of degree 6 satisfy the Hasse principle, those of degree 5 contain rational points unconditionally, and for aesthetic reasons those of degrees 2 and 1 have been little studied. Both geometers and arithmeticians have concentrated on Del Pezzo surfaces of degree 3, which are the nonsingular cubic surfaces, and to a lesser extent on those of degree 4, which are the nonsingular intersections of two quadrics in  $\mathbb{P}^4$ . Despite this bias, the problems connected with the latter are in fact the easier.

Neither pencils of conics nor Del Pezzo surfaces of degree 3 or 4 satisfy the Hasse principle. The simplest counter-example is

$$(12) \quad X^2 + Y^2 = (3\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - 2\lambda^2)Z^2.$$

It is straightforward to verify that this can be solved in every  $\mathbb{Q}_v$ . In looking for solutions in  $\mathbb{Q}$  we can take  $\lambda, \mu$  to be coprime integers. Then  $3\lambda^2 - \mu^2$  and  $\mu^2 - 2\lambda^2$  are coprime and positive, and their product is the sum of two squares; so each of them must be the sum of two squares. But solubility in  $\mathbb{Q}_2$  requires  $\lambda$  odd and  $4|\mu$ ; so  $3\lambda^2 - \mu^2 \equiv 3 \pmod{4}$ , and this is a contradiction. Another way of phrasing the same argument is to use the lifting process in Example 2; it turns out that the rational points on (12) can be lifted to the null set. Similar arguments show that

$$X^2 + Y^2 = \mu(4\lambda + 7\mu)(2\mu^2 - \lambda^2)Z^2$$

has rational points in  $\lambda/\mu < -7/4$  but none in  $\lambda^2 < 2\mu^2$ . This last example raises new questions. We say that a family  $\mathcal{F}$  admits *weak approximation* if any  $V$  in  $\mathcal{F}$  containing rational points satisfies the following condition: for each of a finite set of places  $v_i$  let  $P_i$  be a  $v_i$ -adic point of  $V$ ; then there is a rational point  $P$  on  $V$  which is arbitrarily close to each  $P_i$  in the  $v_i$ -adic topology. Some of the main Diophantine problems for families of rational surfaces are:

- Does the Hasse principle hold, and if not, what is the obstruction to it?
- Does weak approximation hold, and if not, what is the obstruction to it?
- If we know some rational points on a rational variety  $V$ , is there a construction for generating further ones?
- Is there a lifting  $\{W_v \rightarrow V\}$  in which every  $W$  is a  $\mathbb{P}^N$  – in other words, is there a finite set of parametric solutions which between them give all rational points of  $V$ ?
- Can we give an estimate for the number of rational points on  $V$  with height less than  $X$ ?

It is conjectured that the only obstruction to the Hasse principle is the Brauer-Manin obstruction, and that the only obstruction to weak approximation is the obvious analogue to it. For Del Pezzo surfaces we can generate new rational points from old ones, but for pencils of conics with more than four degenerate fibres we do not know how to do so.

The lifting question is almost entirely open, and we do not even know what the answer should be; but it can be shown that we normally need to take  $N > 2$  and that we cannot expect to get all rational points from a single parametric solution. Both these statements can be illustrated by the case of conic bundles with four degenerate fibres, where each universal torsor  $W$  is an intersection of two quadrics in  $\mathbb{P}^7$  with the following property: there is a quadratic extension  $K/\mathbb{Q}$  such that  $W$  contains two disjoint linear threefolds  $L', L''$  conjugate over  $\mathbb{Q}$  and each defined over  $K$ . (The case worked out in Example 2 is typical.) Now let  $P_0$  be a fixed rational point of  $W$ , let  $P'$  run through the points of  $L'$  defined over  $K$  and let  $P''$  be the conjugate of  $P'$  over  $\mathbb{Q}$ . The plane  $P_0P'P''$  meets  $W$  in one further point  $P$ , which is rational; this gives a parametrization of the rational points on  $W$  and hence of those rational points on  $V$  which lift to  $W$ .

For pencils of conics, some progress has been made towards showing that the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle. The case when the pencil has four degenerate fibres has already been described after Theorem 4; we now consider the general case. We take the pencil in the form (11) with the  $a_i(\lambda, \mu)$  in  $\mathbb{Z}[\lambda, \mu]$ , and we assume that (11) is soluble in each  $\mathbb{Q}_v$ . By absorbing suitable factors into the  $X_i$ , we can replace the condition that the  $a_i$  have the same degree by the condition that they are coprime; note that their degrees will still have the same parity. We define the bad places for (11) to be 2 and  $\infty$ , primes which divide the discriminant of  $a_0a_1a_2$  and primes  $p \leq \sum \deg(a_i)$ . (In general, bad places for any Diophantine equation are those which it can be predicted in advance will cause trouble in the subsequent argument.) For each bad place  $v$  we impose  $v$ -adic conditions on  $\lambda, \mu$  strong enough to ensure that the resulting conic is soluble in  $\mathbb{Q}_v$ . It would now be enough to choose  $\lambda, \mu$  in  $\mathbb{Z}$  so that the equation is soluble with  $X_i$  in  $\mathbb{Q}_p$  for each good  $p$  which divides some  $a_i(\lambda, \mu)$ . Unfortunately we do not know which these  $p$  are until we

have chosen  $\lambda, \mu$ ; but we can proceed as follows. Let the  $c_{ij}(\lambda, \mu)$  be obtained by taking the irreducible factors of  $a_i(\lambda, \mu)$  and removing the powers of bad primes which divide their values; and consider the three sets of functions like

$$\{\lambda, \mu\} \mapsto \begin{pmatrix} -a_1(\lambda, \mu)a_2(\lambda, \mu) \\ c_{0j}(\lambda, \mu) \end{pmatrix}$$

where the outside bracket is the quadratic residue symbol. (A neater definition can be given with the help of the Hilbert symbol.) These functions are well-defined when  $\lambda, \mu$  are coprime, and a necessary condition for the solubility of (11) is that they all have the value +1.

It turns out that these functions are continuous in the topology induced by the bad places; the proof of this uses the fact that all the  $\deg(a_i)$  have the same parity. It can also be shown that there exist  $\lambda, \mu$  which give all these functions the value +1 if and only if the Brauer-Manin condition holds. If we could choose  $\lambda, \mu$  so that all the  $c_{ij}(\lambda, \mu)$  were prime, then our necessary conditions for solubility would also be sufficient; in other words, we would have shown that the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle for pencils of conics. There are two approaches to this, neither of which quite achieves it: by using Schinzel's Hypothesis or by making a field extension.

**Conjecture 5 (Schinzel's Hypothesis)** *Let the  $F_\nu(X)$  be finitely many nonconstant irreducible polynomials in  $\mathbb{Z}[X]$  with positive leading coefficients, and suppose that for each  $p$  there exists  $n = n(p)$  such that none of the  $F_\nu(n)$  is divisible by  $p$ . (This condition is automatically satisfied if  $p > \sum \deg(F_\nu)$ .) Then we can find an integer  $N$  such that all the  $F_\nu(N)$  are prime.*

On probabilistic grounds one expects this to be true, though no sane person would attempt to prove it. It is precisely what one needs to complete the argument above; so one can at least conclude that it would be a waste of time to look for any further obstruction to the Hasse principle for pencils of conics. The alternative approach depends on the following rather technical result.

**Lemma 1** *Let the  $F_\nu(X)$  be as for Schinzel's Hypothesis. For any  $d > \sum \deg(F_\nu)$  there is a field  $K$  with  $[K : \mathbb{Q}] = d$  and an integer  $\alpha$  in  $K$  such that each of the  $F_\nu(\alpha)$  is a prime in  $K$ .*

It follows from this that provided the Brauer-Manin condition holds we can at least find a point on (11) defined over  $K$ ; taking  $d$  odd we derive a rational 0-cycle of degree 1 on (11). This raises the question which families of (unirational) varieties have the following property: if  $V$  contains a rational 0-cycle of degree 1 then it contains a rational point. This is known to be true for nonsingular intersections of two quadrics in  $\mathbb{P}$ , and it is undecided for nonsingular cubic surfaces; unfortunately it can be shown to be false for pencils of conics.

The key to the argument above is that conics satisfy the Hasse principle, and the same ideas can be applied to many (although not all) pencils of varieties which satisfy the Hasse principle. If we try to apply it to Del Pezzo surfaces, we encounter a difficulty: the only known ways of obtaining curves of genus 0 defined over  $\mathbb{Q}$  on such a surface depend on first knowing a rational point on it. It is easy to find pencils

of curves of genus 1, but such curves do not satisfy the Hasse principle. There is however a way out of this difficulty:

**Lemma 2** *Let  $E$  be an elliptic curve and denote by  $\Gamma$  the group of those of its 2-coverings which are soluble in every  $\mathbb{Q}_v$ . Suppose that  $\text{III}(E)$  is finite. If more than one quarter of the elements of  $\Gamma$  are soluble in  $\mathbb{Q}$ , then all of them are.*

This follows at once from the existence of the Cassels skew-symmetric form on  $\text{III}$ . By methods similar to those above, but much more complicated, it is now possible to prove the existence of rational points on certain very special pencils of 2-coverings of elliptic curves. The obstruction to the Hasse principle is computable, and looks very much like a Brauer-Manin obstruction; the difficulty about identifying it as such in

but

$$(14) \quad \prod_p (1 - p^{-s} \sum_\nu \alpha_{2\nu} + p^{-2s})^{-1},$$

because this is the product whose behaviour as  $s \rightarrow 2$  gives an acceptable interpretation of  $\prod(p^2/N_p)$ . On the other hand, we would also expect the function on the right of (13) to be an L-series in the sense of having analytic continuation and a functional equation; and there is no reason to expect that (14) has either of these. The most likely way of clarifying the situation is by extensive computation.

## 5 Further Reading

A comprehensive bibliography would double the length of this article, without necessarily being very useful. Many results and conjectures have been common knowledge among the experts long before they were published, and many results which are ascribed to one person actually first appeared in an expository article by another. Among the most seminal papers in the modern theory are:

- A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques, *Acta Math.* 52 (1928), 281-315.
- J. Tate, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analogue, *Séminaire Bourbaki* 1965-66 No. 306.
- J. Coates and A. Wiles, On the conjecture of Birch-Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* 39 (1977), 223-251.
- P. Vojta, Diophantine approximations and value distribution theory, Springer Lecture Notes 1239 (1987).
- V.A. Kolyvagin, Finiteness of  $E(\mathbb{Q})$  and  $\text{III}(E/\mathbb{Q})$  for a class of Weil curves, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 52 (1988), 522-540, translation *Math. USSR Izv.* 32 (1989), 523-541.

More detailed surveys of parts of the subject, each of which contains a comprehensive

bibliography, are:

- J. Manin and J.A. Tschafman, Rational varieties, algebra, geometry and arithmetic, *Uspekhi Mat. Nauk* 41 (1986), 43-94, translation *Russian Math. Surveys* 41 (1986), 51-116.
- D. Husemöller, Elliptic Curves (Springer, 1986).
- S. Lang, Number Theory III (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 60) (Springer, 1991).
- W.W.J. Hulsbergen, Conjectures in Arithmetic Algebraic Geometry (Aspects of Mathematics, vol. E18) (Vieweg, 1992).



Lou van den Dries, Urbana

## Introduction

The first papers on o-minimal structures appeared about a decade ago, see [5], [19], [14]. Since then the subject has grown into a wide ranging generalization of semialgebraic and subanalytic geometry and topology. (Basic references are [3],

establishing o-minimality of expansions of the real field. Khovanskii's theorem also played a key role in the proof.

Khovanskii used his results to obtain information on the topology of zero sets of “fewnomials” (polynomials with few terms). The idea is that one can replace a monomial  $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$  via the transformation of variables  $x_1 = e^{y_1}, \dots, x_n = e^{y_n}$  by the exponential  $\exp(i_1 y_1 + \dots + i_n y_n)$ . Similarly, Wilkie's theorem can be used in combination with the generic triviality theorem for o-minimal structures (see next section) to obtain the following finiteness result on fewnomials.

**Application.** *Let  $m, n$  be given natural numbers. Then there are only finitely many (embedded) topological types among the subsets of  $\mathbf{R}^n$  of the form  $\{x \in \mathbf{R}^n : P(x) = 0\}$ , where  $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$  has at most  $m$  monomials (with no restriction on the degree of  $P$ ).*

More generally, one can establish in this way a qualitative form of the Benedetti-Risler conjecture [1, p.214] for semialgebraic sets of bounded additive complexity, see [6, Ch.9]. An ambitious goal is to explain other finiteness phenomena in real algebraic and real analytic geometry as consequences of “o-minimality”. In this connection it may be worth considering Hilbert's 16th problem on limit cycles, and the deep work of Il'yashenko and Ecalle on Dulac's conjecture. Let us now turn to the definition of “o-minimal structure on the real field” and give some examples.

In the following we let  $\bar{\mathbf{R}} := (\mathbf{R}, +, \cdot)$  denote the field of real numbers.

**Definition.** An *o-minimal structure*  $\mathcal{S}$  on  $\bar{\mathbf{R}}$  consists of a boolean algebra  $\mathcal{S}_n$  of subsets of  $\mathbf{R}^n$  for all  $n$ , such that

1.  $\Delta_{ij} := \{x \in \mathbf{R}^n : x_i = x_j\} \in \mathcal{S}_n$ , where  $1 \leq i < j \leq n$ .
2.  $A \in \mathcal{S}_n \Rightarrow \mathbf{R} \times A, A \times \mathbf{R} \in \mathcal{S}_{n+1}$ .
3.  $A \in \mathcal{S}_{n+1} \Rightarrow \pi(A) \in \mathcal{S}_n$ , where  $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$  is given by  $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ .
4. The graphs of  $+$  and  $\cdot$  belong to  $\mathcal{S}_3$ .
5. The sets in  $\mathcal{S}_1$  are exactly the subsets of  $\mathbf{R}$  that have only finitely many connected components, that is, the finite unions of intervals of all kinds. (“O-minimality axiom”.)

The first three axioms together with the boolean algebra requirement express that the system of sets  $\mathcal{S}$  is closed under “first-order definability”. The o-minimality axiom can be viewed as expressing compatibility with the order (and hence topology) of the real line. It is the simplest compatibility condition of this kind, which explains the term “o-minimal” (= “order-minimal”).

### Examples.

- (i) The semialgebraic sets in  $\mathbf{R}^n$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$  (Tarski [22]).
- (ii) The subsets of  $\mathbf{R}^n$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$  that are subanalytic in the projective space  $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$  (Gabrielov [10]).
- (iii) The subexponential sets in  $\mathbf{R}^n$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$  (Wilkie [23]).

(iv) The images in  $\mathbf{R}^n$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$  under projection maps  $\mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^n$  of sets of the form

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+k} : P(x, y, e^x, e^y) = 0, f(x, y) = 0\}$$

where  $P$  is a real polynomial in  $2(n+k)$  variables and  $f: \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}$  is a function such that  $f|_{[-1, 1]^{n+k}}$  is analytic, and  $f$  is identically zero outside  $[-1, 1]^{n+k}$ . (See in particular [8].)

For those not familiar with subanalytic sets, I might mention that the subsets of  $\mathbf{R}^n$  that are subanalytic in  $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$  can also be described as the images in  $\mathbf{R}^n$  under projection maps  $\mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^n$  of sets of the form

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+k} : P(x, y) = 0, f(x, y) = 0\}$$

where  $P$  is a real polynomial in  $n+k$  variables and  $f: \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}$  is a function such that  $f|_{[-1, 1]^{n+k}}$  is analytic, and  $f$  is identically zero outside  $[-1, 1]^{n+k}$ . The class of semialgebraic sets is (in obvious sense) the smallest o-minimal structure on the real field. Example (iv) is the smallest o-minimal structure on the real field that contains

the o-minimal structures of examples (ii) and (iii). All other well-documented

make some remarks on work in progress to construct o-minimal structures on  $\bar{\mathbf{R}}$  that are not contained in example (iv). (It is not known if for any two o-minimal structures on  $\bar{\mathbf{R}}$  there is a third one that contains them both.) Next I discuss general properties of o-minimal structures on  $\bar{\mathbf{R}}$ .

These two theorems have many consequences. Here are some. Let  $A \subseteq \mathbf{R}^m$  belong to  $\mathcal{S}$ , and let the (not necessarily continuous) map  $f: A \rightarrow \mathbf{R}^n$  belong to  $\mathcal{S}$ , and let  $r$  be a positive integer.

1.  $A$  has only finitely many connected components, and each component belongs to  $\mathcal{S}$  and is path connected.
  2. There is a partition of  $A$  into finitely many cells, such that each cell is a  $C^r$  submanifold of  $\mathbf{R}^m$  and the restriction of  $f$  to each cell is of class  $C^r$ .
  3.  $A$  has a well defined dimension  $\dim A \in \{-\infty, 0, 1, \dots, m\}$ , with  $\dim A = -\infty$  iff  $A = \emptyset$ , and  $\dim A = 0$  iff  $A$  is finite and  $\neq \emptyset$ .
  4.  $\dim A \geq \dim f(A)$ , with equality if  $f$  is injective; also for each  $d \in \{0, \dots, m\}$  the set  $R_d := \{v \in \mathbf{R}^n : \dim f^{-1}(v) = d\}$  belongs to  $\mathcal{S}$  and  $\dim(f^{-1}(B)) = \dim(B) + d$ .
- 
- 
- 
- 
- 

5.  $\dim(\text{cl}(A) - A) < \dim A$  if  $A \neq \emptyset$ .
6. (“Curve Selection.”) If  $a \in \text{cl}(A)$ , then there is a map  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^m$  of class  $C^r$  belonging to  $\mathcal{S}$  such that  $\gamma(0) = a$  and  $\gamma(t) \in A$  for  $0 < t \leq 1$ .
7. There is a Whitney stratification of  $\mathbf{R}^m$  into finitely many cells that are also  $C^r$  submanifolds of  $\mathbf{R}^m$  and such that  $A$  is a union of strata.

For the particular o-minimal structures mentioned in the introduction the items 2, 6 and 7 are even true with  $r = \omega$ , where “ $C^\omega$ ” means “analytic”.

These results are roughly proved in the order indicated. Somewhat deeper lie the next two theorems.

**Triangulation.** *There is a finite simplicial complex  $K$  in  $\mathbf{R}^m$  and a homeomorphism from  $A$  onto a finite union of open simplices of  $K$ .*

**Generic Triviality.** *If  $f$  is continuous, then there is a partition of  $f(A)$  into cells  $B_1, \dots, B_k$  such that  $f$  is  $\mathcal{S}$ -trivial above each  $B_i$ , in particular, if  $x, y \in B_i$ , then the fibers  $f^{-1}(x)$  and  $f^{-1}(y)$  are homeomorphic by a homeomorphism in  $\mathcal{S}$ .*

In the semialgebraic case “generic triviality” is due to Hardt [11]. In combination with Wilkie’s theorem the generic triviality theorem implies the result about the Benedetti-Risler conjecture that I mentioned in the Introduction (see [6, chapter 9] for details).

Shiota [21] has announced the following impressive result.

**“Hauptvermutung” for  $\mathcal{S}$ .** *If  $K, L$  are finite simplicial complexes in  $\mathbf{R}^n$  and there is a homeomorphism  $|K| \simeq |L|$  in  $\mathcal{S}$ , then there is a piecewise linear such homeomorphism.*

Here the definition of “finite simplicial complex  $K$  in  $\mathbf{R}^n$ ” includes the requirement that each face of a simplex in  $K$  is also in  $K$ ; hence  $|K| \subseteq \mathbf{R}^n$  is compact.

Next some results in a different vein. Let  $S \subset \mathbf{R}^{m+n}$  belong to  $\mathcal{S}$ . For  $x \in \mathbf{R}^m$

**Theorem on limits.** *If  $Y \subseteq \mathbf{R}^n$  is a limit of  $\{S_x : x \in \mathbf{R}^m\}$ , then  $Y$  belongs to  $\mathcal{S}$ . In fact, there is a set  $S' \subseteq \mathbf{R}^{M+n}$  in  $\mathcal{S}$  for some  $M$ , such that  $\{S'_{x'} : x' \in \mathbf{R}^M\}$  is the collection of all limits of  $\{S_x : x \in \mathbf{R}^m\}$ .*

This theorem remains true with “Hausdorff limits” instead of “limits”. (A set  $Y \subseteq \mathbf{R}^n$  is called a Hausdorff limit of the collection  $\{S_x : x \in \mathbf{R}^m\}$  if for each  $\varepsilon > 0$  and each  $R > 0$  there is  $x \in \mathbf{R}^m$  such that each point of  $Y \cap B(R)$  is at distance  $< \varepsilon$  from a point of  $S_x$ , and each point of  $S_x \cap B(R)$  is at distance  $< \varepsilon$  from a point of  $Y$ , where  $B(R)$  denotes the euclidean open ball of radius  $R$  in  $\mathbf{R}^n$  centered at the origin.)

Here is a purely combinatorial result about such collections:

**Theorem.** *There are numbers  $C = C(S) > 0$  and  $d = d(S) \in \mathbf{N}$  such that each finite set  $F \in \mathbf{R}^n$  has at most  $C \cdot \text{card}(F)^d$  subsets of the form  $F \cap S_x$  with  $x \in \mathbf{R}^m$ .*

This results expresses in a purely combinatorial way that the variation among the sets  $S_x$  is highly restricted as  $x$  ranges over  $\mathbf{R}^m$ . In probabilistic terms it means that  $\{S_x : x \in \mathbf{R}^m\}$  is a Vapnik-Chervonenkis class. See Laskowski [15] for a proof of the theorem above. There is work in progress on making this kind of result quantitatively more precise (Wilkie, Macintyre, Sontag). Vapnik-Chervonenkis classes play a role in mathematical learning theory, neural networks, and other computer science oriented subjects.

## Further Results

We now come to some results closely related to the monotonicity theorem. Note that by this theorem the germs at  $+\infty$  of the functions  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  belonging to  $\mathcal{S}$  form a Hardy field. (See Bourbaki [4] and Rosenlicht [20] for the basic theory of Hardy fields.) This calls our attention to the possible growth orders of one-variable functions belonging to  $\mathcal{S}$ . Here we have the following surprising dichotomy among o-minimal structures on the field of real numbers, discovered by Miller [18].

**Theorem.** – *Either each function  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  in  $\mathcal{S}$  is polynomially bounded towards  $+\infty$  (i.e., there is  $d = d(f) \in \mathbf{N}$  and  $C = C(f) > 0$  such that  $|f(x)| \leq x^d$  for all  $x > C$ ), – or the exponential function  $\exp: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  belongs to  $\mathcal{S}$ .*

If we are in the first case we call  $\mathcal{S}$  polynomially bounded. The first two examples (class of semialgebraic sets and class of finitely subanalytic sets) are polynomially bounded, the last two are clearly not. The usual Łojasiewicz inequalities go through for polynomially bounded  $\mathcal{S}$ , as the next results indicate.

**Theorem.** *Suppose  $\mathcal{S}$  is polynomially bounded. Let  $f, g: A \rightarrow \mathbf{R}$  be continuous and belong to  $\mathcal{S}$  with  $A \subseteq \mathbf{R}^m$  closed in  $\mathbf{R}^m$ , and suppose that  $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$ . Then  $g^N = hf$  for some positive integer  $N$  and some continuous function  $h: A \rightarrow \mathbf{R}$  in  $\mathcal{S}$ . (Hence, if  $A$  is compact, there is a constant  $C > 0$  such that  $|g|^N \leq C|f|$ .)*

In applications one often takes for  $g$  the distance to  $f^{-1}(0)$ , or for  $f$  the distance to  $g^{-1}(0)$ . This inequality has numerous consequences: Hölder continuity

of continuous functions in  $\mathcal{S}$  on compact sets, descending chain condition for zero sets of  $C^\infty$  functions in  $\mathcal{S}$ , and so on.

There is a generalization of the Łojasiewicz inequality to arbitrary  $\mathcal{S}$ . The point is simply to replace “taking the  $N$ -th power” by another suitable one-variable function:

*With  $f, g, A$  as in the last theorem and  $r$  any positive integer we have*

$$\phi \circ g = h f$$

*for some continuous  $h : A \rightarrow \mathbf{R}$  in  $\mathcal{S}$  and some strictly increasing odd function  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  in  $\mathcal{S}$  of class  $C^r$  with  $\phi^{(i)}(0) = 0$  for all  $i < r$ .*

Here are some related results. The first one is due to Bierstone, Milman and Pawłucki in the subanalytic case.

*Each closed set  $A \subseteq \mathbf{R}^m$  in  $\mathcal{S}$  is of the form  $A = f^{-1}(0)$  for some  $C^r$  function  $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  in  $\mathcal{S}$ .*

*Each path in  $\mathbf{R}^n$  belonging to  $\mathcal{S}$  is rectifiable. (Here a path in  $\mathbf{R}^n$  is simply a continuous map  $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ .)*

*If  $A \subseteq \mathbf{R}^m$  belongs to  $\mathcal{S}$  and is compact and connected, then each two points  $x, y \in A$  can be connected by a rectifiable path in  $A$  belonging to  $\mathcal{S}$  of length at most  $\phi(|x - y|)$  with  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  a continuous strictly increasing odd function in  $\mathcal{S}$ .*

## New O-minimal Structures on the Real Field

One attractive goal is to show that any “tame” behaving (real) functions that arise in mathematical nature belong to an o-minimal structure on  $\bar{\mathbf{R}}$ . Here “tame behaviour” would imply such properties as having only finitely many zeros, etc. In fact, there are whole classes of such functions, of which I mention only the following:

- (1) Functions given near  $+\infty$  by convergent Dirichlet series.
- (2) Functions given near  $+\infty$  by (possibly divergent) Borel summable power series.

Work is in progress to construct an o-minimal structure on  $\bar{\mathbf{R}}$  containing the functions in (1), and another one containing the functions in (2).

## Final Remarks

It hardly needs to be mentioned that most results above are actually known in more general form. Also, they have various sharpenings, especially for particular o-minimal structures. I refer to the literature for details. I might also mention that almost all the results above can be obtained by more or less direct geometric means. Notable exceptions are Wilkie’s theorem and its successors, and the result on (Hausdorff) limits of  $\mathcal{S}$ -collections; in these cases the only known proofs depend on (elementary) model theory.

## References

- [1] Benedetti, R.; Risler, J.-J.: Real algebraic and semi-algebraic sets. Paris: Hermann 1990
- [2] Bierstone, E.; Milman, P.: Semianalytic and subanalytic sets. IHES Publ. Math. **67** (1988) 5–42
- [3] Bochnak, J.; Coste, M.; Roy, M.-F.: Géométrie algébrique réelle. Ergebnisse der Math. und ihre Grenzgebiete, 3. Folge, Band 1. Berlin – Heidelberg: Springer 1987
- [4] Bourbaki, N.: Fonctions d'une Variable Réelle, Chap. V, Appendice. Paris: Hermann 1951
- [5] van den Dries, L.: Tarski's problem on  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$ , Logic Colloquium '82. Lolli, G.; Longo, G.; Marcja, A. (eds.), North-Holland, 1984, pp. 97–121
- [6] van den Dries, L.: Tame topology and o-minimal structures, to appear as LMS Lecture notes, Cambridge University Press
- [7] van den Dries, L.: O-minimal structures, to appear in proceedings of the ASL meeting, Keele '93
- [8] van den Dries, L.; Macintyre, A.; Marker, D.: The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation. Annals of Math. **140** (1994) 183–205
- [9] van den Dries, L.; Miller, C.: Analytic-geometric categories and o-minimal structure. Duke Math. Jour. **84** (1996) 497–540
- [10] Gabrielov, A.: Projections of semi-analytic sets. Functional Analysis and its Applications **2** (1968) 282–291
- [11] Hardt, R.: Semi-algebraic local triviality in semi-algebraic mappings. Amer. J. Math. **102** (1980) 291–302
- [12] Hironaka, H.: Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps. Lecture Notes, Istituto Matematico "L. Tonelli", Pisa 1973
- [13] Khovanskii, A.: Fewnomials, Translations of Mathematical Monographs. Vol. 88, AMS 1991
- [14] Knight, J.; Pillay, A.; Steinhorn, C.: Definable sets in ordered structures. II, Trans. AMS **295** (1986) 593–605
- [15] Laskowski, C.: Vapnik-Chervonenkis classes of definable sets. J. London Math. Soc. **245** (1992) 377–384
- [16] Łojasiewicz, S.: Ensembles semi-analytiques. Lecture Notes, IHES, Bures-sur-Yvettes 1995
- [17] Marker, D.; Steinhorn, C.: Definable types in o-minimal structures. Journal Symb. Logic **59** (1994) 185–198
- [18] Miller, C.: Exponentiation is hard to avoid. Proc. AMS **122** (1994) 257–259
- [19] Pillay, A.; Steinhorn, C.: Definable sets in ordered structures. I, Trans. AMS **295** (1986) 565–592
- [20] Rosenlicht, M.: The rank of a Hardy field. Trans. AMS **280** (1983) 659–671
- [21] Shiota, M.: Geometry of Subanalytic and Semialgebraic sets. In: Broglia, F. et al., (ed.): Abstract, Real analytic and algebraic geometry. W. de Gruyter 1995, pp. 251–275
- [22] Tarski, A.: A decision method for elementary algebra and geometry, 2nd ed. revised. Berkeley and Los Angeles 1951
- [23] Wilkie, A.: Model completeness results for expansions of the real field by restricted Pfaffian functions and the exponential function. Journal of the AMS (to appear)

Lou P. van den Dries  
 University of Illinois at Urbana-Champaign  
 Department of Mathematics  
 Urbana, IL 61801 USA  
 email address: vddries@math.uiuc.edu

(Eingegangen 5. 1. 1996)



## Buchbesprechungen

**DeVore, R. A., Lorentz, G. G., Constructive Approximation** (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 303), Berlin u. a.: Springer Verlag 1993, 449 S., DM 168,-

Die konstruktive Approximation behandelt quantitative Erweiterungen des Weierstraßschen Approximationssatzes. Sind  $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset F$  endlichdimensionale lineare Teilräume eines normierten Raumes  $F$ , so fragt man für gegebene  $f \in F$  nach dem Verhalten der Approximationsfehler

$$E_n(f) := \inf_{v \in V_n} \|f - v\|$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Es genügt dabei nicht, wie beim Satz von Weierstraß eine Dichtheitsaussage für  $\bigcup_{n \geq 0} V_n$  in  $F$  im Sinne von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0 \quad \text{für alle } f \in F$$

anzustreben, sondern man will die Konvergenzgeschwindigkeit von  $E_n(f)$  gegen Null möglichst genau bestimmen, und zwar in Abhängigkeit von Glätteeigenschaften von  $f$ , die durch geeignete Stetigkeitsmoduli beschrieben werden. Die Frage nach der Konvergenzgeschwindigkeit von Fourierreihen ist ein Spezialfall dieser Problemstellung, und deshalb ist die konstruktive Approximation eine moderne Fortsetzung eines klassischen Teilgebiets der reellen Analysis.

Besondere Wichtigkeit erhält die konstruktive Approximation durch moderne Anwendungen, von denen hier zwei herausgegriffen werden sollen:

- Bei der Methode der finiten Elemente zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen wird der Fehler des Rayleigh-Ritz-Galerkin-Versfahrens durch eine Koerzitivitätsungleichung auf einen Approximationsfehler reduziert, so daß die konstruktive Approximation dort die fundamentale quantitative Fehlerabschätzung liefert.
- Die Berechnung spezieller Funktionen in Rechenanlagen basiert notwendig auf der Auswertung stückweise polynomialer oder rationaler Funktionen mit möglichst wenig Koeffizienten, und deshalb ist die Kenntnis des für eine feste Funktion  $f$  in verschiedenen Räumen erzielbaren Approximationsfehlers von entscheidender Bedeutung.

Das vorliegende Buch ersetzt eine ganze Reihe älterer Werke zum gleichen Thema, und es geht in mehrfacher Hinsicht deutlich über frühere Vorbilder hinaus. Dies gilt insbesondere für die konsequente Einbeziehung der Spline-Funktionen, die als Verallgemeinerung von Polygonzügen angesehen werden können und die bei der Approximation nicht allzu glatter Funktionen den Polynomen deutlich überlegen sind. Eine zweite Erweiterung betrifft die Verwendung neuerer Stetigkeitsmoduli, die auf Ditzian und Totik zurückgehen, und die das schwierig zu untersuchende Randverhalten des Fehlers bei Approximation durch algebraische Polynome genauer zu erfassen gestatten. Drittens kommen auch die sehr aktuellen shift-invarianten Räume zur Darstellung, die für die Untersuchung der Approximationseigenschaften von wavelets benötigt werden, und viertens werden neuere Sätze über formerhaltende Approximationen einbezogen. Last but not least enthält das Buch zur Überraschung des Rezensenten viele ganz neue Beweise, und zwar auch für altbekannte Sätze. Daß dabei gegenüber alten Lehrbüchern von der Theorie der K-Funktionale entscheidend Gebrauch gemacht wird, ist nicht weiter verwunderlich, nur die konsequente und gradlinige Durchführung ist beeindruckend.

Insgesamt ist den Autoren ein großer Wurf gelungen, der die meisten älteren Werke obsolet werden läßt. Wünschenswert wären lediglich zusätzliche Hinweise auf die vielfälti-

gen Anwendungen, denn die konstruktive Approximation hat innerhalb der „mathematical community“ nicht das Gewicht, das ihrer Bedeutung für die Praxis entspricht.

Göttingen

R. Schaback

**Dembo, A., Zeitouni, O., Large Deviations Techniques and Applications**, Boston u. a.: Jones and Bartlett 1993, 334 S., \$ 44.50

Dies ist ein erstaunlich gut lesbares Buch über Große Abweichungen (grob gesagt, der asymptotischen Berechnung exponentiell kleiner Wahrscheinlichkeiten). Es ist eine willkommene Ergänzung früherer Monographien zu diesem Gebiet (Freidlin & Wentzell (1979), Varadhan (1984), Ellis (1985), Deuschel & Stroock (1989), Bucklew (1990)).

Die Autoren haben sich das Ziel gestellt, einige grundsätzliche Methoden großer Abweichungen darzulegen und deren Nützlichkeit in einer Reihe von Anwendungen zu demonstrieren.

Die Darstellung glänzt durch mathematische Strenge, gepaart mit gut verständlichen Erläuterungen, Motivationen, Einordnungen, einer Fülle von Anwendungen sowie Übungen am Ende der meisten Paragraphen (oft mit Lösungshinweisen versehen).

Beginnend mit Wahrscheinlichkeiten auf einer endlichen Menge, dann auf endlich-dimensionalen Räumen, werden schließlich abstraktere Fälle behandelt. Eine Besonderheit besteht darin, daß dabei konsequent projektive Limites eingesetzt werden (Dawson-Gärtner).

Historische Bemerkungen und eine Fülle von Literaturhinweisen runden das Bild und sind eine Hilfe für ein weitergehendes Studium.

Das Buch sei nachdrücklich allen empfohlen, die mit Methoden großer Abweichungen bekannt und vertraut werden wollen.

Es folgt nun eine grobe *Inhaltsangabe*. Ausgehend von Erläuterungen über seltene Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten, werden im einführenden Kapitel grundlegende Definitionen des Prinzips großer Abweichungen gegeben und diskutiert (Ratenfunktion, exponentielle Straffheit, ...).

Ein Großteil von Kapitel 2 ist dem Cramérschen Theorem über große Abweichungen des empirischen Mittels von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen gewidmet, beginnend mit Werten in einer endlichen Menge (mittels des Kontraktionsprinzips aus dem Sanov-Theorem, das mit kombinatorischen Methoden bewiesen wird), dann mit reellwertigen Größen (Konvexitätsmethoden) und schließlich mit zufälligen Größen im  $R^d$  (hier mit der Voraussetzung endlicher exponentieller Momente). Es schließt sich das sogenannte Gärtner-Ellis-Theorem an für große Abweichungen einer Folge endlichdimensionaler Zufallsgrößen mit „im wesentlichen glatter, skaliert“ Kumulantefunktion.

Ein ganzes Kapitel mit Anwendungen folgt: Große Abweichungen für Markovsche Ketten mit endlich vielen Zuständen, lange seltene Segmente in zufälligen Irrfahrten im  $R^d$ , Gibbs conditioning principle, Hypothesen-Test-Probleme, Quellenkodierung der Informationstheorie, ...

Kapitel 4 ist der abstrakten Theorie gewidmet: Existenz- und Eindeutigkeitsfragen, große Abweichungen unter Transformationen, Zusammenhänge zu exponentiellen Integralen, projektive Limites, ...

Pfadeigenschaften stochastischer Prozesse stehen im Mittelpunkt von Kapitel 5: Große Abweichungen für zufällige Irrfahrten (Mogulskii), Brownsche Bewegung (Schilder), multivariate Verallgemeinerungen, Diffusionsprozesse (Freidlin-Wentzell-Theorie), Anwendungen in der Leistungsanalyse von Kommunikationssystemen, Tracking loops analysis, ...

Abstrakte Fassungen der Theoreme von Cramér und Sanov werden in Kapitel 6 geboten, gefolgt von der Behandlung empirischer Maße für Markovsche Ketten bzw. für stationäre Prozesse unter Mischungsbedingungen.

Das letzte Kapitel des Buches ist wieder Anwendungen gewidmet: Hypothesentests, Sampling ohne Zurücklegen, Gibbsche Prinzipien, ...

In einem Anhang sind schließlich ein paar nützliche Grundlagen der konvexen Analysis, Topologie, Maß- und Integrationstheorie und der Stochastischen Analysis zusammengefaßt.

Berlin

K. Fleischmann

**Prüss, J., Evolutionary Integral Equations and Applications**, Basel: Birkhäuser-Verlag 1993, 392 S., DM 188.-

Gegenstand der vorliegenden Monographie ist die mathematische Analyse von *linearen Integralgleichungen* der folgenden Art:

$$(1) \quad u(t) = \int_0^t A(\tau)u(t-\tau)d\tau + f(t), \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

$$(2) \quad v(t) = \int_0^\infty A(\tau)v(t-\tau)d\tau + g(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Hierin repräsentiert die Schar  $A(t)$  eine Familie von i. a. unbeschränkten Operatoren, die zwischen geeigneten Banachräumen erklärt sind. Spezifika dieser Gleichungen sind *Kausalität*, *Zeitinvarianz* und, im Falle der zweiten Gleichung, *Translationsinvarianz*. Die Gleichungen (1), (2) sind Prototypen von *Volterra-Integral- oder Integrodifferentialgleichungen* im unendlichdimensionalen Raum. Von besonderem Interesse sind die sogenannten *skalaren* Versionen von (1), (2), in denen sich die Operatorenfamilie  $A(t)$  darstellen lässt als ein Produkt  $A(t) = a(t)A$  aus einem Faltungskern und einem zeit-invarianten Operator. Dieser Fall impliziert mit der Wahl  $a(t) = 1$  das abstrakte Cauchy Problem erster Ordnung in der Zeit, während die Wahl  $a(t) = t$  auf das Cauchy Problem zweiter Ordnung in der Zeit führt. Auf diese Weise ermöglicht die hier vorgestellte Theorie eine Einordnung der klassischen *parabolischen* und *hyperbolischen* partiellen Differentialgleichungen in den Begriffsrahmen der Integralgleichungen vom Volterra Typus. Natürlich erschöpft sich die Theorie nicht in dieser Einordnung: In der Tat ist es die Behandlung von *geschichtsbehafteten* oder *hereditären* Prozessen, von solchen, denen ein *schwindendes Gedächtnis* zugrunde liegt. Derartige Prozesse sind von Vito Volterra zum Beginn dieses Jahrhunderts eingeführt und durch die Schule der rationalen Mechanik in den fünfziger und sechziger Jahren mit Blick auf die Modelle der (Thermo-) Viskoelastizität elastischer Festkörper und Flüssigkeiten intensiv untersucht worden. Das Bedürfnis nach derart verfeinerter Modellierung entstand aus der Notwendigkeit, die Wechselwirkung von elastischem oder diffusivem Systemverhalten mit inneren (verborgenen) Parametern zu berücksichtigen. Eine solche Wechselwirkung kann Phänomene hervorrufen, wie zum Beispiel eine *Koexistenz von Glättung und wellenfrontartiger Ausbreitung*, die durch die klassischen Konzepte der Differentialgleichungen nicht beschrieben werden können. Die in diesem Kontext entstandene Phänomenologie einer Interpolation zwischen Diffusion und Wellenausbreitung war, in der Originalliteratur, meistens einem bestimmten Anwendungskontext verpflichtet. Mit dem vorliegenden Werk wird erstmals eine umfassende lineare Theorie vorgestellt, die alle wesentlichen bekannten Anwendungsbereiche umfaßt und in einen *neuen Kontext* stellt. Insbesondere im Fall skalarer Faltungskerne gelingt dem Autor

mit dem *Prinzip der Subordination* eine überaus transparente und überraschende Darstellung sowie Deutung der oben angesprochenen Phänomene. Dieses Prinzip gestattet es, das Lösungsverhalten einer Gleichung der oben angegebenen Art aus dem entsprechenden Verhalten eines ‚master‘-Problems herzuleiten. Dies bedeutet genauer, daß, etwa im Kontext einer zugrunde gelegten Differentialgleichung, wo der Operator  $A$  ein Halbgruppe oder eine Cosinusfamilie erzeugt, die zur Integralgleichung (1) korrespondierende Resolventenfamilie (die eine verallgemeinerte Variation der Konstanten Formel ermöglicht) eine Darstellung zuläßt, die vollständig durch die von  $A$  erzeugte Halbgruppe (resp. Cosinusfamilie) und einer sogenannten *Ausbreitungsfunktion* (propagation function) charakterisiert wird. Diese Funktion, die ausschließlich von dem Faltungskern herrührt, genügt selbst einem typischen Geschichtswertproblem auf der Halbachse. Es ist eine überraschende und bemerkenswerte Tatsache, daß jenes Problem auf der Halbachse gerade dem klassischen Rayleigh Problem für viskose Flüssigkeiten entspricht. Mit anderen Worten, durch das Subordinationsprinzip gelingt es, eine große Klasse von linearen Integralgleichungen, und insbesondere von partiellen Volterra-Integrodifferentialgleichungen, auf das Studium von Halbgruppen und Cosinusfamilien einerseits und skalaren Integrodifferentialgleichungen eines Standardtypus andererseits zurückzuführen. Allein die Transparentmachung dieses Aspekts weist dem vorliegenden Werk eine besondere Rolle zu. Unabhängig von diesem Gesichtspunkt bietet dieses gut durchdachte und sehr klar abgefaßte Buch neben der bis ins Beweisdetail gehenden Darstellung und Zusammenfassung von bekannten Tatsachen einen großen Reichtum an Originalresultaten und offenen Problemen. Es eignet sich daher hervorragend sowohl zur Einführung in dieses interessante und anwendungsreiche Gebiet als auch zur Grundlage weiterer Forschung. Ein vorbereitendes Kapitel stellt eine Fülle interessanter Ergebnisse über Laplace- und Fouriertransformierte zusammen. Im Weiteren werden im Rahmen der Untersuchungen zur ‚korrekten Gestelltheit‘ *analytische* und *parabolische* Resolventen eingeführt und analysiert. Neben der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie sind die *maximale Regularität* und Darstellungsformeln sowie Störungsresultate von Interesse. In der Entwicklung des angedeuteten Subordinationsprinzips spielen verschiedene Funktionsklassen, wie etwa die *vollständig monotonen* (oder auch die *k-monotonen*), die *absolut monotonen*, die *vollständig positiven* Funktionen, sowie die *k-regulären* und die *Bernsteinfunktionen* eine gewichtige Rolle. Jeder einzelnen Klasse kommt ihre eigene Theorie zu, und doch versteht es der Autor, entscheidende Relationen zwischen den verschiedenen Klassen in gebotener Kürze darzustellen. Auch in dieser Hinsicht bietet das Buch eine sehr nützlichen und selten dargebotenen Überblick, der sonst nur in mühsamer Literaturrecherche erwirkt werden kann. Das erste Kapitel schließt mit einer Reihe prominenter Anwendungen aus der Mechanik und der Elektrodynamik. Es ließen sich umstandlos weitere Anwendungen aus anderen naturwissenschaftlichen Gebieten angeben.

Das zweite Kapitel ist den *nicht-skalaren* Gleichungen von Typ (1) gewidmet, in denen die Faltungskerne operatorwertig sind. Es werden wieder hyperbolische und parabolische Probleme und deren Anwendungen analysiert. Dabei werden die typischen Schwierigkeiten und neuartigen Phänomene dargestellt. Das dritte Kapitel schließlich ist den Problemen auf der ganzen reellen Achse zugewiesen. Es behandelt (neben Anderem) die *Integrabilität* der Resolventen und die zugehörigen *Limes-Gleichungen*. Neben der Existenz- und Eindeutigkeitstheorie werden wieder Fragen maximaler Regularität, Störungsresultate etc. diskutiert. In diesem Kapitel finden sich neben den Anwendungen auch Abschnitte über *fast periodische Lösungen*, *Ergodizität*, sowie eine Übersicht über Halbgruppen-Zugänge zu dem Geschichtswertproblem und ein Ausblick auf nichtlineare Probleme.

Jeder Abschnitt ist von einer Kommentarsektion begleitet, in der eine präzise Einordnung der Resultate in die Literatur vorgenommen wird. Danaben werden wertvolle Hinweise auf offene Fragen gegeben. Die Bibliographie umfaßt eine substantielle Auswahl

von 350 einschlägigen Publikationen. Diese Buch wird sich zweifellos als Standardwerk im Bereich der evolutiven Prozesse etablieren.

Bayreuth

G. Leugering

**de Melo, W., van Strien, S., One-Dimensional Dynamics** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 25) Berlin u. a.: Springer-Verlag 1993, 605 S., DM 148,-

„Eindimensionale Dynamik“, hinter diesem Titel verbirgt sich die Untersuchung des Langzeitverhaltens Zeit-diskreter dynamischer Systeme, deren Phasenraum  $X$  ein Intervall oder die Kreislinie ist und deren Dynamik durch die Iteration einer Abbildung  $f: X \rightarrow X$  beschrieben wird. Trotz klassischer Wurzeln (z. B. in Poincarés Untersuchungen zu Kreishomöomorphismen von 1880 und Denjoys Arbeit über Kreisdiffeomorphismen von 1932) hat das Gebiet erst seit Mitte der 60er Jahre wesentliche neue Impulse erhalten: Sarkovskii's Satz über die „Koexistenzregeln“ periodischer Orbits bei stetigem  $f$  (der bei seinem Erscheinen 1964 der Entwicklung so weit voraus war, daß Li und Yorke in ihrer berühmten Arbeit *Period three implies chaos* noch 1975 im wesentlichen einen Spezialfall des Satzes von Sharkovskii publizieren konnten), die von Milnor und Thurston entwickelte kombinatorisch-topologische Knettheorie, Guckenheimers topologisch-metrische Strukturuntersuchungen, Feigenbaums Entdeckung universellen Skalierungsverhaltens bei der Periodenverdopplung sowie Jakobsons Nachweis, daß die logistischen Abbildungen  $f(x) = ax(1-x)$  für eine Menge von Parametern  $a$  von positivem Lebesgue Maß ein absolut stetiges invariantes Maß besitzen, gehören sicher zu den wichtigsten Ergebnissen der 70er Jahre. Diesen Stand der Dinge spiegelt Collet und Eckmanns Buch *Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems* von 1980 wieder, das seitdem als Standardreferenz gegolten hat.

Von nun an wird *One-Dimensional Dynamics* diese Rolle übernehmen. Den Autoren ist es überzeugend gelungen, die oben angedeuteten unterschiedlichen Entwicklungsstränge mit ihren vielfältigen Querverbindungen unter Einbeziehung aktuellster Resultate einheitlich darzustellen. Da sie zu diesem Zweck viele Beweise völlig neu konzipiert haben, erscheinen selbst klassische Ergebnisse oftmals in neuem Licht, und auch ein mit der Materie gut vertrauter Leser kann eine Fülle von Einsichten gewinnen. Die Abschnitte, in denen offene Probleme diskutiert werden, sind für einen solchen Leser geradezu eine Pflichtlektüre. Da die einzelnen Kapitel im wesentlichen unabhängig voneinander sind, kann sich aber auch der „Einsteiger“ anhand des Buches in ein begrenztes Thema einarbeiten und bis zum aktuellen Stand der Forschung vorstoßen. Mit Lösungshinweisen versehene Übungen regen zum selbständigen Weiterarbeiten an. Mehr als 400 bibliographische Einträge verschaffen einen guten Überblick über die Originalliteratur.

*Inhalt:* Nach einem einführenden *Kapitel 0*, in dem die Leitfragen des Buches vorgestellt werden, dreht sich im *1. Kapitel* alles um Kreishomöo- und -diffeomorphismen  $f$ . Die Rotationszahl wird dynamisch durch eine Folge von Rückkehrzeiten des kritischen Punktes definiert, wodurch sich ein sehr direkter Zusammenhang zwischen algebraischen Eigenschaften der Rotationszahl und dynamischen Eigenschaften von  $f$  ergibt. (Darüber hinaus hat diese Methode den Vorteil, daß die gleichen Konzepte auch bei der Untersuchung nichtinvertierbarer Abbildungen eine wesentliche Rolle spielen.) Neben den klassischen Ergebnissen von Poincaré und Denjoy über die topologische (Semi-) Konjugation solcher Abbildungen zu Rotationen, wird auch Hermans Satz über  $C^1$ -Konjugation in einer etwas abgeschwächten Form bewiesen.

*Kapitel 2* ist der kombinatorischen Theorie nichtinvertierbarer eindimensionaler Abbildungen gewidmet. Nach einem einleitenden Abschnitt zum Satz von Sharkovskii

werden mit der Knettheorie und Hofbauers Markov-Diagrammen zwei Zugänge zur kombinatorischen Beschreibung der essentiellen Konjugationsklassen solcher Abbildungen dargestellt. Anschließend wird der Thurston-Algorithmus zum Auffinden gegebener „kombinatorischer Typen“ in „vollen Familien“  $l$ -modaler Abbildungen untersucht. Im Spezialfall der unimodalen quadratischen Abbildungen führt das bis zu einem (sehr knapp gehaltenen) Beweis für die monotone Abhängigkeit der Knetinvariante vom Parameter. Weitere Stichworte zu diesem Kapitel sind die topologische Entropie, die Konjugation  $l$ -modaler zu stückweise linearen stetigen Abbildungen und, im Vorgriff auf Kapitel 4, die Nichtexistenz wandernder Intervalle für unimodale Abbildungen mit negativer Schwarzscher Ableitung und einem nichtflachen kritischen Punkt. In *Kapitel 4* selbst wird gezeigt, daß ganz allgemein  $C^2$ -Abbildungen mit nichtflachen kritischen Punkten keine wandernden Intervalle haben und darüberhinaus alle periodischen Punkte von hinreichend hoher Periode instabil sind. Der Beweis dieses Ergebnisse wird von sehr allgemeinen Sätzen über Distorsionsabschätzungen (Stichworte: Doppelverhältnis, reelles Köbe-Prinzip) vorbereitet. Dem Zusammenhang zwischen Hyperbolizität und struktureller Stabilität sowie der Beschreibung der nichtwandernden Menge multimodaler Abbildungen ist das *3. Kapitel* gewidmet. Dazu kommen der Beweis eines Satzes von Mañé, der besagt, daß eine kompakte, invariante Menge einer  $C^2$ -Abbildung hyperbolisch ist, wenn nur alle periodischen Punkte dieser Menge hyperbolisch sind und die Menge keinen kritischen Punkt enthält, sowie Verallgemeinerungen dieses Satzes für den Fall, daß die invariante Menge kritische Punkte enthält (Misiurewicz-Abbildungen).

In *Kapitel 5* werden ergodische Eigenschaften (relativ zum Lebesgue Maß) von Intervallabbildungen untersucht, zumeist unter der Voraussetzung negativer Schwarzscher Ableitung. Behandelt werden die Klassifikation metrischer Attraktoren für unimodale Abbildungen, Zusammenhänge zwischen der Existenz absolut stetiger invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße und verschiedenen nichtgleichmäßigen Expansionseigenschaften, Bowen-Ruelle-Sinai-Maße und schließlich ein ausführlicher Beweis des schon oben erwähnten Satzes von Jakobson in der Fassung von Benedicks und Carleson.

Das *6. Kapitel* enthält eine detaillierte Ausarbeitung der Sullivanschen Renormalisierungstheorie für unendlich oft renormalisierbare unimodale Abbildungen endlichen kombinatorischen Typs mit quadratischem kritischen Punkt. Das Hauptergebnis besagt, daß der Renormalisierungsoperator  $\mathcal{R}$ , eingeschränkt auf Klassen von Abbildungen gleichmäßig beschränkten topologischen Typs, eine kompakte invariante Teilmenge  $\mathcal{A}$  mit folgenden Eigenschaften besitzt: i) Für alle  $f$  geht der  $C^{1+\alpha}$ -Abstand von  $\mathcal{R}^n f$  zu  $\mathcal{A}$  gegen 0, ii)  $\mathcal{R}_{|\mathcal{A}}$  ist topologisch konjugiert zu einem vollen zweiseitigen Shift über endlich vielen Symbolen, iii) für Abbildungen  $f, g$  gleichen kombinatorischen Typs konvergiert  $\mathcal{R}^n f - \mathcal{R}^n g$  gegen 0. Durch die Heranziehung tiefliegender Methoden der komplexen Analysis unterscheidet sich dieses Kapitel wesentlich vom Rest des Buches.

Erlangen

G. Keller

**Malkowsky, E., Nickel, W., Computergraphik in der Differentialgeometrie**, ein Arbeitsbuch für Studenden inklusive objektorientierter Software (herausgegeben von Kurt Endl), Wiesbaden u. a.: Vieweg-Verlag 1993, 588 S., DM 148,-

Der Band nennt sich „Ein Arbeitsbuch für Studenten inklusive objektorientierter Software“. Zielgruppe dürften weniger Studenten und Dozenten sein, die auf dem Gebiet der Differentialgeometrie arbeiten und am Computer einmal sehen möchten, was sie da eigentlich tun. Vielmehr scheint dies Buch geschrieben für Freunde des objektorientierten Programmierens in Pascal.

Das Buch hat sich das – in meinen Augen sehr reizvolle und lohnende – Ziel gesetzt, die Möglichkeiten des Personal Computers zur Darstellung differentialgeometrischer Begriffe zu erschließen. Hierzu wird ein offenes, objektorientiertes und erweiterbares Softwarepaket zur Darstellung zweidimensionaler differentialgeometrischer Sachverhalte motiviert, vorgestellt und dokumentiert. Der Umfang des Softwarepaketes ist zugleich (fast) Inhalt des Buches – parallel zur Theorie der (klassischen) Differentialgeometrie werden die Implementation der dazugehörigen Objekte mit den jeweiligen Methoden erklärt.

Das erste Kapitel umfaßt die graphische Darstellung von Kurven und Flächen sowie die objektorientierte Implementation der Objekte für Kurven und Flächen und wird durch einfache Beispiele motiviert.

Die Kapitel II bis V behandeln den (klassischen) Stoff der Differentialgeometrie im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  bis zum Theorema Egregium. Entsprechend der Intention des Buches wird der Stoff wenig motiviert (besonders in Kapitel IV und V), Kenntnisse der Differentialgeometrie sind hilfreich bis notwendig. Zu den vielen Beispielen von Kurven und Flächen und ihren differentialgeometrischen Eigenschaften werden jeweils Implementation von (abgeleiteten) Objekten und (virtuellen) Methoden erklärt. Die Erklärung der Implementation der Methoden ist allzeit detailliert, wirkt aber oft monoton. Es fällt auf, daß Objekte und Methoden in großem Umfang spezialisiert, jedoch wenig verallgemeinert werden. Die Formeln sind schwer lesbar, da Indizes und Exponenten nur durch den Kontext zu unterscheiden sind und zudem die gleiche Größe wie der Text haben. Die vielen Beispiele und die Ausführlichkeit der Beschreibung von Objekten und Methoden leiden unter den schwer lesbaren Formeln und der Monotonie der Beschreibungen.

In Kapitel VI werden die numerischen Methoden zur Nullstellensuche und zur Integration erklärt. Unverständlich ist, daß hier das Bisektionsverfahren als Einschlußverfahren verwendet wird, obwohl Einschlußverfahren von weitaus höherer Konvergenzordnung bekannt sind. Kapitel VII befaßt sich mit der Ausgabe von Grafiken auf Peripheriegeräten mittels z. B. HPGL oder Postscript. In Kapitel VIII findet der Leser einen Überblick über die im Softwarepaket verwendeten Units, eine vollständige Beschreibung der Objekte für Kurven, Flächen und Kurven auf Flächen sowie eine Hierarchie aller Objekte.

Das mitgelieferte Softwarepaket ist tatsächlich objektorientiert, verständlich und gut dokumentiert und dadurch erweiterbar. Schwierigkeiten entstehen allenfalls durch die hohe Anzahl der verschiedenen abgeleiteten Objekte.

Ich habe von den 148 mitgelieferten Programmen etwa die Hälfte ausprobiert. Sie funktionierten ausnahmslos, allerdings erst nachdem ich alle residenten Programme aus meinem Autoexec.Bat herauskommentiert hatte. Wer diese Programme laufen läßt, braucht viel Arbeitsspeicher und auch viel Zeit. Einem Studenten, der sein Studium innerhalb der Regelstudienzeit abschließen möchte, würde ich das Buch nicht in die Hand drücken.

Meine Meinung zu diesem Band ist sehr zwiespältig: Einerseits ist das Buch zu diesem Thema mit einem offenen, solide programmierten Softwarepaket völlig neu, anregend und z. T. auch ästhetisch reizvoll. Manche der Programme faszinierten mich sehr. Andererseits wird gelegentlich der Aufwand übertrieben. Der Computerbildschirm ist graphischer Reproduktion nur dort überlegen, wo sich etwas bewegt. Und das ist hier leider meist so programmiert, daß durch die Bewegung die schon vorhandenen Linien aufgefressen werden. Besonders betroffen war ich über das, was die Autoren als implizite Fläche verkaufen. Da mich das Zeichnen impliziter Flächen sehr interessiert, und weil dies noch keines der kommerziellen Softwarepakete wirklich kann, war der Paragraph III,5 über Darstellung von Flächen in impliziter Form der erste, den ich mir ansah. Zu meiner grenzenlosen Enttäuschung entpuppten sich die Flächen dort aber als im höchsten Maße explizit, ganz normale Funktionsgraphen, wie sie schon lange Standard in der Computergraphik sind. Ein derartiger Mißbrauch der Sprache darf nicht passieren.

Das Buch weist neue Wege und enthält neue Ideen. Jeder, der sich für Visualisierung von Geometrie interessiert, sollte es sich ansehen. Ich hoffe aber, daß es auf seinem Gebiet in dieser Art nicht das letzte Buch sein wird.

Erlangen

W. Barth  
(unterstützt von S. Endraß)

**Barnsley, M., Fractals Everywhere** (zweite Aufl.), Boston u.a.: Academic Press 1993, 531 S., £ 33,-

Dies ist ein ungewöhnliches Buch, dessen 1988 erschienene erste Auflage die unterschiedlichsten Reaktionen hervorgerufen hat, von begeisterter Zustimmung bis zur totalen Ablehnung.

Abwechslung zur nüchternen „Einführung in die Theorie ...“ verheißt schon der Titel, der offenbar Schule macht. Das neue Stochastik-Lehrbuch von E. Behrends nennt sich „Überall Zufall“ – eine These, die gewiß vorbehaltloser angenommen wird als die von Barnsley. Auffallend ist ferner die Ausstattung des Buches: großzügig im Layout, leicht und flüssig in der Sprache, und vor allem: überall Illustrationen, schwarz-weiß und in Farbe, mit viel Sorgfalt durch den Computer erzeugt.

Dürfen Mathematiker Bilderbücher haben? Ich denke, wir brauchen sie. Die Meinung von Studenten ist überwiegend positiv: „Ein mathematisches Lesebuch, nicht besonders akademisch, aber dafür auch nicht so trocken, es animiert zum Weiterlesen und ist als First Course doch wunderbar gelungen“. Sicher gibt es generationsbedingte Unterschiede im Leseverhalten, und die Studenten von heute sind von klein auf von den Medien umworben worden. Ein Fachbuch wendet sich an den Verstand. Bei einem Lehrbuch, das feeling für höhere Mathematik vermitteln will, ist die Frage schon legitim, was es den Sinnen, wenigstens dem Auge, bietet.

Dementgegen steht die ebenfalls ernstzunehmende Kritik von Kollegen. Neben der einseitigen Ausrichtung des Buches und dem übermäßigen Gebrauch von Superlativen wird bemängelt, daß sich über 100 kleinere und größere Fehler in der ersten Auflage gefunden haben, zuviel für einen First Course. Auch in der neuen Auflage gibt es viele Druckfehler. Schwerer wiegt es, wenn des öfteren der mathematische Kern eines Problems durch blumenreiche Sprache umgangen wird und sich dadurch Fehler einschleichen. So wird etwa der Schubfachschlu in folgender laxen Art abgehandelt: „By the Pigeon-Hole Principle ( a huge number of pigeons laying eggs in two letter boxes ⇒ at least one letter box contains a huge number of angry pigeons), one of the balls, say  $B_1$ , contains infinitely many of the points  $x_n$ .“ Verständlicher ist hier ohne Zweifel eine strenge Formulierung, z. B. ,weil die Vereinigung von endlich vielen endlichen Mengen endlich ist“.

Was mathematische Sätze und Definitionen betrifft, bleibt der Text weitgehend im Rahmen eines traditionellen Einführungskurses in die Topologie der metrischen Räume. Es werden kaum Vorkenntnisse vom Leser erwartet. Der Stoffumfang ist, gemessen an der Seitenzahl des Buches, recht gering. Im Mittelpunkt stehen einige nicht allzu tiefliegende Sätze über Existenz und Konstruktion selbstähnlicher Mengen und Maße. Selbstähnlichkeit für eine kompakte Menge  $A$  im  $R^n$  bedeutet, daß sie Vereinigung von Teilen  $w_i(A)$  ist, wobei die  $w_i$  gewisse kontraktive Abbildungen, z.B. Ähnlichkeitsabbildungen bezeichnen. Der Verfasser hat hierfür den Begriff IFS (iterated function systems) geprägt, weil sich  $A$  durch zufällige Iteration der  $w_i$  auf dem Computer erzeugen läßt. Die Funktionen  $w_i$  sind bei Barnsley fast ausschließlich affine Abbildungen. Dies stellt im Rahmen der Thematik ‚Fraktale‘ zwar eine Einschränkung dar, aber es wird damit an Arbeiten des Verfassers angeknüpft. Barnsleys Gruppe hatte als erste natürlich wirkende Bilder mit affinen Abbildungen synthetisiert. Der durch vier Abbildungen erzeugte Farn dient hierfür als

Kennzeichen (Man vergleiche die Besprechung von Barnsley und Hurd, Fractal image compression, in den Jahresberichten 96, Nr. 2).

Für die IFS werden Grundbegriffe der Topologie metrischer Räume und der dynamischen Systeme eingeführt. Als Beispielklassen behandelt werden ‚fraktale Interpolationsfunktionen‘, Julia-Mengen und die Mandelbrot-Menge. Die Ausführungen zur Dimension konzentrieren sich auf Boxzähl-Algorithmen, die Hausdorff-Dimension selbst wird etwas stiefmütterlich abgefertigt. Eine Einführung zum Maßbegriff mit Beweisskizzen wird im vorletzten Kapitel gegeben. Interessant, weil in Büchern der Maßtheorie nicht zu finden, sind dabei die vom Rechner erzeugten Beispiele singulärer Maße. Das letzte Kapitel, neu in der zweiten Auflage, behandelt verallgemeinerte IFS nach Art der Markov-Ketten. Hier werden Systeme von Mengen  $A_k$  betrachtet, von denen eine jede sich als Vereinigung von bestimmten verkleinerten Kopien der verschiedenen  $A_j$  darstellen lässt.

Barnsley versucht, abstrakte Theorie und Computerexperimente im Zusammenhang zu behandeln. Die zugehörige Diskette wird allerdings nicht mitgeliefert, sondern muß extra erworben werden (Desktop Fractal Design System 2.0). Inzwischen gibt es ja viele Bücher mit ähnlichem Anliegen, die Pakete wie Mathematica oder Maple nutzen. Die auf uns zu rollende Multimedia-Welle mit ihren gewaltigen Möglichkeiten und Zwängen auch für den Mathematikunterricht deutet sich erst an. Wir müssen dies als Herausforderung begreifen und diskutieren, inwieweit Computerexperimente den heutigen Studenten schneller über Hemmschwellen zum Verständnis von Ideen der modernen Mathematik führen. Wenn dies so wäre, wäre aus meiner Sicht die Beschränkung auf eine recht spezielle Thematik, ganz gleich auf welche, vollauf berechtigt.

Da die Übungsaufgaben einen großen Teil der mathematischen Arbeit auf den Leser verlagern, wurde die neue Auflage durch ausgewählte Antworten zu den Aufgaben ergänzt. Dieser Teil, von Hawley Rising III erstellt und laut Vorwort zweimal durchgesehen, ergibt über hundert Seiten. Die Lösungen zeichnen sich nicht durch besondere Meisterschaft aus. Es stimmt schon sehr bedenklich, wenn gleich im ersten Abschnitt (II. 2. 6) die Existenz eines Homöomorphismus zwischen Cantormenge und Intervall ‚bewiesen‘ wird.

Inzwischen gibt es viele Bücher über Fraktale. Edgars „Measure, Topology and Fractal Geometry“ (Springer 1990) behandelt etwa den gleichen Stoffumfang mathematisch vertieft im klassischen Satz-Beweis-Stil. Für den Mathematiker sehr zu empfehlen ist die von der Maßtheorie her sorgfältig aufgebaute „Fraktale Geometrie“ von Falconer, die nun auch in einer (nicht durchgängig präzisen) deutschen Übersetzung vorliegt (Spektrum, Heidelberg 1993). Trotz des handlichen Formats enthält dieses Buch Abschnitte über zufällige Fraktale, seltsame Attraktoren und Multifraktale. Ebenfalls recht breit angelegt und sorgfältig ausgearbeitet, aber auf einen größeren Leserkreis zugeschnitten sind die Bücher von Peitgen, Jürgens und Saupe (Fractals for the Classroom, Chaos and Fractals, Springer-Verlag 1991, 1992). Der Vorteil von Barnsleys Buch ist bei allen Schwächen eine gewisse

Ursprünglichkeit.

Greifswald

Ch. Bandt

**Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Table of Integrals, Series, and Products** (fifth edition), Boston u. a.: Academic Press 1994, 1204 S., ca. £ 46.-

Wer öfters den exakten Wert eines Integrals oder einer Reihe benötigt oder nach einer komplizierten, eventuell nur durch höher transzendente Funktionen darstellbaren Stammfunktion sucht, wird die Anschaffung einer Integral- und Summentafel in Erwägung ziehen.

Zwei derartige Tafelwerke – beide Übersetzungen russischer Originalausgaben – werden derzeit von drei Verlegern in unterschiedlicher Ausstattung angeboten und haben

ältere bekannte Werke, wie etwa den Gröbner u. Hofreiter, durch mehr Systematik und Streben nach Perfektion weitgehend verdrängt. Es sind dies:

Das vierbändige Werk „Integrals and Series“ von A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov u. O. I. Marichev (abgekürzt PBM), vertrieben von Gordon and Breach zu einem regulären Preis von \$ 175.– pro Band mit erheblicher Reduktion für Privatpersonen.

Das zweibändige Werk „Tafeln“ von Gradstein und Ryschik bei Harri Deutsch (kurz GR(hd)), identisch mit der Übersetzung des früheren Deutschen Verlags der Wissenschaften in der DDR und, falls nicht inzwischen vergriffen, zu einem Gesamtpreis von DM 68.– erhältlich.

Schließlich die oben genannte einbändige englische Übersetzung desselben russischen Originalwerks, die jetzt als fünfte Auflage vorliegt und kurz GR(ap) genannt sei.

Zunächst seien die beiden GR-Ausgaben mit dem PBM verglichen. Mit seinen vier Bänden (Bd. 1 Elementary Functions, Bd. 2 Special Functions, Bd. 3 More Special Functions, Bd. 4 Laplace Transforms) ist der PBM viel umfangreicher. Die ersten beiden Bände entsprechen etwa dem Stoff des GR. Dabei ist der GR im einzelnen keineswegs magerer. So konnten wir z. B. im GR zwölf Integrale mit der Funktion  $\ln \ln$  finden, im PBM dagegen nur sieben. Ein gesuchtes Integral ist im PBM leichter zu lokalisieren, da bereits im Inhaltsverzeichnis die verschiedenen Typen in mathematischer Schreibweise aufgelistet sind, während sie beim GR mit knappen Worten klassifiziert werden.

Der GR erfordert dagegen etwas Sachverstand. Ausführlich wird beschrieben, wie man das Werk benutzen soll. Von Integralen, die durch Substitution auseinander hervorgehen, ist in der Regel nur der einfachste Vertreter aufgelistet. Der Benutzer muß also bereit sein, etwas Vorarbeit zu leisten. Gelegentlich finden sich kleine Hinweise, wie man durch eine geeignete Substitution weitere Typen erschließen kann. Eine Stammfunktion, die man unter „Indefinite Integrals“ vergeblich sucht, kann eventuell unter „Definite Integrals“ als Wert eines Integrals mit allgemeiner Grenze auftauchen. Im PBM ist die Trennung der Kapitel konsequenter.

Eine wesentliche Schwäche des PBM besteht darin, daß man auf die Richtigkeit der Formeln blind vertrauen muß und auch keinen Zugang zu ihrer Herleitung bekommt, während der GR zu jeder nichttrivialen Formel eine Quelle angibt. Er wählt sei auch, daß der PBM unserer Bibliothek bei guter Papierqualität schlecht gedruckt ist, so daß Exponenten und Betragsstriche oft unlesbar sind.

Abgesehen von der unterschiedlichen Größenordnung der Anschaffung – man sollte nur die ersten beiden Bände des PBM mit dem GR vergleichen – meinen wir, daß der Mathematiker mehr zum GR neigen sollte, während der Nichtmathematiker den PBM als bequemer empfinden könnte.

Hat man sich einmal zum GR durchgerungen, dann gibt es mehrere gute Gründe für GR(ap), die neue Auflage bei Academic Press:

Die fünfte Auflage wurde vollständig neu gesetzt. Das Format ist mit  $19\text{ cm} \times 24\text{ cm}$  jetzt größer, auch gegenüber dem GR(hd). Dadurch konnten die meisten Formeln in einer einzigen Zeile dargestellt werden.

Papier- und Druckqualität sind ebenso gut wie bei der vierten Auflage und übertreffen damit deutlich die des GR(hd), der in diesem Punkt noch DDR-Niveau besitzt.

Die Numerierung der Formeln stimmt sowohl beim GR(ap) als auch beim GR(hd) mit der des russischen Originals überein, doch wurden in den GR(ap) zahlreiche neue Formeln aufgenommen und unter Fortführung der Numerierung gesondert gekennzeichnet.

Während der GR(hd) im Band 2 mit Kapitel 9 endet, besitzt der GR(ap) die im russischen Original nicht vorhandenen Kapitel 10–17, die bereits der vierten Auflage hinzugefügt wurden. Sie tragen die Titel: Vector Field Theory, Algebraic Inequalities, Integral Inequalities, Matrices and Related Results, Determinants, Norms, Ordinary Differential Equations und schließlich Fourier, Laplace and Mellin Transforms. Mit diesen

Kapiteln verläßt der GR(ap) den Charakter eines reinen Tafelwerkes und wandelt sich eher zu einer Sammlung von Formeln und Sätzen. Da dieser Teil nur ca. sieben Prozent des Gesamtwerks ausmacht, erreicht er jedoch nicht den Umfang anderer bekannter Formelsammlungen wie etwa dem Taschenbuch von Bronstein & Semendjajew, besitzt aber gegenüber dem letzteren ein viel höheres Niveau. Exemplarisch wollen wir einen Blick auf den Abschnitt 15.81–15.82 „Named theorems on eigenvalues“ werfen. Dort finden wir:

Schursche Ungleichungen, Sturmscher Trennungssatz, Poincaréscher Trennungssatz, Sätze von Gershgorin, Banach-Frobenius, Perron, Perron-Frobenius, Wielandt, Ostrowski

gezeigt, wie man mittels dieser Methode auf elegante Art Ungleichungen mit bestmöglichen Konstanten über Martingale gewinnt. Das Kapitel wird dann abgeschlossen mit einer Einführung in die sogenannten Propheten-Ungleichungen.

Im 4. Kapitel wird die Martingaltheorie auf gerichteten Indexmengen ziemlich komplett dargestellt. Die hierfür charakteristischen Vitali-Bedingungen werden mittels Stopzeiten oder verallgemeinerten Stopzeiten definiert. Dies wirkt sich auf die Verständlichkeit der Darstellung äußerst vorteilhaft aus. Die Nützlichkeit der Amarts wird erneut herausgestellt. Während die klassische Vitali-Bedingung ( $V$ ) notwendig und hinreichend für die fast sichere Konvergenz von  $L^1$  beschränkten Amarts ist, erweist sich für die fast sichere Konvergenz von  $L^1$  beschränkten Martingalen die erst von Millet und Sucheston eingeführte schwache Vitali-Bedingung ( $C$ ) als notwendig und hinreichend.

Im 5. Kapitel wird das Wechselspiel zwischen geometrischen Eigenschaften von Banachräumen einerseits und Konvergenzeigenschaften von Martingalen und Amarts andererseits vorgeführt. Bei Zufallsvariablen mit Werten in Banachräumen zeigt sich allerdings ein fundamentaler Unterschied zwischen Martingalen und Amarts: während man für Amarts nur fast sichere *schwache* Konvergenz erhält, hat man für Martingale fast sicher *Normkonvergenz*, falls der zu Grunde liegende Banachraum die Radon-Nikodym-Eigenschaft erfüllt. Weitere typische Schlagworte und Hauptresultate sind: Dentabilität, Operatorideale, Pietsch-Faktorisierung, Asplund-Operatoren, Choquet-Edgar-Theorem, Ryll-Nardzewski-Fixpunktsatz, Dvoretzky-Rogers-Lemma sowie die geometrische Charakterisierung der Radon-Nikodym-Eigenschaft von Phelps und Bourgain.

Im 6. Kapitel wird die Theorie der reellwertigen Martingale über der Indexmenge  $\mathbb{N}$  weiterentwickelt. Neben Standardresultaten von Hajek-Renyi und Chow, interessanten Anwendungen auf  $*$ -mischende Folgen und das Lifting-Problem werden einige grundlegende Sätze über die quadratische Variation eines Martingales bewiesen, jedoch nicht mittels der im 3. Kapitel vorgestellten Methode der Bikonkavität, sondern einer älteren, ebenfalls auf Burkholder zurückgehenden Methode.

Im 7. Kapitel wird neben einer kurzen Einführung in die Ableitungstheorie auf dem  $\mathbb{R}^n$  die abstrakte Ableitungstheorie entwickelt. Diese steht weitgehend in Analogie zu der im 4. Kapitel vorgestellten Martingaltheorie auf gerichteten Indexmengen. Da jedoch das intuitive Konzept der Stopzeit nicht mehr zur Verfügung steht, ist die Darstellung weniger leicht verständlich und technisch aufwendiger. Daneben werden auch noch die sogenannten Halo-Sätze und andere Resultate, die kein Gegenüber in der Martingaltheorie besitzen, dargestellt, jedoch sucht man vergeblich nach einer Reihe klassischer Resultate auf dem  $\mathbb{R}^n$ , wie zum Beispiel das berühmte Überdeckungslemma von Besicovitch.

Im 8. Kapitel werden die  $L^1$ -Ergodensätze abgehandelt. Höhepunkt ist der äußerst allgemeine Ergodensatz von Akcoglu und Sucheston für subadditive Prozesse, der insbesondere den klassischen Ergodensatz von Chacon und Ornstein umfaßt.

Im 9. Kapitel wird eine allgemeine Methode dargestellt, wie man aus einparametrischen Konvergenzsätzen mehrparametrische Konvergenzsätze erhält. Dies gilt sowohl für Konvergenzsätze von Martingalen als auch Ergodensätze.  $L \log^k L$ -Bedingungen sind typisch für die gewonnenen Sätze, was wiederum eine ganze Reihe klassischer Mehrparametrische-Resultate ausschließt.

Insgesamt läßt sich sagen, daß man mit diesem Buch Wissen aus erster Hand erhält. Das Buch wird durch viele Übungsaufgaben am Ende der einzelnen Abschnitte bereichert. In diesen werden zahlreiche weiterführende Resultate entweder durch knappe Beweisskizzen oder durch Literaturhinweise für den Leser aufbereitet. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis sowie vollständige Sach- und Personen-Indizes runden das insgesamt sehr gelungene Buch ab. Die Zahl der Druckfehler hält sich im üblichen Rahmen. Leider sind mancherorts die Nummern bei zitierten Sätzen nicht korrekt. Die Verarbeitung des Buches ist sehr gut und der Preis angemessen. Das Buch eignet sich gut für Seminare und

Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Wahrscheinlichkeitstheorie und kann insbesondere dem aktiven Forscher wärmstens empfohlen werden.

Göttingen

R. Wittmann

**Kostrikin, A. I., Shafarevich, I. R. (Eds.) Algebra VIII, Representations of Finite Groups and Algebras. Translated from the Russian by D. J. Benson, A. V. Roiter, D. V. Voiculescu. Encyclo-**

Pfeilen“; Köcher und ihre Darstellungen hat Grothendieck schon sehr früh unter den Namen *diagram schemes* und *diagrams* betrachtet; neu ist bei Gabriel der systematische Einsatz von Köchern zur Beschreibung von Algebren (8.1): jede endlich-dimensionale Basisalgebra  $A$  ist Faktoralgebra der Wege-Algebra eines endlichen Köchers  $\mathcal{A}(A)$ ; die Kategorie der  $A$ -Moduln ist auf diese Weise eine volle Unterkategorie der Kategorie der Darstellungen von  $\mathcal{A}(A)$ . Der Köcher  $\mathcal{A}(A)$  ist sicher die wichtigste darstellungstheoretische Invariante von  $A$ ; die Punkte des Köchers entsprechen den Isomorphieklassen der einfachen  $A$ -Moduln, die Pfeile nicht-zerfallenden Erweiterungen zwischen einfachen  $A$ -Moduln; bezeichnen wir mit  $J(A)$  das Radikal von  $A$ , so beschreiben die Punkte des Köchers  $A/J(A)$ , die Pfeile dagegen  $J(A)/J(A)2$ .

Um brauchbare Klassifikationssätze für unzerlegbare Moduln zu erhalten, muß man einschneidende Voraussetzungen an die zu untersuchenden Algebren stellen. Wie man am  $n$ -Unterraum-Problem für  $n \geq 4$  (hier arbeitet man mit einer Algebra der Dimension  $2n+1$ ) oder am Matrizenbüschel-Problem (die zugehörige Algebra ist 4 dimensional) ablesen kann, wird es üblicherweise unendlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln geben; man hat sich daher gefragt, welche Algebren *darstellungs-endlich* sind. wann

es also nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln gibt.

Brauer und Thrall haben wohl schon in den 40er Jahren zwei Vermutungen in die Welt gesetzt, die viel Interessen auf sich gezogen haben und deren Lösungen einen wesentlichen Teil des vorliegenden Buches beanspruchen. Die erste explizite Formulierung der Vermutungen findet sich bei Jans; zwar wird berichtet, daß Brauer diese Fragestellungen eher als Übungsaufgaben (beim Studium von Gruppenalgebren) verstanden wissen wollte, aber man kann festhalten, daß viele der neuen Methoden der Darstellungstheorie beim Arbeiten an dieser Problemstellung entwickelt worden sind, und daß sich diese Methoden dabei bewährt haben.

Die erste Brauer-Thrall-Vermutung (4.5) besagt, daß eine Algebra entweder darstellungs-endlich ist oder unzerlegbare Moduln beliebig großer Dimension besitzt. Diese Vermutung wurde 1968 von Roiter bewiesen. In der Folge gab es eine Vielzahl von Arbeiten der Kiever Schule von Nazarova und Roiter, in denen als Hilfsmittel zur Entwicklung der Darstellungstheorie von Algebren eine solche für Halbordnungen und ähnliche Strukturen entwickelt wurde. Von besonderer Bedeutung haben sich dabei die Unterraumkategorien von Vektorraumkategorien erwiesen. Interessanterweise wird die erste Brauer-Thrall-Vermutung im vorliegenden Buch mit Hilfe derartiger Unterraumkategorien bewiesen. Reduktionsalgorithmen (5.3) erlauben es, komplizierte Darstellungen induktiv zu konstruieren. Mit ihrer Hilfe konnte Kleiner sowohl alle minimalen darstellungs-unendlichen Halbordnungen (es gibt 5 solcher Halbordnungen) als auch die „aufrichtigen“ darstellungs-endlichen Halbordnungen (es gibt 14) klassifizieren (5.4). Dabei zeigt sich, daß man jeder Halbordnung eine quadratische Form zuordnen kann, an der man den Darstellungstyp abliest; im darstellungs-endlichen Fall entsprechen dabei die unzerlegbaren Darstellungen gerade den positiven Wurzeln dieser Form (5.7). Grundlegende Ergebnisse von Ovsienko charakterisieren kritische quadratische Formen (6.3), und zeigen, daß die Koeffizienten positiver Wurzeln schwach positiver Formen durch 6 beschränkt sind (6.7); dies liefert eine

theoretische Begründung für die Beschränkung von Jordan-Hölder-Multiplizitäten bei vielen darstellungs-endlichen Algebren.

Eine zweite Entwicklungslinie geht auf die schon 1965 von Auslander vorgelegte Untersuchung kohärenter Funktoren zurück; die Spezialisierung einer sehr allgemeinen Theorie auf äußerst spezielle Objekte lieferte überraschende Einsichten; insbesondere gab Auslander 1972 eine Charakterisierung der Endomorphismenringe  $\text{End}_A(M)$ , dabei sei  $A$  eine darstellungs-endliche Algebra und  $M$  eine endliche direkte Summe unzerlegbarer Moduln, wobei jede Isomorphiekasse vertreten sein soll (derartige Endomorphismenringe werden heute Auslander-Algebren genannt). Den Köcher dieser Algebra  $\text{End}_A(M)$  nennt

man den Auslander-Reiten-Köcher von  $A$ , seine Punkte sind die Isomorphieklassen der unzerlegbaren  $A$ -Moduln, Pfeile zeigen die Existenz sogenannter irreduzibler Homomorphismen an; auch für darstellungs-unendliche Algebren kann man einen derartigen Auslander-Reiten-Köcher definieren.

In der Darstellungstheorie hat es sich bewährt, Ringe und additive Kategorien als Dinge anzusehen, die nicht wesentlich voneinander verschieden sind: Ringe sind additive Kategorien mit einem einzigen Objekt; additive Kategorien sind also, wie Mitchell formulierte, „Ringe mit vielen Objekten“. Suchen wir eine Entsprechung zu endlich-dimensionalen Algebren, so empfiehlt es sich, additive Kategorien zu betrachten, in denen einerseits die Homomorphismenräume  $\text{Hom}(X, Y)$  endlich-dimensionale  $k$ -Vektorräume sind, andererseits jeder idempotente Endomorphismus die Projektion auf einen direkten Summanden ist, sie werden im vorliegenden Buch *Aggregate* genannt und bilden den Hauptgegenstand der Untersuchung. Der Algebra  $A$  entspricht das Aggregat  $A\text{-pro}$  der endlich-erzeugten projektiven  $A$ -Moduln; wichtig ist, daß die Kategorie  $A\text{-mod}$  aller endlich-dimensionalen  $A$ -Moduln selbst wieder ein Aggregat ist. Ist  $\mathcal{A}$  ein Aggregat, so können wir wie bei Algebren vom Radikal  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{A}$  sprechen und mit Hilfe von  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  einen Köcher von  $\mathcal{A}$  konstruieren; seine Punkte sind die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Objekte in  $\mathcal{A}$ , Pfeile entsprechen „irreduziblen“ Homomorphismen.

Der Begriff der irreduziblen Homomorphismen wurde von Auslander und Reiten geprägt (vor dem Hintergrund der Analogie von additiven Kategorien und Ringen entsprechen die irreduziblen Homomorphismen den irreduziblen Elementen, wie sie etwa für kommutative Ringe definiert sind: irreduzible Homomorphismen sind solche, die keine „nicht-trivialen“ Faktorisierungen besitzen); der Köcher von  $A\text{-mod}$ , den man auf diese Weise erhält, ist (zusammen mit einer zusätzlichen Struktur, der sogenannten Auslander-Reiten-Verschiebung) der Auslander-Reiten-Köcher von  $A$ . Die Existenz „vieler“ irreduzibler Homomorphismen in einer beliebigen Modulkategorie muß überraschen: sie folgt aus der Existenz der fast-zerfallenden Erweiterungen, die von Auslander-Reiten gezeigt wurde (9.7).

Die dritte Entwicklungslinie beginnt mit Gabriel's Untersuchung zur Darstellungstheorie von Köchern, die ebenfalls 1972 vorgelegt wurde: die Wege-Algebra eines Köchers ist genau dann darstellungs-endlich, wenn der zugrundeliegende Graph eine disjunkte Vereinigung von Dynkin-Diagrammen  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{D}_n$ ,  $\mathbf{E}_6$ ,  $\mathbf{E}_7$  oder  $\mathbf{E}_8$  ist, und in diesem Fall gibt es eine kanonische Bijektion zwischen den Isomopieklassen der unzerlegbaren Darstellungen des Köchers und den positiven Wurzeln der entsprechenden halbeinfachen komplexen Lie-Algebra (7.1). Kurz danach haben Bernstein, Gelfand und Ponomarev den Zusammenhang zwischen der Darstellungstheorie endlicher Köcher und Methoden der Lie-Theorie klarer herausgearbeitet, indem sie Spiegelungsfaktoren definierten, die den Erzeugenden der Weylgruppe entsprechen. Auf diese Weise zeigen sie, daß die Wege-Algebra eines Dynkin-Köchers darstellungs-gerichtet ist, daß also die unzerlegbaren Darstellungen  $M_1, \dots, M_m$  so angeordnet werden können, daß  $\text{Hom}(M_i, M_j) = 0$  für  $i > j$  gilt; entsprechend konstruieren sie im darstellungs-unendlichen Fall zwei abzählbare Folgen unzerlegbarer Moduln, die sogenannten präprojektiven und präinjektiven Moduln.

Donovan-Freislich und Nazarova haben auch die unzerlegbaren Darstellungen der erweiterten Dynkin-Diagramme  $\tilde{\mathbf{A}}_n$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_n$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_6$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_7$ , oder  $\tilde{\mathbf{E}}_8$  (man nennt dies die *zahmen* Köcher) klassifiziert; neben den präprojektiven und den präinjektiven Darstellungen gibt es eine durch die projektive Gerade  $\mathbb{P}_1$  indizierte Familie von „Röhren“ (11.1, 11.6).

Ganz allgemein hat dann Kac gezeigt, daß für einen beliebigen endlichen Köcher ohne orientierte Kreise gilt: die Dimensionsvektoren der unzerlegbaren Darstellungen sind gerade die positiven Wurzeln der zugehörigen Kac-Moody Lie-Algebra; zu den reellen positiven Wurzeln gehört eine einzige Isomopiekasse, zu den imaginären positiven Wurzeln gehören unendlich viele (7.4). Was ist die Bedeutung eines derartigen Ergebnisses?

Die Wege-Algebren von Köchern sind gerade die erblichen Algebren, aber nur in wenigen Anwendungen stößt man auf erbliche Algebren. Allerdings gilt: Für jede Algebra werden die Moduln mit Sockellänge 2 durch eine erbliche Algebra beschrieben. Wir sehen also, daß man für eine beliebige Algebra den unzerlegbaren Moduln der Sockellänge 2 als Invariante eine positive Wurzel zuordnen kann.

Die genannten drei Entwicklungen begannen mit Fragen über darstellungs-endliche Algebren, stellten aber Methoden bereit, die auch für darstellungs-unendliche Algebren von Interesse sind. Die Methoden wurden unabhängig voneinander entwickelt und es ist sehr reizvoll zu sehen, daß sie sich sehr schön ergänzen. Gerade das Zusammenspiel dieser verschiedenen Methoden sollte betont werden. Alle Methoden werden im vorliegenden Buch umrissen.

Ausgangspunkt vieler Überlegungen sind relativ allgemeine Begriffsbildungen der homologischen Algebra. Der erste Beweis für die Existenz der fast-zerfallenden Erweiterungen beruhte auf einer extremen Spezialisierung einer Adjunktionsformel im Buch von Cartan-Eilenberg. Wir haben oben mehrfach gesehen, daß bei darstellungstheoretischen Problemen ganzzahlige quadratische Formen herangezogen werden können. Diese Formen leben jeweils auf Grothendieck-Gruppen (zum Beispiel auf der Grothendieck-Gruppe  $K_0(A)$  aller endlich-dimensionalen  $A$ -Moduln modulo exakter Folgen); sie kodieren Informationen, die durch die Ext-Gruppen gegeben sind. Typisches Beispiel ist im Fall einer Algebra von endlicher globaler Dimension die Form, die durch die alternierende Summe der Dimensionen der Ext-Gruppen gegeben ist.

Schließlich sollten noch die Kipp-Faktoren erwähnt werden, die einerseits die Morita-Äquivalenzen, andererseits die Spiegelungsfaktoren von Bernstein-Gelfand-Ponomarev verallgemeinern. Die Tatsache, daß viele Modulkategorien zwar sehr ähnlich, aber nicht zueinander äquivalent sind, weist darauf hin, daß man statt mit Morita-Äquivalenzklassen mit größeren Ähnlichkeitsklassen von Algebren arbeiten sollte (zum Beispiel bringen die Spiegelungsfaktoren die Darstellungen von Köchern mit gleichen unterliegenden Graphen, aber verschiedenen Orientierungen, zueinander in Beziehung). Die Existenz eines Kipp-Faktors von der Kategorie  $A\text{-mod}$  der  $A$ -Moduln in die Kategorie  $B\text{-mod}$  der  $B$ -Moduln impliziert, daß die derivierten Kategorien von  $A\text{-mod}$  und  $B\text{-mod}$  äquivalent sind. Ein Einschub im vorliegenden Buch von B. Keller ist der Kipp-Theorie gewidmet; hier wird die Rickard'sche Charakterisierung deriviert-äquivalenter Algebren formuliert (12.6) und es wird gezeigt, wie man explizit mit Kipp-Moduln arbeiten kann.

Die Kipp-Theorie erlaubt es, darstellungsgerichteten Algebren erbliche Algebren zuzuordnen; auch zeigt sie, daß die Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen der zahmen Köcher auf eine große Klassen von Algebren, die zahmen „verkleideten“ Algebren übertragen werden kann. Die Liste dieser Algebren (10.7) wurde von Happel-Vossieck erstellt und ist ein oft verwendetes Arbeitsmittel beim Umgang mit zahmen Algebren; insbesondere verweist das wichtige Bongartz-Kriterium für Darstellungsendlichkeit (14.7) darauf.

Die allgemeine Theorie der darstellungs-endlichen Algebren und der minimal darstellungs-unendlichen Algebren beruht auf der Existenz multiplikativer Basen (13.10, 13.14): jede derartige Algebra  $A$  besitzt eine Basis, so daß das Produkt zweier Basiselemente entweder Null oder wieder ein Basiselement ist und zusätzlich das Radikal  $\text{rad } A$  von einer Teilmenge dieser Basis erzeugt wird. Der Beweis von Bautista, Gabriel, Roiter und

endliche Algebren auf solche über darstellungs-gerichtete, und damit über erbliche Algebren zurückgeführt.

Die Existenz multiplikativer Basen ist auch ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweis der 2. Brauer-Thrall Vermutung von Bautista und Bongartz: Ist  $A$  eine darstellungs-unendliche Algebra, so gibt es eine natürliche Zahl  $d$ , so daß es für jede der Dimensionen  $n \cdot d$  unendlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln gibt (14.8).

Die letzte Seite des Buchs berichtet über zwei andere wichtige Ergebnisse: Drozd hat schon 1980 gezeigt, daß jede endlich-dimensionale Algebra zahm oder wild (und nicht gleichzeitig beides) ist; Crawley-Boevey hat 1988 bewiesen, daß bei einer zahmen Algebra fast alle unzerlegbaren Moduln vorgegebener Dimension zu homogenen Röhren gehören. Die für die Darstellungstheorie wichtigen Begriffe zahm und wild werden erst hier eingeführt und leider auch nicht weiter motiviert.

Da es bisher keine systematische Darstellung der Theorie gab, wurde der vorliegende Band dringend erwartet. Gleichzeitig erschien von Simson *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories* (Gordan and Breach); beide Bücher haben trotz ihrer verschiedenen Titel vieles gemeinsam. Die Darstellungstheorie der Halbordnungen ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Darstellungstheorie der endlich-dimensionalen Algebren und Gabriel-Roiter räumen ihr einen entsprechenden Platz ein: die

Neuschöpfungen ist aber dem Referenten nicht klar, warum altbewährte und allgemein akzeptierte Begriffsbildungen aufgegeben wurden: so heißen kurze exakte Folgen *coflections*, statt von *Morita-Äquivalenz* wird von *modular equivalence* gesprochen. Ein Prinzip wird explizit formuliert: die Sprache der Darstellungstheorie soll von Eigennamen gereinigt werden; so wurden die *Auslander-Reiten-Köcher* zu *representation-quivers*, die *Krull-Schmidt-Kategorien* zu *multilocular categories*, usw. (außerhalb der eigentlichen Darstellungstheorie wurde glücklicherweise dieses Prinzip nicht weiterverfolgt, so gibt es also zumindest Weyl-Gruppen und Dynkin-Diagramme). Die vielen neuen Termini machen die Lektüre für den Fachmann lästig und sie erschweren jedem Studenten, der sich anhand dieses Buchs in die Theorie einarbeitet, das Arbeiten mit der Originalliteratur, selbst mit den früheren Arbeiten der beiden Autoren. Und gerade das Heranführen an die Literatur wird als Hauptziel des Buches notiert: *we try to lead the reader to a point where he can find his way in the original literature*. Meines Erachtens wäre es das Beste, wenn der Verlag statt des gedruckten Textes eine Disketten-Fassung anbietet: dies würde jedem Leser gestatten, mit Hilfe eines Texteditors irritierende Neuschöpfungen durch Standard-Bezeichnungen zu ersetzen.

### Zusatz (30.4.1996)

Die vorliegende Besprechung wurde im März 1994 für den Jahresbericht geschrieben. In der Zwischenzeit ist ein Buch von M. Auslander, I. Reiten und S. O. Smalø erschienen, das ähnlichen Fragestellungen gewidmet ist: *Representation Theory of Artin Algebras* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press 1995). Das Hauptinteresse auch dieses Buches gilt der Darstellungstheorie der endlich-dimensionalen Algebren, allerdings werden die Ergebnisse in einem etwas allgemeineren Rahmen präsentiert: Bei den im Titel genannten „Artinalgebren“ handelt es sich um Folgendes: Gegeben ist ein kommutativer artinscher Ring  $R$ , betrachtet werden  $R$ -Algebren, die als  $R$ -Moduln endlich erzeugt sind; typischerweise ist  $R$  ein kommutativer Körper (dann erhält man gerade die endlich-dimensionalen Algebren über einem Körper) oder ein Ring der Form  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , wobei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl ist (die entsprechenden  $R$ -Algebren spielen zum Beispiel bei zahlentheoretischen Untersuchungen eine Rolle). Das Buch von Auslander, Reiten und Smalø kann ohne jede Einschränkung als Einführung empfohlen werden. Die Grundbegriffe der Darstellungstheorie, wie sie vor allem von Auslander und Reiten eingeführt wurden, werden dort ausführlich und wohlfundiert präsentiert, allerdings wird auf die Behandlung vieler weiterführender Themen vollständig verzichtet.

Bielefeld

C. M. Ringel

Zu der Besprechung (im Heft 97, 3) des Buches *Neutsch, W., Scherer, K., Celestial Mechanics*, BI-Wissenschaftsverlag teilen die Autoren mit, daß – infolge der Auflösung des Verlages – bei ihnen Restexemplare des Buches verbilligt (DM 50,-) bezogen werden können (PD. Dr. W. Neutsch, Institut für Astrophysik, Auf den Hügeln 71, 53121 Bonn).

# Bär

## Geometrie

Eine Einführung in die analytische  
und konstruktive Geometrie

**MATHEMATIK**

FÜR INGENIEURE UND NATURWISSENSCHAFTLER

Bär  
**Geometrie**



B.G. Teubner Verlagsgesellschaft  
Stuttgart · Leipzig

Technik und Naturwissenschaften sind reich an geometrischen Modellen: Lagebeziehungen, Maße, Winkel, Bewegungen und Oberflächenformen sind für die Gestaltung von Mechanismen, Robotern, Maschinenelementen, Bauwerken oder Karosserien, aber beispielsweise auch von Strahlenverläufen in der Photogrammetrie von unentbehrlicher Bedeutung.

Dieses Buch vermittelt ein solides Fundament an geometrischem Grundwissen zu geometrischen Formen, deren Erzeugungsweisen und Eigenschaften sowie zu metrischen Beziehungen. Es behandelt elementare Bewegungen und deren Zusammensetzung und führt den Leser bis zu Abbildungen, wie der Parallel- und Zentralprojektion, und zu den Grundmethoden rechnergestützter Konstruktion von Kurven und Flächen, die in der Computergraphik und im CAD benötigt werden. Künftigen Ingenieuren und Mathematikern, aber auch manchem Praktiker wird dieses Buch helfen, geometrische Formen und Vorgänge zu verstehen, zu gestalten, zu zeichnen und auch zu berechnen.

Von Prof. Dr. **Gert Bär**  
Technische Universität  
Dresden

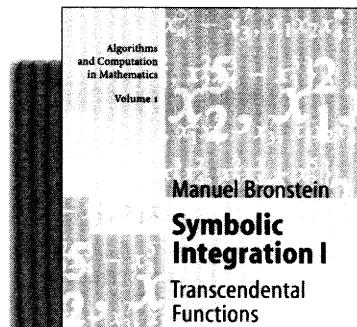
1996. 216 Seiten.  
16,2 x 22,9 cm.  
Kart. DM 34,80  
ÖS 258,- / SFr 31,-  
ISBN 3-8154-2072-5

(Mathematik für Ingenieure  
und Naturwissenschaftler)



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig  
Postfach 80 10 69 · 70510 Stuttgart

**new series . . .**



# Algorithms and Computation in Mathematics

This series is intended to further the development of computational and algorithmic mathematics. In particular, it emphasizes the computational aspects of algebraic geometry, number theory, combinatorics, commutative and non-commutative algebra, differential



**Walter de Gruyter**  
**Berlin • New York**

## **Potential Theory — ICPT 94**

**Proceedings of the International Conference on Potential Theory held in Kouty, Czech Republic, August 13 - 20, 1994**

*Editors:* J. Král • J. Lukeš • I. Netuka • J. Veselý

1996. 17 x 24 cm. IX, 499 pages. Cloth DM 268,- / ös 1.983,- / sFr 255,-  
ISBN 3-11-014654-1

Eleven invited survey lectures and twenty-three research articles provide a broad overview about current activities and trends in potential theory and its relations to other parts of mathematics.

The book is addressed to mathematicians and graduate students specializing in potential theory and related branches of analysis and probability.

## **XVI Rolf Nevanlinna Colloquium**

**Proceedings of the International Conference held in Joensuu, Finland,  
August 1-5, 1995**

*Editors:* I. Laine • O. Martio

1996. 17 x 24 cm. IX, 353 pages. Cloth DM 268,- / ös 1.983,- / sFr 255,-  
ISBN 3-11-014746-7

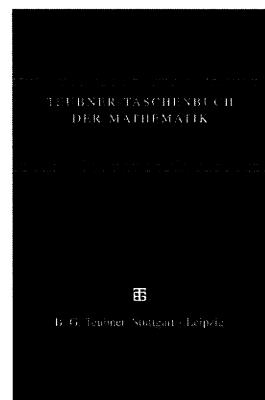
These proceedings contain most of the plenary lectures and a selection of invited lectures delivered at the Colloquium, which was held in commemoration of the centennial of Rolf Nevanlinna. Topics covered include geometric function theory, Nevanlinna theory and complex differential equations, potential theory and partial differential equations, Teichmüller spaces and mathematical physics.

## **Convergence in Ergodic Theory and Probability**

*Editors:* V. Bergelson • P. March • J. Rosenblatt

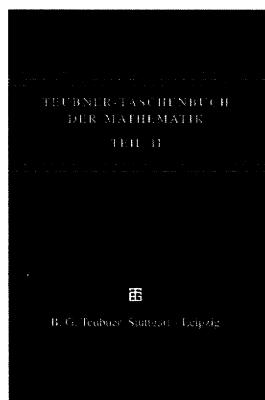
1996. 17 x 24 cm. XI, 445 pages. Cloth DM 198,- / ös 1.465,- / sFr 190,-

# Das Standardwerk völlig neu!



Begründet von **I. N. Bronstein** und  
**K.A. Semendjajew**. Weitergeführt von  
**G. Grosche, V. Ziegler** und **D. Ziegler**  
Herausgegeben von  
Prof. Dr. **Eberhard Zeidler**, Leipzig  
1996. XXVI, 1298 Seiten. 14,5 x 20,5 cm.  
Geb. DM 48,- / ÖS 355,- / SFr 43,-  
ISBN 3-8154-2001-6

Das „TEUBNER-TASCHENBUCH der Mathe-  
matik“ ersetzt den bisherigen Band –  
Bronstein/Semendjajew, Taschenbuch der  
Mathematik –, der mit 25 Auflagen und mehr  
als 800.000 verkauften Exemplaren bei



Herausgegeben von  
Doz. Dr. **Günter Grosche**,  
Leipzig  
Dr. **Viktor Ziegler**  
**Dorothea Ziegler**,  
Frauwalde  
und  
Prof. Dr. **Eberhard Zeidler**,  
Leipzig

7. Auflage. 1995.  
Vollständig überarbeitete und wesentlich  
erweiterte Neufassung der 6. Auflage der  
„Ergänzenden Kapitel zum Taschenbuch“