85. Band Heft 4
ausgegeben am 14. 10. 1983

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

B. G. Teubner Stuttgart 1983

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 85/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs

unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

85. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1983

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, Schwetzingen

Inhalt

1. Abteilung

Jahresbericht

1. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Beran: Bootstrap Methods in Statistics
G. Faltings: Die Vermutungen von Tate und Mordell
B. Hornfeck: Hans-Heinrich Ostmann 1913–1959
K. Johannson: Topologie und Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Carl Ludwig Siegel
1896 bis 1981

Foto: Frau E. Reidemeister

Jber. d. Dt. Math.-Verein
85 (1983) 147–157

Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie*)

Th. Schneider, Freiburg

Wir gedenken eines der bedeutendsten Mathematiker dieses Jahrhunderts: Carl Ludwig Siegel.

Sein Werk fand weltweite Anerkennung, was auch in zahlreichen Ehrendoktoraten, der Ehrenmitgliedschaft oder der Mitgliedschaft angesehener Akademien und wissenschaftlicher Gesellschaften des In- und Auslands und anderer Ehrungen, ich nenne hier nur den Orden Pour le mérite, seinen sichtbaren Niederschlag fand. Dabei hat er die äußere Anerkennung nie gesucht, im Gegenteil, er ist vor ihr eher zurückgewichen und hat kaum Kongresse besucht. Der internationale Kongress in Oslo 1936 und die Jahrestagungen der deutschen Mathematikervereinigung in Jena 1921 und in Göttingen 1955, an denen er vorgetragen hat, dürften die Ausnahmen geblieben sein. Sein Name lebt fort durch seine zahlreichen Abhandlungen, vor allem in der Zahlentheorie und der Funktionentheorie, aber auch in der Himmelsmechanik. Seine gesammelten Werke sind zu seinen Lebzeiten erschienen, und nachdem zu seinem 70ten Geburtstag die ersten drei Bände veröffentlicht worden waren, schrieb Le Veque in den Mathematical Reviews: „The collection stands as a monument to the genius of the author".

Erlauben Sie mir zunächst einige biographische Bemerkungen. Carl Ludwig Siegel wurde am 31. 12. 1896 in Berlin geboren. Seine Eltern stammten aus dem Rheinland, er hatte keine Geschwister. Über seine Kindheit und Jugend ist nicht viel mehr bekannt, als daß er neben seinem Interesse für Mathematik mit besonderer Freude gezeichnet hat. Sein Bildungsweg führte ihn über die Gemeindeschule, die Realschule zur Oberrealschule. Vor dem Übergang von der Realschule zur Oberrealschule glaubte er, sich speziell in Mathematik noch besser vorbereiten zu müssen, und er fragte in der Stadtbibliothek Berlin nach einem geeigneten Buch über Algebra. Man gab ihm Webers Algebra III, da die beiden Bände I und II ausgeliehen waren. Also begann er darin zu lesen und zu verstehen, was selbst einem Studenten höheren Semesters genügend Mühe bereitet. Im Herbst 1915 schrieb er sich in Berlin für das Studium der Astronomie ein. Er schreibt dazu in seinen Erinnerungen an Frobenius (1968): „Als ich Herbst 1915 an der Berliner Universität immatrikuliert wurde, war gerade ein Krieg in vollem Gange. Obwohl ich die politischen Ereignisse nicht durchschaute, so faßte ich in instinktiver Abneigung gegen das

*) Vortrag, gehalten bei der Jahrestagung der DMV am 30. 9. 1982 in Bayreuth

gewalttätige Treiben der Menschen den Vorsatz, mein Studium einer der irdischen Angelegenheiten möglichst fernliegenden Wissenschaft zu widmen, als welche mir damals die Astronomie erschien. Daß ich trotzdem zur Zahlentheorie kam, beruhte auf folgendem Zufall. Der Vertreter der Astronomie an der Universität hatte angekündigt, er würde sein Kolleg erst 14 Tage nach Semesterbeginn anfangen, was übrigens in der damaligen Zeit weniger als heutzutage üblich war. Zu den Wochenstunden, Mittwoch und Sonnabend 9 bis 11 Uhr, war aber auch eine Vorlesung von Frobenius über Zahlentheorie angezeigt. Da ich nicht die geringste Ahnung davon hatte, was Zahlentheorie sein könnte, so besuchte ich aus purer Neugier zwei Wochen lang dieses Kolleg, und das entschied über meine wissenschaftliche Richtung, sogar für das ganze weitere Leben. Ich verzichtete dann auf Teilnahme an der astronomischen Vorlesung, als sie schließlich anfing und blieb bei Frobenius in der Zahlentheorie". Die Vorlesungen von Frobenius haben ihn stark beeindruckt. Er schildert diese in seinen schon genannten Erinnerungen so: „Frobenius sprach völlig frei, ohne jemals eine Notiz zu benutzen, und dabei irrte oder verrechnete er sich kein einziges Mal während des ganzen Semesters. Als er zu Anfang die Kettenbrüche einführte, machte es ihm offensichtlich Freude, die dabei auftretenden verschiedenen algebraischen Identitäten und Rekursionsformeln mit größter Sicherheit und erstaunlicher Schnelligkeit der Reihe nach anzugeben, und dabei warf er zuweilen einen leicht ironischen Blick ins Auditorium, wo die eifrigen Hörer kaum noch bei der Menge des Vorgetragenen mit der Niederschrift folgen konnten". Und an späterer Stelle des gleichen Artikels über Frobenius sagt Siegel: „Ich habe bereits erwähnt, daß ich nicht gut erklären kann, wodurch die starke Wirkung der Vorlesungen von Frobenius hervorgerufen wurde. Nach meiner Schilderung der Art seines Auftretens hätte die Wirkung eher abschreckend sein können. Ohne daß es mir klar wurde, beeinflußte mich wahrscheinlich die gesamte schöpferische Persönlichkeit des großen Gelehrten, die eben auch durch die Art seines Vortrags in gewisser Weise zur Geltung kam. Nach bedrückenden Schuljahren unter mittelmäßigen oder sogar bösartigen Lehrern war dies für mich ein neuartiges und befreiendes Erlebnis". Am Ende dieses seines ersten Semesters erhielt Siegel dann den Eisensteinpreis, der in Berlin einmal jährlich einem begabten Studenten der Mathematik verliehen wurde, und den Frobenius beantragt hatte.

Die Lösung des Problems, das Siegel zum Gegenstand seiner späteren Dissertation gemacht hat, hatte er bereits in seinem dritten Studiensemester gefunden. Es handelt sich dabei um die Verschärfung eines Satzes von A. Thue aus dem Jahre 1908 über die Approximation algebraischer Zahlen durch rationale. Ich werde später kurz auf die mathematische Seite eingehen. Siegel schreibt dazu in einer kam ich bald in Verwirrung durch die vielen Buchstaben c, k, Θ, ω, m, n, a, s, deren tiefere Bedeutung mir rätselhaft schien. Um nun doch etwas mehr verstehen zu können, änderte ich die Anordnung der Hilfssätze, führte auch neue Symbole ein, und unter diesen war dann, weniger durch geordnetes Denken als durch Zufall, noch ein bei Thue nicht aufgetretener Parameter, der zu meiner Verwunderung eine Verschärfung des Approximationssatzes ergab. Da ich in meiner Überlegung keinen Fehler finden konnte, so schrieb ich sie auf, etwa 4 Seiten lang, und gab es Schur bei der nächsten Gelegenheit zur Beurteilung. Ich wurde aber in meiner Erwartung tief enttäuscht, denn Schur reichte mir, ein paar Wochen später, das durch Lagern an der Sonne auf seinem Schreibtisch schon vergilbte Manuskript mit der kurzen Bemerkung zurück, ich hätte bloß mit Identitäten gerechnet, und aus diesen ließe sich nichts schließen. Nachdem ich kurz darauf zu militärischer Verwendung eingezogen worden war, mag wohl auch jene Enttäuschung zu meinem nervösen Zusammenbruch beigetragen haben. Meine Erbitterung über den Mißerfolg bei Schur löste sich erst zwei Jahre später, als ich durch glückliche Umstände Edmund Landau in Berlin sprechen konnte und dieser für mein Manuskript Interesse zeigte. Zunächst hatte ich in erneuter Fassung 6 Seiten dafür verwendet, und Landau meinte nach Durchsicht, die Wahrscheinlichkeit für Richtigkeit sei 15 Prozent. Im Sommer 1919 konnte ich mein Studium in Göttingen wieder aufnehmen und schrieb unter Landaus ständiger Kritik mehrere verbesserte Fassungen des Beweises, wobei die Seitenzahl allmählich auf 40 anstieg und entsprechend jene Wahrscheinlichkeit auf 90 Prozent. Darauf erklärte schließlich Landau, er wolle meine Arbeit als Dissertation annehmen."

Nach der am 2. 6. 1920 erfolgten Promotion war Siegel im WS 20/21 Lehrbeauftragter in Hamburg und danach drei Semester lang Assistent bei R. Courant in Göttingen. Seine außergewöhnliche wissenschaftliche Tätigkeit zeitigte rasche Erfolge. Allein in den beiden Jahren 1921, 1922 erschienen 13 Publikationen. In Göttingen drängte man ihn, sich schnellstens zu habilitieren, um ihn dadurch vielleicht am Orte noch etwas halten zu können. Allein die Ernennung zum Privatdozenten am 10. 12. 1921 konnte nicht verhindern, daß er bereits am 1. 8. 1922 als Nachfolger von A. Schoenflies auf eine ordentliche Professur an die Universität Frankfurt berufen wurde.

Hier beginnt nun jene Zeit, die er in seinem Bericht zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars anläßlich der 50-Jahr-Feier der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität ausführlich geschildert hat, und in die nach seinen Worten die schönsten Jahre seines Lebens gefallen sind. Besonders weist er auf das harmonische Verhältnis zu seinen damaligen Kollegen hin und auf das durch Max Dehn, dem er in lebenslanger Freundschaft verbunden war, initiierte einzigartige mathematisch-historische Seminar, an dem sich alle Kollegen regelmäßig beteiligten.

Bereits im Sommer 1930 war er für ein Semester einer Einladung als Gastprofessor nach Göttingen gefolgt, und nachdem sich seit 1933 die politischen Verhältnisse auf seine Frankfurter Kollegen besonders stark auswirkten, verläßt er zum 1. 1. 1938 Frankfurt endgültig, um in Göttingen eine Professur anzunehmen vanced Study in Princeton zunächst bis 1945 ein Forschungsstipendium und danach eine feste Stellung, in der er bis zum Frühjahr 1951 verbleibt. Den Winter 1946/47 hatte er währenddessen wieder in Göttingen als Gastprofessor verbracht, und 1951 nimmt er wieder einen Ruf auf ein freigewordenes Ordinariat an.

Zum 1. 4. 1959 läßt er sich in Göttingen emeritieren. Auch nach seiner Emeritierung führt er die Vorlesungstätigkeit noch für mehrere Jahre weiter. Ferner gibt er zwischen 1955 und 1967 insgesamt viermal, jedesmal für mehrere Monate, Gastvorlesungen am Tata-Institute for Fundamental Research in Bombay.

In zunehmender Vereinsamung, aber geistiger Frische vollendet sich sein Leben in Göttingen am 4. 4. 1981.

Die meisten Schüler hatte Siegel in den Jahren nach seiner Rückkehr aus den Vereinigten Staaten. In Frankfurt waren es nur wenige, die ein Examen bei ihm ablegten. Einem seiner damaligen Schüler sagte er, sie sind der elfte, der eine Dissertation bei mir begonnen und der fünfte, der eine solche vollendet hat. Anspruchsvolle Seminare und hervorragende, aber teils überwältigende Vorlesungen schufen eine Auswahl. Dabei waren diese Vorlesungen von einer seltenen Klarheit. Jedes Wort war überlegt. Es drängt sich auf, an das zu denken, was er über die Vorlesungen von Frobenius geschrieben hat.

Sein Leben war erfüllt von seiner Wissenschaft. Andere tiefe Interessen, z. B. für die Malerei, bemerkte nur der ihm Näherstehende, und dieser konnte auch erfahren, daß er vor allem in früheren Jahren eine große Anzahl von Bildern geschaffen hat. Aber auch in der Mathematik spielte für ihn das ästhetische Moment, etwa in der Eleganz eines Beweises, der Perfektion und Ausgefeiltheit einer Vorlesung oder einer Veröffentlichung eine bedeutende Rolle. Gegen so manche neuere Strömungen in seiner Wissenschaft hegte er große Bedenken, da er dieselben als ungünstig für die künftige Entwicklung der Mathematik ansah. Ich möchte an dieser Stelle den Anfang eines Satzes aus seinem Vorwort zur Reduktionstheorie quadratischer Formen zitieren, wo es heißt: „Im Hinblick auf das Prokrustesbett, in das manche Neuerer den herrlichen Leib der Algebra gezwängt haben," usw.

Fast die Hälfte der mathematischen Publikationen Siegels bezieht sich auf Zahlentheorie. Der mir zur Verfügung stehende Rahmen gestattet es jedoch nicht, dieses inhaltsreiche zahlentheoretische Werk auch nur einigermaßen gebührend zu würdigen, so daß ich mich damit begnügen muß, auf besonders herausragende Arbeiten hinzuweisen.

Schon die Dissertation gibt die Richtung innerhalb der Zahlentheorie an, in die sich eine ganze Reihe von Arbeiten einordnen lassen, nämlich in das Gebiet der diophantischen Approximationen.

In der Dissertation wird nach der Approximation einer gegebenen algebraischen Zahl durch rationale gefragt, eine Frage, die dann auch allgemeiner auf die Approximation durch algebraische Zahlen ausgedehnt wird. Bezüglich des rationalen Falles heißt dies präziser: Es sei α eine algebraische Zahl n-ten Grades und $\frac{p}{q}$ eine rationale Zahl. Es wird nun nach dem kleinsten Exponenten k gefragt derart, daß die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-k}$$

nur endlich viele Lösungen in rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ hat. Wenn ich das fasttriviale Ergebnis von Liouville (1851), welches ohnehin in diese Form der Frage nicht recht paßt, übergehen darf, so hat Thue (1908) $k = \frac{n}{2} + 1 + \epsilon$ gezeigt. Dieses konnte Siegel auf $k = \underset{\nu+1}{\overset{n}{\mathrm{Min}}}\left(\frac{n}{\nu+1} + \nu\right) + \epsilon < 2\sqrt{n}$ verbessern. Er untersucht hierzu ein mittels des Schubfachschlusses bezüglich seiner Existenz gesichertes geeignetes Polynom in zwei Variablen, das an vorgegebenen Stellen verschwinden soll. Hier sollte ich ein Wort über den Schubfachschluß, ein auch bei anderen Siegelschen Arbeiten wichtiges Hilfsmittel, sagen. Gemeint ist jener simple Schluß: Wenn man n Dinge in m Schubfächer einzuordnen hat, und es ist $n > m$, so existiert mindestens ein Fach, in dem mindestens 2 Dinge liegen. Dieser schon bei Thue und bei Dirichlet vorkommende und nach letzterem benannte Schluß gestattet es, bei einem unterbestimmten homogenen linearen Gleichungssystem mit ganzrationalen Koeffizienten die Existenz ganzzahliger Lösungen mit einer günstigen oberen Schranke für die Absolutbeträge derselben zu garantieren. Da der Schubfachschluß nicht konstruktiv ist, überträgt sich dies meist auch auf die Ergebnisse.

Bald darauf (1921) wies er durch den allgemeineren Ansatz eines Polynoms in genügend vielen Veränderlichen die Richtung des Weges zu der besten Lösung des in der Dissertation behandelten Problems. Er konnte damit zeigen, daß für $k = e\left(\log n + \frac{1}{2 \log n}\right)$ die vorgenannte Ungleichung entweder endlich viele Lösungen besitzt, oder falls es doch unendlich viele seien und diese nach wachsenden positiven Nennern q_μ geordnet werden, dann $\overline{\lim} \frac{\log q_{\mu+1}}{\log q_\mu} = \infty$ gilt. Durch geeignete Änderung der Bedingungen für das Verschwinden des obigen Polynoms in genügend vielen Variablen gelang es dann (1936), die letztgenannte Aussage über die Lösungen der Ungleichung mit $k = 2 + \epsilon$ zu beweisen. Schließlich stellte K. F. Roth (1955) durch Umkehrung der Reihenfolge in dem erforderlichen Eliminationsprozeß das Endresultat her, wonach für $k = 2 + \epsilon$ sogar nur endlich viele Lösungen vorkommen.

Zu den Fragen aus dem Rhueschen Gedankenkreis hat sich Siegel fast 50 Jahre später noch einmal in der aufschlußreichen Arbeit mit dem Titel – einige Erläuterungen zu Thues Untersuchungen über Annäherungswerte algebraischer Zahlen und diophantische Gleichungen – (1970) geäußert.

Bereits mit der Habilitationsschrift zeigt Siegel, daß er auch in anderen Bereichen der Zahlentheorie produktiv ist. In seinem Habilitationsgesuch am 11. 8. 1921 schreibt er, „zuerst interessierte mich mehr die algebraische Richtung der Zahlentheorie, sowie der Gruppentheorie. Als ich dann durch eingehende Beschäftigung mit Funktionentheorie die mächtigen Hilfsmittel kennen gelernt hatte, mit denen sie insbesondere die Theorie der algebraischen Zahlkörper fördert, wandte ich mich mehr der analytischen Zahlentheorie zu. Momentan begründe ich die Anfänge einer additiven Theorie der Zahlkörper, deren erste Sätze in meiner Habilitationsschrift entwickelt sind". Und so legt er im Anschluß an seine Publikation über die Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate (1921), in der er den von Hilbert aufgestellten, aber nicht bewiesenen Satz, wonach sich jede total positive Zahl eines Zahlkörpers K als Summe von vier Quadraten aus K darstellen läßt, gezeigt hat, seine Habilitationsschrift mit dem Titel – Zur additiven Theorie der Zahlkörper – (1922) vor. Hier zeigt er unter Benutzung der analytischen Methoden von Hardy, Littlewood und Ramanujan in Übertragung der von diesen behandelten Fragestellungen eine asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen einer total positiven ganzen Zahl eines total reellen algebraischen Körpers als Summe von s Quadraten ($s \geqslant 5$) ganzer Zahlen desselben Körpers. Der besonders interessierende Fall $s = 4$ wird in einer bald darauf erschienenen Arbeit des gleichen Titels II (1923) behandelt. Dabei gelingt es, durch Modifikation der Methode speziell zu folgern, daß jede ganze total positive Zahl eines beliebigen Zahlkörpers, multipliziert mit dem Quadrat einer nur von dem Körper abhängigen natürlichen Zahl, sich als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen des Körpers darstellen läßt.

In den beiden Arbeiten über die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktionen (beide 1922) beschäftigt sich Siegel mit der Übertragung der entsprechenden Riemannschen Sätze. Riemann hat für die Fortsetzbarkeit seiner Zetafunktion zwei verschiedene Beweise gegeben. Der eine benutzt den Cauchyschen Integralsatz, der andere eine Formel aus der Theorie der Thetafunktionen. Den zweiten Riemannschen Ansatz hat Hecke auf den Beweis der Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung übertragen, und Siegel zeigt nun in seiner ersten Arbeit, daß auch die Idee des ersten Beweises mittels des Cauchyschen Satzes sich sinngemäß bei der Untersuchung der Zetafunktion eines Zahlkörpers verwenden läßt. In der zweiten Siegelschen Arbeit wird ausgeführt, daß der Dirichletsche Satz über die Grundeinheiten eines algebraischen Zahlkörpers, der ja bei der Definition der Zetafunktion entbehrlich ist, und der bei beiden bisher bekannten Beweisen über die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung vorausgesetzt werden mußte, hierbei nicht benötigt wird.

Im Jahre 1929 erschien nun die große zweiteilige Publikation mit dem bescheidenen Titel – Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen –, die Siegel, wie er erzählte, in Pontresina, jenem Schweizer Ferienort, den er immer wieder aufsuchte, niedergeschrieben hat. Es steht mir nicht zu, und ich maße mir auch nicht an, die Arbeiten Siegels gegeneinander zu bewerten, aber wer die Genialität des Zahlentheoretikers Siegel erahnen will, der lese nur diese 70 Seiten. Der

[redacted]

Teil aber so knapp, daß deren Durchführung als wissenschaftliche Aufgaben gestellt werden könnten. Die Beweismethode kann sich kaum an Vorbilder anlehnen, denn sie hat mit den bis dahin bekannt gewesenen Transzendenzuntersuchungen so gut wie nichts gemein. Hingegen ist es kaum zu verwundern, daß die Methode die Theorie der transzendenten Zahlen, die seit den Entdeckungen von Hermite und Lindemann trotz vielfältiger Bemühungen bekanntester Mathematiker stagnierte, äußerst befruchtet hat. Schon die Idee, daß man nicht die Reihen der interessierenden Funktionen untersucht, sondern erst eine Form in den Funktionen mit Polynomkoeffizienten mittels des Schubfachschlusses so bildet, daß deren Potenzreihe bei $x = 0$ von einer hohen Ordnung verschwindet und diese dann untersucht (Satz 7), hat weitreichende Wirkungen auf andere Transzendenzprobleme gehabt. Und so hat die Transzendenztheorie, nachdem auch fast gleichzeitig mit der Siegelschen Arbeit der Transzendenzbeweis von e^{π} durch A. Gelfond erschienen war, einen neuen ungeahnten Aufschwung genommen. Unter anderem wurde bald darauf (1934) das Problem der Transzendenz von a^b für algebraisches, aber irrationales b und algebraisches $a \neq 0,1$ gelöst, aber dies war nur ein Anfang. Die Siegelsche Methode selbst konnte schließlich von A. B. Shidlovski (1954) auf E-Funktionen, die Differentialgleichungen höherer Ordnung genügen, erweitert werden.

Siegel schreibt am Ende einer den den beiden Teilen vorausgeschickten ausführlichen Einleitung, daß er zu den Problemen im ersten Teil durch „die schönen Irrationalitätsuntersuchungen von W. Maier", seinem ersten Doktoranden schen Satz gelingt es Siegel, die zu behandelnde Frage auf ein Approximationsproblem zurückzuführen, auf welches sein Approximationssatz aus seiner Dissertation angewendet werden kann. Dies liefert den Beweis der Behauptung. Siegel hat die Fragestellung dann noch erweitert, indem nicht nur nach ganzzahligen Lösungen, sondern nach rationalen, allerdings mit beschränkten Nennern gesucht wird, und er beweist auch hierfür den gleichen Satz. Diese letztgenannte Frage legt den Gedanken nahe, das Problem umzuschreiben, indem man für x und y homogene Koordinaten einführt, wodurch die algebraische Gleichung in eine homogene Form übergeht, und man nach ganzzahligen Lösungen, allerdings mit obiger Einschränkung fragt. Hier liegt ein Zusammenhang mit der Gleichung von Fermat auf der Hand, und Siegel schreibt dazu in seiner Arbeit: „Durch den Satz von Weil wird nahegelegt, das Theorem von Fermat und allgemeiner die Theorie der algebraischen diophantischen Gleichungen mit zwei Unbekannten von einer neuen Seite anzugreifen. Doch dürfte wohl der Beweis der Vermutung, daß jede solche Gleichung, wenn ihr Geschlecht größer als 1 ist, nur endlich viele Lösungen in rationalen Zahlen besitzt, noch die Überwindung erheblicher Schwierigkeiten erfordern.“

Seine Arbeiten über transzendente Zahlen schließt Siegel (1932) mit einer Note über die Perioden elliptischer Integrale erster Gattung ab, in der er zeigt, daß die beiden Invarianten g_2, g_3 und die beiden primitiven Perioden ω_1, ω_2 nicht sämtlich algebraische Zahlen sein können.

Im Jahre 1949 läßt er nur noch ein Buch über transzendente Zahlen folgen, in dem er die Entwicklung der Theorie schildert.

Der oben genannte Siegelsche Satz über diophantische Gleichungen gestattet wegen des Eingehens des nicht effektiven Siegelschen Approximationssatzes nicht, etwas genaueres über die endlich vielen diophantischen Lösungen auszusagen, ja nicht einmal ihre Anzahl zu bestimmen. Man kann letzteres nur in Spezialfällen tun, und so greift Siegel in seiner Arbeit (1937) die Gleichung $ax^n - by^n = c$ auf, die schon für Thue der Ausgangspunkt seiner allgemeineren Untersuchungen war, und zeigt für $n \geqslant 3$, und wenn $|ab|$ eine nur von n und $c > 0$ abhängige Schranke nicht unterschreitet, daß dann die Ungleichung $|ax^n - by^n| \leqslant c$ höchstens eine Lösung in natürlichen teilerfremden Zahlen besitzt. Interessant ist dabei, daß sich mit Hilfe der Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung die notwendigen Approximationen algebraischer Funktionen durch rationale gewinnen lassen.

Nach der Vereinfachung der Hardy-Littlewoodschen Kreismethode durch Vinogradow, der die erzeugenden Potenzreihen durch endliche trigonometrische Summen ersetzt hat, gelingt es Siegel mittels einer Verallgemeinerung der Farey-Zerschneidung, seine Resultate aus dem Jahre 1922 über die Darstellbarkeit durch Quadrate auf die Verallgemeinerung durch den Waringschen Satz mit beliebigen Exponenten und für algebraische Zahlkörper auszudehnen (1944).

Im Jahre 1952 erschien die Aufsehen erregende Publikation von Heegner über den Beweis der bekannten Gaußschen Vermutung, wonach die von Gauß angegebenen 9 Diskriminantenzahlen imaginärquadratischer Zahlkörper der Klassenzahl 1 die einzigen sind. Der schwer lesbare Beweis enthielt eine Lücke, die von Deuring geschlossen werden konnte. Unabhängig davon veröffentlichte Stark im

Jahre 1967 einen völlig andersartigen Beweis. Siegel stellte dann in einer Arbeit (1968) fest, daß trotzdem beide Beweise auf denselben Sätzen über Modulfunktionen beruhen.

Interessant ist auch die mathematisch-historische Untersuchung über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie (1932), in der nicht nur der Frage nachgegangen wird, ob Riemann etwa durch eine zu belegende heuristische Überlegung auf seine berühmte Vermutung hätte gekommen sein können, sondern auch gezeigt wird, wie stark Riemann die analytischen Hilfsmittel beherrscht hat.

Eine völlig neue Entwicklung stößt Siegel mit seinen drei grundlegenden Arbeiten über die analytische Theorie der quadratischen Formen (1935/36/37) an. Man verdankt Legendre den Satz, daß die diophantische Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ dann und nur dann in rationalen Zahlen x, y lösbar ist, wenn die diophantische Kongruenz $ax^2 + bxy + cy^2 \equiv d \pmod q$ für jeden Modul q eine rationale Lösung besitzt. Trivial ist dabei die Notwendigkeit der Bedingung; daß sie jedoch auch hinreichend ist, macht die Bedeutung des Satzes aus. Eine Verallgemeinerung hiervon hat Hasse angegeben. Er fragt nach der rationalen Darstellbarkeit einer quadratischen Form R von n Variablen durch eine quadratische Form Q von m Variablen, also Q in R durch eine homogene lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten zu transformieren. Es sei hier nur der Fall positiv-definiter Formen Q und R besprochen. Sei S die Matrix der quadratischen Form Q von m Variablen, T die Matrix der quadratischen Form R von n Variablen und X die Matrix der linearen Transformation, die Q in R überführt, so gelte also $X'SX = T$. Dies wird nun der rationalen Lösbarkeit der Kongruenz $X'SX \equiv T \pmod q$ für jeden Modul q gegenübergestellt. Der Satz von Hasse sagt dann, daß aus der rationalen Lösbarkeit der Kongruenz für jedes q auch wieder die rationale Lösbarkeit der Matrizengleichung folgt. Der Spezialfall $m = 2$, $n = 1$ liefert den Satz von Legendre. Hierzu wird eine quantitative Verschärfung angestrebt, also eine Aussage über Lösungsanzahl statt Lösungsexistenz. Dazu muß die Fragestellung aber abgeändert werden, damit sie zu einer vernünftigen Lösung führen kann, denn es ist z. B. klar, daß aus einer einzigen rationalen Lösung der Gleichung unendlich viele solcher folgen. Man wird also nur ganzzahlige Lösungen in Betracht ziehen. Auch die Elemente von S und T können ganz vorausgesetzt werden. Sei so $A(S, T)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung in ganzen Matrizen, d. h. Matrizen mit ganzzahligen Elementen, und $A_q(S, T)$ die Anzahl der modulo q inkongruenten ganzen Lösungen der Kongruenz. Die Frage lautet dann: Welcher Zusammenhang besteht zwischen $A(S, T)$ und den $A_q(S, T)$? Die Frage muß noch einmal abgeändert werden, damit sie lösbar wird. Man nennt bekanntlich zwei quadratische Formen miteinander äquivalent, wenn sich deren Matrizen durch eine lineare Substitution mit ganzen Koeffizienten in beiden Richtungen ineinander transformieren lassen. Es ist klar, daß die Anzahl $A(S, T)$ sich nicht ändert, wenn die quadratische Form mit der Matrix S durch eine äquivalente ersetzt wird, d. h. $A(S, T)$ ist eine Klasseninvariante. Analog nennt man zwei Formen zum gleichen Geschlecht gehörig, wenn die entsprechenden Kongruenzrelationen $X'SX \equiv S_1 \pmod q$ und $X_1' S_1 X_1 \equiv S \pmod q$ für jedes q ganzzahlig lösbar sind. Nun muß ich aber erst einmal um Entschuldigung bitten, daß ich das gleiche Wort Geschlecht, welches bei den algebraischen Gebilden schon einmal vorgekommen ist, für zwei völlig verschiedene Begriffe verwende, aber ich halte mich dabei nur an die Literatur. Entweder haben die Mathematiker nicht bemerkt, daß sie verschiedene Dinge mit dem gleichen Wort bezeichnet haben, oder es ist ihnen gleichgültig gewesen. Die Zahlen $A_q(S, T)$ sind also Geschlechtsinvarianten. Ließe sich nun $A(S, T)$ aus den $A_q(S, T)$ berechnen, so wäre diese Zahl ebenfalls eine Geschlechtsinvariante. Hierzu ein Beispiel: Es gehören $Q = x^2 + 55y^2$ und $Q_1 = 5x^2 + 11y^2$ zum gleichen Geschlecht, wie man leicht einsieht. Also haben bei beliebigem q die Kongruenzen $Q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$ und $Q_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$ die gleiche Lösungsanzahl, aber es ist $Q = 1$ ganzzahlig lösbar und $Q_1 = 1$ nicht. Also sind Q und Q_1 nicht äquivalent, d. h. die Klasseneinteilung ist schärfer als die Geschlechtseinteilung. Ein Satz von Hermite besagt, daß jedes Geschlecht nur aus endlich vielen Klassen besteht. Liegen nun im Geschlecht von Q genau h Klassen, so wähle man aus jeder einen Repräsentanten und bilde mit den zugehörigen Matrizen $S_1, \ldots, S_h$ die Anzahlen $A(S_1, T), \ldots, A(S_h, T)$. Die h analogen Zahlen $A_q(S_1, T), \ldots, A_q(S_h, T)$ haben alle denselben Wert $A_q(S, T)$. Der Hauptsatz der Theorie besagt nun, daß zwischen den $A_q(S, T)$ und den Zahlen $A(S_1, T), \ldots, A(S_h, T)$ ein Zusammenhang besteht. Um diesen formulieren zu können, müssen wir noch definieren, was unter den Mittelwerten von $A_q(S, T)$ und $A(S, T)$ zu verstehen sein soll. In der Kongruenz $X'SX \equiv T (\mathrm{mod}\ q)$ ist X eine ganzzahlige Matrix aus m Zeilen und n Spalten, also mn Elementen. Durchläuft X sämtliche modulo q inkongruenten Matrizen und nicht nur die Lösungen der Kongruenz, so erhält man insgesamt q^{mn} Matrizen X, da für jedes Element von X genau q Möglichkeiten bestehen. Dann ist jedesmal $X'SX = Y$ eine ganzzahlige symmetrische Matrix von n Reihen. Da eine n-reihige symmetrische Matrix nur $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängige Elemente besitzt, so hat man $q^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Möglichkeiten für Y. Daher ist

$$\sum_{Y (\mathrm{mod}\, q)} A_q(S, Y) = q^{mn}, \qquad \sum_{Y (\mathrm{mod}\, q)} 1 = q^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

und folglich kann man die Zahl $q^{mn - \frac{n(n+1)}{2}}$ als den mittleren Wert von $A_q(S, T)$ bezeichnen. Entsprechend erklärt man den mittleren Wert von $A(S, T)$. Man deute die $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen Elemente von Y als rechtwinklige cartesische Koordinaten eines Punktes im Raume von $\frac{n(n+1)}{2}$ Dimensionen. Durch die Gleichung $X'SX = Y$ wird so ein beliebiges Gebiet y dieses Raumes abgebildet auf ein Gebiet x im X-Raume, dessen Koordinaten die mn Elemente von X sind. Läßt man nun y auf den Punkt T zusammenschrumpfen und bezeichnet den Grenzwert des Volumenquotienten

$$\lim_{y \to T} \frac{\int_x dX}{\int_y dY} = A_\infty(S, T)$$

als den mittleren Wert von $A(S, T)$, und setzt man noch $A(S, S) = E(S)$, das ist also die Anzahl der ganzzahligen Transformationen der quadratischen Form mit der

Matrix S in sich selbst, so lautet der Hauptsatz:

$$\frac{\dfrac{A(S_1, T)}{E(S_1)} + \ldots + \dfrac{A(S_h, T)}{E(S_h)}}{\dfrac{A_\infty(S_1, T)}{E(S_1)} + \ldots + \dfrac{A_\infty(S_h, T)}{E(S_h)}} = \lim_{q \to \infty} \frac{A_q(S, T)}{q^{mn - \frac{n(n+1)}{2}}},$$

wenn q eine geeignete Folge natürlicher Zahlen durchläuft, z. B. die Folge 1!, 2!, 3!, ... Im Falle $m \leqslant n + 1$ ist auf der rechten Seite noch der Faktor 2^{-1} hinzuzufügen, im Falle $m = n$ außerdem noch im Nenner rechts der Faktor $2^{\omega(q)}$, wo $\omega(q)$ die Anzahl der Primteiler von q bedeutet. Die Formel des Hauptsatzes läßt sich noch wie folgt umschreiben. Für teilerfremde q, r gilt $A_{qr}(S, T) = A_q(S, T) A_r(S, T)$, ferner ist für die Potenzen $q = p^a$ bei festem p der Quotient

$$\frac{A_q(S, T)}{q^{mn - \frac{n(n+1)}{2}}}$$

bei hinreichend großem a konstant, und dieser werde gleich $a_p(S, T)$ gesetzt. Da auch $A_\infty(S_1, T), \ldots, A_\infty(S_h, T)$ alle den gleichen Wert $A_\infty(S, T)$ haben, ergibt sich für die Formel des Hauptsatzes:

$$\frac{\dfrac{A(S_1, T)}{E(S_1)} + \ldots + \dfrac{A(S_h, T)}{E(S_h)}}{\dfrac{1}{E(S_1)} + \ldots + \dfrac{1}{E(S_h)}} = A_\infty(S, T) \cdot \prod_p a_p(S, T).$$

Über dieses Resultat hat Siegel auf dem schon eingangs erwähnten internationalen Kongress in Oslo vorgetragen, und die vorstehenden Ausführungen sind diesem Vortrag entnommen. Die Bedeutung der drei Arbeiten liegt vor allem darin, daß zu diesen arithmetischen Resultaten analytische Interpretationen gegeben werden, was im nächsten Vortrag gezeigt werden soll. Siegel bemerkt dazu: „Dies ist wieder ein Beispiel dafür, daß die Funktionentheorie, der die Arithmetik so mächtige Hilfsmittel verdankt, auch ihrerseits durch zahlentheoretische Probleme ge-

Lassen Sie mich zum Schluß noch sagen, daß Siegels große Leistungen in der Mathematik einmal in seiner Vielseitigkeit begründet sind, zum andern in den mächtigen Schritten, mit denen er die Teile, die er behandelt hat, fördern konnte. Dabei halfen ihm eine ausgezeichnete Kenntnis der vorhandenen Literatur, ein excellentes Gedächtnis und die Fähigkeit, die mathematischen Zusammenhänge mit einer seltenen Klarheit zu durchschauen und zu analysieren. Daß aber auch eine ungeheuere Arbeitskraft dazu gehörte, sei nur am Rande erwähnt.

Er wirkte auf diejenigen, die mit ihm in Berührung kamen, durch die Ausstrahlung seines überragenden Geistes und seiner Persönlichkeit und doch, oder vielleicht gerade deswegen, blieb er innerlich einsam. Es genügte ihm, zu wissen, daß er ein Werk hinterlassen würde, an dem die Nachwelt ermessen könnte, wer er war.

Prof. Dr. Theodor Schneider

Jber. d. Dt. Math.-Verein
85 (1983) 158–173

Das Werk C. L. Siegels in der Funktionentheorie*)

H. Klingen, Freiburg

Am 4. April 1981 starb Carl Ludwig Siegel in Göttingen im Alter von 84 Jahren. Der nachfolgende Vortrag wurde verfaßt zum Gedächtnis und zur Würdigung dieses großen Gelehrten, der schon zu Lebzeiten mit den klassischen Gestalten der Mathematik des 19. Jahrhunderts verglichen und an deren Seite gestellt wurde. Gleichzeitig sollen meine Ausführungen aber auch dazu dienen, die fruchtbaren Ideen Siegels einem möglichst breiten Kreis von Mathematikern insbesondere der jüngeren Generation näher zu bringen. Von den insgesamt drei Vorträgen befaßt sich dieser zweite mit den funktionentheoretischen Arbeiten.

Siegel verstand sich zweifellos in erster Linie als Zahlentheoretiker, und die komplexe Analysis diente ihm zunächst nur als Werkzeug und Hilfsmittel in der analytischen Zahlentheorie. Wie ist es dann zu verstehen, daß ein knappes Drittel der wissenschaftlichen Aufsätze Siegels neben drei Büchern und diversen Vorlesungsausarbeitungen der Funktionentheorie gewidmet ist? Der Grund dafür sind die tiefliegenden Entdeckungen über automorphe Funktionen in mehreren komplexen Variablen, die Siegel bei seinen zentralen Untersuchungen über quadratische Formen im Jahre 1935 machte. Es handelt sich um die Modulfunktionen n-ten Grades, wie sie Siegel zu bezeichnen pflegte, heute meist Siegelsche Modulfunktionen genannt. Man muß sich vor Augen halten, daß die allgemeine Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Variabler damals noch in den Anfängen steckte und die Entdeckung neuer Funktionsklassen sensationell wirkte. Während der folgenden Jahrzehnte erlangten diese Funktionen schnell eigenständige Bedeutung und fanden weltweites Interesse; beispielhaft seien Princeton und Bombay genannt. In diese Epoche echter Pionierarbeit fallen viele der weiteren Untersuchungen Siegels aber auch grundlegende Beiträge anderer Autoren. Die Bedeutung dieser Funktionen wurde so hoch eingeschätzt, daß man die Anwendbarkeit auf die Siegelschen Modulfunktionen vielfach als Prüfstein für Wert oder Unwert allgemeiner funktionentheoretischer Methoden ansah.

Bei dem Umfang des Siegelschen Werkes wäre jegliches Trachten nach vollständiger Darstellung vermessen. Ich möchte daher zunächst den historischen Ausgangspunkt der Siegelschen Modulfunktionen in der analytischen Theorie der quadratischen Formen beschreiben und danach einige Themenkreise auswählen, die

*) Vortrag, gehalten am 20. September 1982 auf der DMV-Tagung in Bayreuth.

von Siegel initiiert wurden. Es soll versucht werden, ihre Weiterentwicklung sowohl in dem Siegelschen Werk selbst als auch bei anderen Verfassern bis zur Gegenwart hin aufzuzeigen. Daß dieses Unterfangen nur einen Eindruck vermitteln kann und notwendig lückenhaft bleibt, versteht sich von selbst und möge entschuldigt werden.

Ich beginne mit dem Siegelschen Hauptsatz, durch den Siegel zu der Entdeckung der Modulfunktionen gelangte. Ein berühmter Satz von Legendre besagt, daß die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

bei gegebenen ganzen Zahlen a, b, c, d genau dann rational lösbar ist, wenn die Kongruenz

$$ax^2 + bxy + cy^2 \equiv d \mod q$$

für jeden Modul q gelöst werden kann. Die Verallgemeinerung auf die Darstellung von Formen durch Formen verdankt man H. Hasse. Während der Legendre-Hassesche Satz nur eine Aussage über die Existenz von Lösungen macht, befaßt sich der Siegelsche Hauptsatz mit Lösungsanzahlen. Der Einfachheit halber beschränke ich mich nun auf den definiten Fall. Seien $S^{(m)}$, $T^{(n)}$ Matrizen positiv definiter quadratischer Formen vom Grade m bzw. n mit ganz rationalen Elementen. Man betrachte die Darstellungsanzahlen

$$A(S, T) = \# \{X^{(m,n)} \text{ ganz} \mid S[X] = T\},$$

$$A_q(S, T) = \# \{X^{(m,n)} \text{ ganz} \mid S[X] \equiv T \mod q\}$$

im absoluten Sinne und für jeden Modul q. Die eckigen Klammern bedeuten dabei die Transformation als quadratische Form, also $S[X] =: {}^tXSX$. Der Siegelsche Hauptsatz stellt einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen her. Zu seiner Formulierung benötigt man noch den Klassen- und Geschlechterbegriff. Die ganzen positiv definiten Formen S und S* gehören zur gleichen Klasse, wenn $S^* = S[U]$ mit unimodularem U gilt; sie gehören zum gleichen Geschlecht, wenn die Kongruenzen $S[X] \equiv S^* \mod q$ und $S^*[Y] \equiv S \mod q$ für jeden Modul q mit ganzen X und Y lösbar sind. Nach Hermite besteht jedes Geschlecht aus endlich vielen Klassen. Siegels Satz lautet folgendermaßen.

Hauptsatz *Seien* $S^{(m)}$, $T^{(n)}$ *positiv definit und ganz,* $n \leqslant m$. *Ist* $S_1, \ldots, S_h$ *ein vollständiges Repräsentantensystem der Klassen des Geschlechts von* S *und* $E(S) = \# \{X \text{ ganz} \mid S[X] = S\}$ *die Ordnung der Einheitengruppe von* S, *dann gilt*

$$\frac{A(S_1, T)/E(S_1) + \ldots + A(S_h, T)/E(S_h)}{A_\infty(S_1, T)/E(S_1) + \ldots + A_\infty(S_h, T)/E(S_h)} = \lim_{q \to \infty} \frac{A_q(S, T)}{q^{m \cdot n - \frac{n(n+1)}{2}}},$$

wobei q *in geeigneter Weise gegen Unendlich strebt (z. B. durchlaufe* q *die Folge* 1!, 2!, 3!, . . .).

Bei dieser Formulierung wurden elementare Faktoren auf der rechten Seite unterdrückt. Die bislang nicht erklärte Größe $A_\infty(S, T)$ ist so etwas wie eine mittlere reelle Lösungsanzahl von $S[X] = T$ und soll nicht näher erläutert werden. Eine einheitliche und besonders übersichtliche Interpretation bekommt man, wenn man [illegible]

daß das Verhältnis der tatsächlichen zu den wahrscheinlichen Darstellungsanzahlen im absoluten Sinne (linke Seite) in Beziehung gesetzt wird zu den entsprechenden q-adischen Größen (rechte Seite). Es sei noch erwähnt, daß sich die rechte Seite als unendliches Produkt

$$\prod_p \alpha_p(S, T)$$

schreiben läßt, wobei

$$\alpha_p(S, T) = \lim_{a \to \infty,\, q = p^a} \frac{A_q(S, T)}{q^{m \cdot n - \frac{n(n+1)}{2}}}$$

die p-adische Darstellungsdichte bedeutet. Beachtet man, daß die $A_\infty(S_\nu, T)$ $(\nu = 1, \ldots, h)$ alle gleich sind, so nimmt der Hauptsatz die geeignetere Gestalt

$$(1) \qquad \frac{A(S_1, T)/E(S_1) + \ldots + A(S_h, T)/E(S_h)}{1/E(S_1) + \ldots + 1/E(S_h)} = A_\infty(S, T) \prod_p \alpha_p(S, T)$$

an.

Es soll nun die von Siegel gegebene Interpretation des Hauptsatzes als analytische Identität beschrieben werden. Man bilde für reelles $S^{(m)} > 0$ und symmetrisches $Z^{(n)}$ mit positivem Imaginärteil die Thetareihe

$$(2) \qquad \vartheta(Z, S) = \sum_{G \text{ ganz}} e^{\pi i \operatorname{tr}(S[G]Z)}.$$

Sie gestattet die Fourierentwicklung

$$(3) \qquad \vartheta(Z, S) = \sum_{T \geq 0} A(S, T) e^{\pi i \operatorname{tr}(TZ)}$$

und ist somit erzeugende Funktion der Darstellungsanzahlen. Die linken Seiten von (1) lassen sich für alle T erfassen durch die Geschlechtsinvariante [illegible] besitzt. Die geraden quadratischen Formen der Determinante 1 bilden nämlich nach Minkowski/Witt ein Geschlecht, und in diesem Fall sind alle Koeffizienten $\gamma(S, C, D) = 1$. Die Identität (4) vereinfacht sich zu

$$F(Z, S) = \sum_{(C,D)} \det (CZ + D)^{-m/2}.$$

Gerade quadratische Formen der Determinante 1 existieren aber nicht für jeden Grad, sondern genau dann, wenn $m \equiv 0 \bmod 8$ ist. Der Wert der Identität vom funktionentheoretischen Standpunkt aus ist daran zu ermessen, daß recht verschiedenartige Bildungen, nämlich Eisensteinreihen und Thetareihen, in einen nicht-trivialen Zusammenhang gebracht werden. Die Thetareihe ist in dem Spezialfall eine Siegelsche Modulform, im allgemeinen nur die Wurzel aus einer Modulform zu einer Kongruenzgruppe. Siegels Theorie der definiten quadratischen Formen [20], [22], [26], [27]*) führt also schon zu zwei wichtigen Konstruktionsprinzipien für Modulformen, nämlich der Bildung von Eisensteinreihen und Thetareihen.

In den Abhandlungen [45], [55], [58], [60] hat Siegel auch den indefiniten Fall behandelt. Verschiedene Abänderungen sind erforderlich. Die Darstellungsanzahlen, welche jetzt unendlich werden, müssen durch Darstellungsmaße ersetzt werden. Bei der Bildung der Thetareihen sind die sogenannten Majoranten von S, das sind positive Formen H mit $S^{-1}[H] = S$, ins Spiel zu bringen. Die Thetareihen werden jetzt zwar nicht-analytische Funktionen, haben aber weiterhin ein einfaches Verhalten gegenüber Modulsubstitutionen. Erst ein Mittelungsprozeß über Teile des Majorantenraumes führt dann zu Funktionen, die wieder eine Eisensteinsche Partialbruchentwicklung besitzen. Der Vergleich beider Darstellungen führt dann auch im indefiniten Fall zu arithmetischen Resultaten. Hier ist ein Ansatzpunkt für die spätere Behandlung von nicht-analytischen Modulformen durch H. Maaß, A. Selberg u. a. zu sehen.

Der erste der ausgewählten Themenkreise möge heißen

Diskontinuierliche Gruppen und ihre Fundamentalbereiche

Es gibt eine größere Zahl von Arbeiten in den Gesammelten Abhandlungen, die hier einzuordnen sind. Zum Teil behandeln sie diskontinuierliche Gruppen als Grundlage für die zugehörigen automorphen Funktionen, andere betreffen Fragen der Zahlentheorie, wieder andere sind methodisch von abstrakter Art wie etwa die Abhandlung [43] über „Discontinuous groups". Unter Verletzung der chronologischen Reihenfolge beginne ich mit der Arbeit [41] über „Symplectic geometry" nannten starren Bereiche sinnvoll erscheint. Die schwächere Forderung der Homogenität beinhaltet die Transitivität der Automorphismengruppe. Bekanntlich sind beschränkte symmetrische Gebiete homogen. Die Umkehrung wurde lange als richtig vermutet, aber schließlich im Jahre 1959 durch ein Gegenbeispiel von I. I. Pjateckij-Šapiro widerlegt. E. Cartan klassifizierte die beschränkten symmetrischen Gebiete; es gibt vier Haupttypen und zwei exzeptionelle Typen, aus denen man alle derartigen Gebiete durch einfache Prozesse gewinnen kann. Inzwischen sind auch die homogenen beschränkten Gebiete klassifiziert und studiert worden; man vergleiche dazu die Untersuchungen von S. G. Gindekin, I. I. Pjateckij-Šapiro, E. B. Vinberg u. a.

Einer der Cartanschen Haupttypen ist der Siegelsche Halbraum

$$H_n = \{ Z^{(n)} = X + iY \mid Z \text{ symmetrisch}, Y > 0\}$$

bzw. ein beschränktes Modell desselben. Die Automorphismengruppe von H_n wird beschrieben durch die Operation

$$Sp_n(\mathbf{R}) \times H_n \to H_n, \qquad (M, Z) \mapsto M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1},$$
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

der symplektischen Gruppe $Sp_n(\mathbf{R})$ auf H_n. Siegel führt die symplektische Metrik und ihr Volumelement auf H_n durch

$$ds^2 = \operatorname{tr}(Y^{-1} dZ Y^{-1} d\bar{Z}), \qquad dv = \frac{dX dY}{\det Y^{n+1}}$$

ein und untersucht die geometrischen Eigenschaften des so entstehenden Riemannschen Raumes. Besondere Aufmerksamkeit verdient die von Allendoerfer-Fenchel-Weil verallgemeinerte Gauß-Bonnet-Formel

$$\chi = \pi^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \int_F K dv.$$

Hierin bedeutet F eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die z. B. durch Quotientenbildung von H_n nach einer diskontinuierlichen Gruppe Γ entstanden sei, K ist die Krümmung, χ die Eulersche Charakteristik, m die Anzahl der reellen Variablen und dv das symplektische Volumelement. Die Krümmung K wurde von Siegel als rationale Konstante bestimmt; somit kann die Berechnung der Eulerschen Charakteristik vermöge obiger Formel auf die Bestimmung des symplektischen Volumens von F zurückgeführt werden. Dieser Gedanke wurde in neuerer Zeit von G. Harder wieder aufgegriffen.

Es werden dann allgemein diskontinuierliche Untergruppen der symplektischen Gruppe behandelt. Im Hinblick auf die Theorie der automorphen Funktionen sind dabei Einschränkungen vorzunehmen. In Anlehnung an die Fuchsschen Gruppen erster Art, die in der Theorie einer Veränderlichen eine wichtige Rolle spielen, führt Siegel diskontinuierliche Gruppen erster Art ein durch die Forderung nach einem Fundamentalbereich F mit folgenden Eigenschaften:

(i) jedes Kompaktum in H_n werde von endlich vielen Bildern von F überdeckt,
(ii) F habe nur endlich viele Nachbarn,
(iii) F besitze endliches symplektisches Volumen.

In der Theorie einer Veränderlichen kann man die Uniformisierungstheorie Riemannscher Flächen, geometrische Verfahren nach L. R. Ford oder arithmetische Methoden zum Nachweis solcher Gruppen heranziehen. In mehreren Variablen ist man bis heute auf die letzte dieser Möglichkeiten angewiesen; ein Satz von A. Selberg aus dem Jahre 1960 bringt sogar grob gesprochen zum Ausdruck, daß für $n > 1$ alle diskontinuierlichen Gruppen erster Art notwendig arithmetisch definiert sind. – In seiner Arbeit über symplektische Geometrie gewinnt Siegel eine große Klasse solcher Gruppen durch simultane Einheitengruppen Hermitescher und alternierender Formen in einer imaginär-quadratischen Erweiterung eines totalreellen Zahlkörpers. Es wird u. a. das Kommensurabilitätsproblem für diese Gruppen gelöst. Unter ihnen befindet sich als wichtigstes Beispiel die Siegelsche Modulgruppe $\Gamma_n = Sp_n(\mathbf{Z})$. Als Fundamentalbereich von Γ_n bevorzugt Siegel die durch

$$|\det(CZ + D)| \geqslant 1 \quad \text{für alle } M \in \Gamma_n, \quad Y \text{ reduziert nach Minkowski,}$$
$$|x_{k\ell}| \leqslant 1/2$$

charakterisierte Teilmenge von H_n. Von der dabei auftretenden Minkowskischen Reduktionstheorie wird gleich noch die Rede sein. Dieser Fundamentalbereich besitzt die oben genannten Eigenschaften (i)–(iii), so daß sich Γ_n als diskontinuierliche Gruppe von der ersten Art erweist. Die genaue Berechnung des Volumens ergibt einen interessanten Zusammenhang mit der Riemannschen ζ-Funktion durch die Formel

$$V(F) = 2 \prod_{k=1}^{n} (k-1)!\, \pi^{-k} \zeta(2k).$$

Eine Verallgemeinerung der Siegelschen Modulgruppe findet man in der Abhandlung [59] mit dem Titel „Die Modulgruppe in einer einfachen involutorischen Algebra“.

Ich komme nun zu sprechen auf diskontinuierliche Gruppen und Fundamentalbereichkonstruktionen in der Zahlentheorie. Die Gruppen sollen also jetzt lediglich auf einem topologischen Raum als Gruppe von Homöomorphismen operieren. Die Beispiele, die Siegel in dieser Hinsicht behandelt, betreffen die quadratischen Formen und traten bei der Siegelschen Modulgruppe bereits als Hilfsmittel in Erscheinung.

Die Reduktionstheorie der definiten quadratischen Formen geht bekanntlich auf H. Minkowski zurück. Man läßt die unimodulare Gruppe U_n vom Grade n auf dem Raum P der definiten quadratischen Formen gleichen Grades n vermöge

$$U_n \times P \to P, \qquad (U, Y) \mapsto Y[U]$$

operieren. Der Minkowskische reduzierte Bereich, das ist ein Fundamentalbereich von U_n, lautet

$$R = \{ Y \in P \mid Y[g] \geqslant y_{kk} \text{ für alle ganzen Spalten g mit } (g_k, \ldots, g_n) = 1, \; y_{k-1,k} \geqslant 0 \}.$$

Siegels Verdienst besteht zunächst in einigen grundlegenden Vereinfachungen und einer Systematisierung dieser Theorie. So führte er zwei gegenüber R etwas vergrößerte Bereiche durch die folgenden *endlich* vielen Bedingungen ein:

$Q(t) = \{ Y \in P \mid (a) - (c) \}$, $Q'(t) = \{ Y = D[V] \text{ Jacobische Zerlegung, } (d) - (e) \}$

(a) $y_k < t y_{k+1}$

(b) $2 |y_{k\ell}| < t y_k$

(c) $\Pi\, y_k < c_n t \det Y$

(d) $d_k < t d_{k+1}$

(e) $|v_{k\ell}| < t$.

Dabei ist c_n eine nur von n abhängige Konstante. R liegt in $Q(t)$ für jedes $t > 1$; $Q(t)$ und $Q'(s)$ sind wechselseitig ineinander enthalten, wenn man über die Parameter s bzw. t geeignet verfügt. Die grundlegenden Eigenschaften von R bleiben trotz dieser Vereinfachungen erhalten; zum Beispiel das Auftreten von höchstens endlichfachen Überlappungen bei den Bildern dieser Bereiche unter der unimodularen Gruppe. Heute bezeichnet man solche Mengen als Siegelbereiche, sie spielen in der Theorie der arithmetisch definierten Untergruppen von algebraischen Gruppen eine wichtige Rolle. – Die Abhandlungen [25], [50] und [73] befassen sich mit der Minkowskischen Formel für das Volumen desjenigen Teils der Minkowskischen Pyramide, der durch die zusätzliche Bedingung $\det Y \leqslant q$ abgegrenzt wird. Das Volumen läßt sich durch die Riemannsche ζ-Funktion ausdrücken. Dieser Sachverhalt bleibt auch richtig für algebraische Zahlkörper und liefert Gelegenheit zu Rückschlüssen auf die dann auftretende Dedekindsche ζ-Funktion. – Zu erwähnen ist ferner eine Broschüre mit dem Titel „Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen“ [72], die aus Vorlesungen in Japan entstanden ist. Hierin wird die Kompaktifizierung behandelt, die hinsichtlich entsprechender Anwendungen auf H_n/Γ_n (vgl. [65]) von Bedeutung ist. Die anstehenden Fragen werden konkret mittels geeigneter Koordinaten und mit geometrischen Begriffsbildungen beschrieben. Die Kompaktifizierung wird so vorgenommen, daß die Endlichkeit des Volumens und die Eigenschaft des Fundamentalbereichs, nur endlich viele Nachbarn zu besitzen, erhalten bleiben. Als letzte Arbeit zur Reduktionstheorie erschien die Abhandlung [96] im Jahre 1972; sie ist Fragen der Konstruktivität gewidmet, einem besonderen Anliegen Siegels in seinen letzten Lebensjahren.

Bei den indefiniten Formen liegen andere Verhältnisse vor. Siegel hat diesen Fall in seiner fundamentalen Arbeit [33] über „Einheiten quadratischer Formen“ erstmals systematisch behandelt und für die Einheitengruppen nutzbar gemacht.

Welche Bedeutung haben nun die diversen Fundamentalbereichkonstruktionen, die an zahlreichen Stellen des Siegelschen Werkes vorkommen? Hierzu seien einige generelle Bemerkungen gestattet. Die Volumbestimmung von Fundamentalbereichen spielt zunächst bei der bereits erwähnten Konzeption des Darstellungsmaßes in der Theorie der quadratischen Formen eine wichtige Rolle. Weiterhin sind Informationen über den Fundamentalbereich stets gleichzeitig Strukturaussagen über die betreffenden Quotientenmannigfaltigkeiten. In diesem Sinne sind die Abhandlungen [65] und [72] zu verstehen. Schließlich gibt es rein gruppentheoretische Folgerungen aus den besprochenen Eigenschaften eines Fundamentalbereichs, z. B. die endliche Erzeugbarkeit oder sogar die endliche Präsentation der betreffenden Gruppe. Unter relativ weiten Voraussetzungen sind die Nachbartransformationen Erzeugende der Gruppe, und die sogenannten lokalen Relationen – dies sind Relationen vom Typ „Nachbartransformation x Nachbartransformation = Nachbartransformation" – ein vollständiges System definierender Relationen. Diese Gedanken wurden, aufbauend auf Ideen von Poincaré, durch M. Gerstenhaber (1953) und H. Behr (1962) in eine präzise Form gebracht.

Zumindest zwei Abhandlungen [43], [53] Siegels haben abstrakte Methoden in der Theorie der diskontinuierlichen Gruppen zum Gegenstand. Es handelt sich darum, geeignete Darstellungsräume für diskrete Untergruppen einer topologischen Gruppe systematisch zu finden. Sei Ω eine lokalkompakte topologische Gruppe mit abzählbarer Basis und Γ eine diskrete Untergruppe. Es werde vorausgesetzt, daß das Haarsche Maß von Ω mod Γ endlich ist. Als Darstellungsräume für Γ kommen die Restklassenräume $\Lambda\backslash\Omega$ nach gewissen abgeschlossenen Untergruppen Λ in Betracht. Ein wichtiger Satz Siegels besagt, daß die Darstellung

$$\Lambda\rho \mapsto \Lambda\rho\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

dann und nur dann diskontinuierlich ist, wenn die abgeschlossene Untergruppe Λ kompakt ist. Um Darstellungsräume möglichst kleiner Dimension zu erhalten, muß man für Λ maximale kompakte Untergruppen wählen. Auf diese Weise gelangt man systematisch zu den vorher behandelten Darstellungsräumen in der Theorie der quadratischen Formen. Es würde keine Schwierigkeiten bereiten, dies zum Beispiel für den definiten Fall in wenigen Zeilen aufzuzeigen. – Diese Siegelschen Ideen haben später Eingang gefunden bei weitreichenden Verallgemeinerungen in der Theorie der algebraischen Gruppen. Sie können auch als Ansatzpunkt für die moderne Behandlung von automorphen Funktionen als Funktionen auf der Gruppe angesehen werden.

Der zweite Problemkreis behandelt das Thema

Algebraische Relationen

Es sollen algebraische Abhängigkeiten zwischen Modulformen und Modulfunktionen sowie weitergehende Aussagen über die linearen Räume aller Modulformen festen Gewichts und über den graduierten Ring aller Modulformen betrachtet werden. In seiner berühmten Arbeit „Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades" [32] hatte Siegel eine Modulform von ganz rationalem Gewicht k noch als auf H_n holomorphe Funktion f erklärt, die dem Transformationsgesetz

$$f(M\langle Z\rangle) = \det(CZ + D)^k f(Z) \qquad (M \in \Gamma_n)$$

genügt und im Siegelschen Fundamentalbereich beschränkt ist. Erst 1954 zeigte M. Koecher, daß die letzte Bedingung für $n > 1$ überflüssig ist. – Modulfunktionen wurden bei Siegel zunächst als Quotienten von Modulformen gleichen Gewichts eingeführt. Es handelte sich also um scheinbar recht „spezielle" meromorphe und bei Γ_n invariante Funktionen auf H_n. Die naheliegende Frage, ob so alle meromorphen und Γ_n-invarianten Funktionen erfaßt werden, hat eine längere Geschichte und soll noch Gegenstand meiner Ausführungen sein. Es ist klar, daß bei der ursprünglichen engen Auslegung des Begriffs „Modulfunktion" die Behandlung von Formen und diejenige von Funktionen gleichwertige Probleme darstellten. Im folgenden soll daher zunächst von Formen die Rede sein. Beispiele von Modulformen standen Siegel von Anfang an durch die bereits genannten Thetareihen und Eisensteinreihen zur Verfügung. Geringfügig verallgemeinert handelt es sich um die folgenden Bildungen:

$$\vartheta_{A,B}(Z^{(n)}, S^{(m)}) = \sum_{G\ \mathrm{ganz}} e^{\pi i \operatorname{tr}(S[G+1/2A]+{}^tBG)} \qquad (A^{(m,n)}, B^{(m,n)} \text{ reell}),$$

$$E_n^k(Z) = \sum_{(C,D)} \det(CZ+D)^{-k}. \tag{5}$$

Siegel hat zunächst einen Ansatz von Poincaré aufgegriffen, um die algebraische Abhängigkeit von hinreichend vielen Modulformen zu beweisen. Es kommt darauf an, für den Rang der Schar der Modulformen von festem Gewicht k und Grad n die Abschätzung $O(k^{\frac{n(n+1)}{2}})$ einzusehen. Vergleicht man nämlich diese Abschätzung mit der Anzahl der Glieder einer isobaren algebraischen Gleichung, so folgt die algebraische Abhängigkeit von je $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ Modulformen beliebigen Gewichts.

Bei dieser Gelegenheit sollen einige Ausführungen über die linearen Räume aller Modulformen festen Gewichts eingeschoben werden. Wie kommt man zu einer Dimensionsabschätzung obiger Art? Es gibt verschiedene verwandte Verfahren. Das erste arbeitet mit den Fourierentwicklungen.

$$f(Z) = \sum_{T \geqslant 0} a(T) e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)} \tag{6}$$

von Modulformen. Man schließt aus dem Verschwinden hinreichend vieler Fourierkoeffizienten auf das identische Verschwinden von f vermöge analytischer Eigenschaften. Die Anzahl der Fourierkoeffizienten, die man zum Verschwinden bringen muß, ist dann eine obere Schranke für den linearen Rang. An analytischen Eigenschaften benutzt man die Invarianz von $|\det Y|^{k/2} |f(Z)|$ gegenüber Modulsubstitutionen und das Maximumprinzip. Die endgültige Fassung dieser Methode wurde im Jahre 1951 von H. Maaß aufgrund einer brieflichen Mitteilung von Siegel formuliert. – Bei einem ähnlichen Vorgehen von Pjateckij-Šapiro aus dem Jahre 1958 spielt die folgende Aussage über Modulformen eine wichtige Rolle:

Zu jedem $c > 0$ existiert ein im Siegelschen Fundamentalbereich gelegenes Kompaktum K und eine positive Konstante α, so daß

$$\sup_{Y > c1} |f| \leqslant \alpha^k \sup_K |f|$$

für alle Modulformen f vom Gewicht k gilt. Die Konstante α ist unabhängig von f und k.

Schließlich kann man die Endlichkeit der Dimension der Vektorräume aller Modulformen festen Gewichts mit Hilfe der Integralgleichungstheorie einsehen. Modulformen sind nämlich Lösungen einer Integralgleichung vom Hilbert-Schmidtschen Typ.

Siegel selbst systematisierte sein eingangs genanntes Verfahren nochmals in der Abhandlung [40], um es auf größere Klassen von automorphen Formen anwenden zu können. Da man im allgemeinen aber keine Fourierreihen zur Verfügung hat, muß man stattdessen mit Taylorentwicklungen und dem Verschwinden von hinreichend vielen partiellen Ableitungen an einer festen Stelle arbeiten.

Die Fourierreihen (6) wurden im Jahre 1975 von M. Eichler durch folgenden Entwicklungstyp

$$(7)\qquad f(Z) = \sum_{t \geqslant 0} \beta(Z_1, Z_2; t)e^{2\pi i tr(tZ_4)}, \qquad Z = \begin{pmatrix} Z_1^{(r)} & Z_2 \\ {}^tZ_2 & Z_4 \end{pmatrix}, \qquad (0 \leqslant r \leqslant n)$$

ersetzt. Die Koeffizienten β sind „fast“ Modulformen vom Grade r bezüglich Z_1 und Jacobische Funktionen bezüglich Z_2. Eichler konnte mit diesen Entwicklungen die früheren Resultate über den linearen Rang wesentlich verbessern. – Exakte Rangberechnungen konnten nur in wenigen Fällen erzielt werden. J.-I. Igusa bestimmte 1962 den genauen Rang für $n = 2$ und beliebiges gerades Gewicht. Er zeigte nämlich weitergehend, daß der graduierte Ring aller Modulformen geraden Gewichts von den algebraisch unabhängigen Eisensteinreihen E^4, E^6, E^{10}, E^{12} erzeugt wird. Wenige Jahre später konnte er auch die ungeraden Gewichte einbeziehen durch Hinzunahme einer Modulform vom Gewicht 35. Einen elementaren Beweis für das erste Resultat von Igusa verdankt man E. Freitag. Schließlich sind die Untersuchungen von U. Christian (1975) und Y. Morita (1974) zu nennen, welche die Selbergsche Spurformel bei Kongruenzuntergruppen der Siegelschen Modulgruppe vom Grade zwei zur Rangbestimmung auswerteten.

Gehen wir nun zur Behandlung von Modulfunktionen über. Es sei Q_n der Körper der Modulfunktionen im „engeren“ Sinne, also der Quotienten von Formen gleichen Gewichts. Aus den erwähnten algebraischen Relationen zwischen Modulformen ergibt sich sofort die algebraische Abhängigkeit von je $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Funktionen aus Q_n. Andererseits kann man $\frac{n(n+1)}{2}$ algebraisch unabhängige Funktionen nach Siegel als Eisensteinreihenquotienten konstruieren. Ein allgemeineres Verfahren, das mit Poincaréschen Reihen arbeitet, wurde 1952 von A. Borel angegeben. Nun zeigt eine genauere Analyse der algebraischen Gleichungen zwischen Modulformen sogar, daß jedes $f \in Q_n$ beschränkten Grad über $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_{\frac{n(n+1)}{2}})$ hat, wenn $f_1, \ldots, f_{\frac{n(n+1)}{2}}$ algebraisch unabhängig sind. Somit erweist sich Q_n als ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $\frac{n(n+1)}{2}$. Aufgrund der Ergebnisse von Igusa und Freitag ist Q_2 sogar rational.

Unbefriedigend war natürlich die enge Definition der Modulfunktionen als Quotienten von Formen. Im Hinblick auf den Fall $n = 1$ wäre es wünschenswert gewesen, Modulfunktionen als meromorphe und Γ_n-invariante Funktionen einzuführen, wobei allerdings auch eine Meromorphieforderung im Unendlichen als notwendig zu erwarten war. Das folgende Vorgehen bot sich prinzipiell an. Man kompaktifiziere H_n/Γ_n, verlange die Meromorphie in den hinzugefügten Teilen und verwende Methoden aus der Funktionentheorie auf kompakten komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten. Welche Methoden sind dabei gemeint? Ich bin in der Lage, auch dazu wieder auf eine wichtige Arbeit [64] Siegels verweisen zu können. Sie betrifft meromorphe Funktionen auf kompakten komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten M und hat folgende Aussagen zum Inhalt, wobei n die komplexe Dimension von M bezeichnet:

(i) Je $n + 1$ meromorphe Funktionen auf M sind algebraisch abhängig;

(ii) sind $f_1, \ldots, f_n$ algebraisch unabhängige meromorphe Funktionen auf M, so ist der Körper aller meromorphen Funktionen auf M eine endliche algebraische Erweiterung von $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_n)$.

In der Arbeit [65] publiziert Siegel selbst einen ersten Ansatz zu einer Kompaktifizierung von H_n/Γ_n, der von U. Christian in dessen Dissertation ausgeführt wurde. Schwierigkeiten bei der Anwendung des obigen Satzes entstehen natürlich durch das Vorhandensein von Singularitäten. Zur gleichen Zeit entdeckte aber I. Satake eine bessere Kompaktifizierung in Gestalt eines normalen komplexen Raumes vom Typ

$$\overline{H_n/\Gamma_n} = H_n/\Gamma_n \cup H_{n-1}/\Gamma_{n-1} \cup \ldots \cup H_0/\Gamma_0 .$$

Damit schien die Entwicklung zu einem natürlichen Ende gekommen zu sein. Modulfunktionen waren meromorphe Funktionen auf $\overline{H_n/\Gamma_n}$, sie bilden einen algebraischen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $\frac{n(n+1)}{2}$. Die Methode der Satake-Kompaktifizierung gestattet übrigens weitreichende Verallgemeinerungen; man vergleiche dazu die Arbeit von W. L. Baily und A. Borel: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. 84 (1966).

Es dauerte aber nur kurze Zeit bis W. L. Baily im Jahre 1958 die Entdeckung machte, daß die Forderung der Meromorphie in den hinzugefügten Teilen für $n > 1$ (und im Gegensatz zum Fall $n = 1$) in Wahrheit überflüssig ist. Nach diesem überraschenden Resultat schien es nicht aussichtslos, ohne Verwendung der Kompaktifizierung den Nachweis zu versuchen, daß jede in H_n meromorphe und Γ_n-invariante Funktion Quotient von Modulformen im Großen ist. Siegel selbst gelang ein solcher Beweis in seiner Abhandlung [75]. Das Problem wurde gleichzeitig von H. Grauert und A. Andreotti in besonders eleganter Weise gelöst. Die zuletzt genannten Autoren arbeiten mit dem Begriff der Pseudokonkavität der zugrundeliegenden diskontinuierlichen Gruppe. – Es sei aber darauf hingewiesen, daß die Kompaktifizierung für andere Fragen dadurch keineswegs überflüssig wird. Zum Beispiel kann die endliche Erzeugbarkeit des graduierten Rings aller Modulformen bis heute nicht ohne Kompaktifizierung bewiesen werden.

Die genaue Struktur des Körpers der Siegelschen Modulfunktionen kennt man im allgemeinen nicht. Ich erwähnte bereits die Rationalität im Falle $n = 2$. Besondere Verdienste um diese Frage hat sich E. Freitag erworben. Er konnte mit

Hilfsmitteln der algebraischen Geometrie zeigen, daß der Körper der Siegelschen Modulfunktionen in den unendlich vielen Fällen $n \equiv 0 \bmod 24$ und $n \equiv 1 \bmod 8$ $(n > 9)$ sicher nicht rational ist. Die ursprünglich erhoffte Rationalität aller Siegelschen Funktionenkörper scheint also nur in Ausnahmefällen erfüllt zu sein[1]).

Der letzte Themenkreis beinhaltet die

Fourierentwicklungen von Modulformen

Meine Ausführungen betreffen im ersten Teil arithmetische und im zweiten Teil funktionentheoretische Fragen. Es geht zunächst um die zahlentheoretischen Natur der Fourierkoeffizienten von Modulformen. Bereits in seiner „Einführung in die Theorie der Modulfuntkionen n-ten Grades" [32] zeigte Siegel, daß die Eisensteinreihen (5) rationale Fourierkoeffizienten haben. Hieraus folgt, daß die zwischen den Eisensteinreihen bestehenden algebraischen Gleichungen rationale Koeffizienten besitzen. Bedenkt man noch, daß alle Modulfunktionen rational durch Eisensteinreihen ausgedrückt werden können, so ist die Bedeutung dieser Aussage für den Körper der Modulfunktionen evident. Der Beweis beruht auf der Möglichkeit, die Fourierkoeffizienten bis auf einen elementaren Faktor als Produkt gewisser p-adischer Darstellungsdichten zu deuten. Entsprechende Untersuchungen für andere Typen von Eisensteinreihen gehen auf W. L. Baily, L.-C. Tsao, M. L. Karel und G. Shimura zurück. Was kann man über die Nenner aussagen? E. Witt bewies die Beschränktheit der Nenner für $k \equiv 0 \bmod 4$. Siegel zeigte die Richtigkeit dieser Aussage auch für $k \not\equiv 0 \bmod 4$ in seiner Arbeit [79]. In diesem Zusammenhang sind auch zwei spätere Siegelsche Arbeiten [86] und [93] zu nennen. Sie beziehen sich auf die sogenannte paramodulare Gruppe, einer Verallgemeinerung der Siegelschen Modulgruppe, die bei der Behandlung der Abelschen Funktionen in natürlicher Weise auftritt.

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten von Eisensteinreihen spielte eine große Rolle bei der Entdeckung des Struktursatzes von Igusa. Er benutzte dazu die sentliche Koeffizient „1" bei der gewöhnlichen Eisensteinreihe durch eine Spitzenform niederen Grades ersetzt. Obige Bildung beschreibt einen Liftungsprozeß $f \mapsto F$ von Modulformen in wenigen Variablen zu solchen in vielen Variablen. Kürzlich zeigte M. Harris, daß mit f auch F rationale Fourierkoeffizienten besitzt. Diese Aussage stellt eine direkte Verallgemeinerung des Siegelschen Satzes dar. Konkretere Aussagen über das Verhalten der Fourierentwicklungen bei dem obigen Liftungsprozeß werden gegenwärtig manchenorts untersucht.

Zurückkommend auf Siegels Werk sind die beiden Arbeiten [89] und [90] zu nennen, welche die Bestimmung von ζ-Werten behandeln. Ich selbst hatte eine Methode entwickelt, die es erlaubte, das konstante Glied in der Fourierentwicklung einer Modulform aus den höheren Fourierkoeffizienten zu bestimmen. Es wurden dazu die algebraischen Gleichungen zwischen Modulformen herangezogen. Indem ich dieses Verfahren auf die Heckeschen Eisensteinreihen zur Hilbertschen Modulgruppe anwandte, konnte ich folgendes Ergebnis über die Dedekindsche ζ-Funktion erzielen. Für einen total-reellen Zahlkörper K vom Grade n über $\mathbb{Q}$ und der Diskriminante Δ gilt

$$\zeta_K(2k) = \pi^{2kn}\Delta^{1/2}r_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

mit rationalen Zahlen r_k. Diese Aussage verallgemeinert ein bekanntes Resultat von Euler für die Riemannsche ζ-Funktion. Siegel hat in seinen beiden Arbeiten drei neue Gesichtspunkte ins Spiel gebracht, nämlich

(a) die Rückführung auf elliptische Modulformen, indem alle Variablen in den Heckeschen Eisensteinreihen gleichgesetzt werden,

(b) die Linearisierung des Problems durch Einführung von Basen,

(c) die Erkenntnis, daß es geschickter ist, die Rationalität von $\zeta_K(1-k)$ für $k \geqslant 1$ zu untersuchen.

Diese Arbeiten Siegels haben insofern einen großen Einfluß gehabt, weil sie hinsichtlich Motivation und Methodik eine wesentliche Rolle bei der Entstehung der p-adischen Modulformen durch H. P. F. Swinnerton-Dyer und J.-P. Serre spielten.

Ich komme jetzt zu funktionentheoretischen Aussagen, die in Beziehung zu den Fourierentwicklungen stehen. Schon zu Anfang seiner Untersuchungen führte Siegel den sogenannten ϕ-Operator durch den Prozeß

$$f|\phi(Z_1) = \lim_{\lambda\to\infty} f\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}$$

ein. Er läßt sich an Hand der Fourierentwicklung (6) durch

$$f|\phi(Z_1) = \sum_{T_1 \geqslant 0} a\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{2\pi i \operatorname{tr}(T_1 Z_1)}$$

deuten. Durch Anwendung dieses Operators wird also der Grad einer Modulform erniedrigt, während das Gewicht unverändert bleibt. Bezeichnet man mit M_n^k den Vektorraum aller Modulformen vom Gewicht k und Grad n, so beschreibt ϕ für jedes k einen Vektorraumhomomorphismus

$$\phi\colon M_n^k \to M_{n-1}^k .$$

Der Kern von ϕ besteht aus den sogenannten Spitzenformen. Sie lassen sich an Hand ihrer Fourierentwicklung durch die Bedingung $a(T) = 0$ für alle singulären T charakterisieren. R. Godement zeigte als erster, daß die Spitzenformen genau diejenigen Modulformen sind, welche mit den üblichen (in einem beschränkten Modell des Siegelschen Halbraumes gebildeten) Poincaréschen Reihen übereinstimmen. Hierdurch wird klargestellt, welchen Beitrag die Theorie der automorphen Funktionen auf beschränkten Gebieten für die Modulformen zu leisten imstande ist. Man erfaßt lediglich die Spitzenformen. Andererseits reicht die Kenntnis der Spitzenformen aus, wenn man zusätzlich die Umkehrung der Abbildung ϕ analytisch beherrscht. Letzteres wird aber durch die bereits erwähnte Bildung der verallgemeinerten Eisensteinreihen (8) gewährleistet. So gelangt man durch Kombination von Poincaréschen und Eisensteinschen Reihen zu einem sehr durchsichtigen Aufbau aller Modulformen von großem Gewicht k. Insbesondere ist der ϕ-Operator für Gewichte $k > 2n$ surjektiv.

Eine zweite Klasse von Modulformen, die mittels ihrer Fourierentwicklung charakterisiert werden können, sind die singulären Modulformen. Kennzeichnend für sie ist die Bedingung $a(T) = 0$ für alle nicht-singulären T. Sie stellen also ein Gegenstück zu den Spitzenformen dar. Für $n = 1$ handelt es sich um die Konstanten, weswegen ihre Bedeutung erst in jüngerer Zeit entdeckt wurde. Beispiele singulärer Modulformen sind andererseits seit langem bekannt in Form der eingangs erwähnten Klasseninvarianten gerader quadratischer Formen. Nach Siegel/Witt stellt (2) eine Modulform vom Gewicht $k = m/2$ zu einer Kongruenzgruppe dar. Die genaue Stufe der Modulform ergibt sich aus der Stufe der geraden quadratischen Form S. Es wurde schon festgestellt, daß gerade quadratische Formen der Stufe 1 für $m \equiv 0 \bmod 8$ existieren, so daß man Modulformen vom Gewicht $k \equiv 0 \bmod 4$ erhält. In der Fourierentwicklung (3) treten die Darstellungsanzahlen $A(S, T)$ auf. Für $m < n$ können aber sicher nur singuläre T dargestellt werden. Man bekommt somit in Gestalt der Klasseninvarianten (2) Beispiele von singulären Modulformen für beliebige Gewichte $k < n/2$, $k \equiv 0 \bmod 4$. Inzwischen weiß man, daß dies im wesentlichen alle singulären Modulformen sind und daß die singulären Modulformen durch ihre Gewichte, nämlich durch die Bedingung $k < n/2$, charakterisiert werden können. Diese Ergebnisse verdankt man E. Freitag, H. L. Resnikoff, S. Raghavan u. a. Man erinnere sich nun daran, daß schon beim Siegelschen Hauptsatz Eisensteinreihen und Thetareihen auftraten. Zusammen mit den Poincaréschen Reihen liefern sie viel Information über die Gesamtheit aller Modulformen. Die Eisensteinschen und Poincaréschen Reihen sind nützlich bei großen Gewichten, d. h. für $k > 2n$; die Thetareihen dagegen bei kleinen Gewichten, d. h. für $k < n/2$. Umso erstaunlicher ist es, daß man für die mittleren Gewichte keine Ansätze kennt. Selbst bescheidenere Fragen, wie etwa diejenige nach der Surjektivität des ϕ-Operators, sind für solche Gewichte bis heute ungeklärt. Für große Gewichte wurde eine Charakterisierung derjenigen Räume, die von den Thetareihen aufgespannt werden, von E. Freitag in seinen Untersuchungen über stabile Modulformen gegeben[2]).

[2]) Inzwischen konnte S. Böcherer zeigen, daß die Thetareihen für $k > 2n$, $k \equiv 0 \bmod 4$ den vollen Raum aller Modulformen vom Gewicht k aufspannen [Math. Z. **183** (1983) 21–46].

In diesem Zusammenhang müssen auch nochmals die Eichlerentwicklungen (7) genannt werden. Sie spielen einmal eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung der singulären Modulformen durch ihre Gewichte; zum anderen besitzen ihre Fourierkoeffizienten $\beta(Z_1, Z_2, t)$ ein interessantes Transformationsverhalten, dem durch die Bezeichnung „Jacobische Modulformen“ am besten Rechnung getragen wird. Umfangreiche Untersuchungen über jene Funktionen werden zur Zeit von M. Eichler und D. Zagier angestellt.

Zum Schluß meiner Ausführungen möchte ich einige offene Fragestellungen nennen, die im Zusammenhang mit Siegels Werk stehen und welche meines Erachtens das Interesse der mathematischen Fachwelt verdienen.

(I) *Strukturbestimmung der Körper der Siegelschen Modulfunktionen:* E. Freitags Untersuchungen über die Nichtrationalität unendlich vieler Funktionenkörper lassen diese Aufgabe sinnvoll erscheinen. In diesem Zusammenhang gewinnen neue Typen von Modulformen an Bedeutung wie etwa die Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten.

(II) *Arithmetische Resultate im Hinblick auf die Fragestellungen der komplexen Multiplikation:* Bereits bei ihrer Entstehung stellte man in dieser Hinsicht hohe Erwartungen an die Siegelschen Modulfunktionen. Bis heute stecken derartige Untersuchungen noch in den Anfängen und bereiten erhebliche Schwierigkeiten.

(III) *Heckes Theorie für die Siegelschen Modulfunktionen:* Auf diesem Gebiet wurden vor allem durch die Arbeiten von A. N. Andrianov beachtliche Fort-

[illegible]

lichen während der letzten 10 bis 15 Jahre stattgefunden hat und daß entsprechende Fragen in mehreren Veränderlichen gestellt werden können, so ergibt sich ein weites Feld für zukünftige mathematische Forschungstätigkeit. Es besteht somit kein Zweifel, daß Siegels Werk kommenden Generationen reiche Quelle der Erkenntnis und der Inspiration sein wird.

Prof. Dr. H. Klingen
Mathematisches Institut
der Universität
Albertstr. 23b
7800 Freiburg

(*Eingegangen 29. 10. 82*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
85 (1983) 174–200
AMS subject classification: 70 F 15, 34 C 20

Das Werk C. L. Siegels in der Himmelsmechanik

H. Rüßmann, Mainz

Siegel wollte ursprünglich Astronomie studieren, entschied sich aber dann unter dem Einfluß von Frobenius für Zahlentheorie. Dennoch bewahrte er sich lebenslang ein starkes Interesse für Himmelsmechanik, das in Vorlesungen und zwölf Arbeiten seinen Niederschlag fand.

Auf Anregung von Rellich faßte er das Material aus seinen Vorlesungen und den meisten seiner bis 1956 erschienenen Arbeiten in einem Buch zusammen, das 1971 noch eine zweite erweiterte Auflage in englischer Übersetzung erfuhr. An dieser zweiten Auflage war Moser als Mitautor beteiligt, dessen Beiträge neue Entwicklungen in der Himmelsmechanik berücksichtigten.

Danach schrieb Siegel noch zwei Arbeiten zum Verhalten analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, in denen er frühere Untersuchungen zum Abschluß brachte.

Im folgenden gebe ich einen Überblick über diese Beiträge Siegels zur Himmelsmechanik. In den ersten fünf Abschnitten stelle ich die konkreten Probleme aus der Himmelsmechanik vor, zu deren Lösung Siegel beigetragen hat. Um Siegels Leistungen zu würdigen, argumentiere ich aus Gründen der besseren Allgemeinverständlichkeit mehr aus dem historischen Zusammenhang als mit technischen Einzelheiten. Trotzdem ist die Kenntnis einiger elementarer Tatsachen über das n-Körperproblem und das restringierte Dreikörperproblem notwendig, die in den ersten beiden Abschnitten zur Sprache kommen.

Im 7. und 8. Abschnitt werden Siegels Beiträge zum Problem der kleinen Nenner und zur Frage der Konvergenz von Transformationen in die Birkhoffsche Normalform bei Hamiltonschen Differentialgleichungen und inhaltstreuen Abbildungen erörtert.

Schließlich wird im 6. und 9. Abschnitt Siegels Alterswerk [94], [98]*) betrachtet. Diese Arbeiten sind bis jetzt in der zeitgenössischen Literatur gar nicht zur Kenntnis genommen worden. Ich habe mich daher in dem hier gegebenen Rahmen um eine ziemlich vollständige Inhaltsangabe bemüht.

1 Das n-Körperproblem und der Satz von Bruns

Dieser Abschnitt führt zum Satz von Bruns, der den Ausgangspunkt für Siegels erste Veröffentlichung auf dem Gebiet der Himmelsmechanik bil-

*) Vgl. die Numerierung im Schriftenverzeichnis auf S. 201 ff.

det [23]. Die folgenden Ausführungen stützen sich teilweise auf einen Vortrag [35], den Siegel am 11. Februar 1941 gehalten hat.

In der Himmelsmechanik beschäftigt man sich mit dem n-Körperproblem, d. h. mit der Bewegung von n Massenpunkten $P_1, \ldots, P_n$ im dreidimensionalen euklidischen Raum, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gravitationsge-

Wenn wir die Masse von P_k mit m_k, die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k mit x_k, y_k, z_k und den Abstand von P_k, P_ϱ mit

$$r_{k\varrho} = [(x_k - x_\varrho)^2 + (y_k - y_\varrho)^2 + (z_k - z_\varrho)^2]^{1/2}$$

bezeichnen, so ist das Potential der Gravitation durch

$$(1.1) \qquad -U = -\sum_{1 \leqslant k < \varrho \leqslant n} m_k m_\varrho r_{k\varrho}^{-1}$$

gegeben, wobei die Gravitationskonstante zu 1 normiert wurde. Die Differentialgleichungen der Bewegung von P_k lauten

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \qquad m_k \ddot{y}_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \qquad m_k \ddot{z}_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}, \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

wobei ein Punkt Ableitung nach der Zeit t bedeutet.

Dieses System von 3n gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann durch Einführung der Geschwindigkeitskomponenten u_k, v_k, w_k auch als System von 6n Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden:

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &\dot{x}_k = u_k, \qquad \dot{y}_k = v_k, \qquad \dot{z}_k = w_k, \\ &\dot{u}_k = \frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial x_k}, \qquad \dot{v}_k = \frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial y_k}, \qquad \dot{w}_k = \frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial z_k}. \end{aligned} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Wenn ganz allgemein ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(1.3) \qquad \dot{\xi}_k = f_k(\xi_1, \ldots, \xi_m, t) \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

vorliegt, dann bezeichnet man als Integral dieses Systems jede Funktion $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_m, t)$, die der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} f_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = 0$$

genügt. Eine solche Funktion ist konstant längs jeder Lösung $\xi_k = \xi_k(t)$ von (1.3). Man kann daher die Gleichung $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_m, t) = c$ dazu verwenden, eine der Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_m$ als Funktion der anderen und der Zeit auszudrücken und so die Zahl der Differentialgleichungen um 1 zu reduzieren. Hat man r unabhängige Integrale von (1.3), so kann dieses System auf ein anderes mit $m - r$ Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden. Im Falle $r = m$ kann (1.3) vollständig aufgelöst werden.

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{n} m_k u_k, \quad \Phi_2 = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k, \quad \Phi_3 = \sum_{k=1}^{n} m_k w_k,$$

$$\Phi_4 = t\Phi_1 - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad \Phi_5 = t\Phi_2 - \sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \quad \Phi_6 = t\Phi_3 - \sum_{k=1}^{n} m_k z_k,$$

die drei Flächenintegrale

$$\Phi_7 = \sum_{k=1}^{n} m_k(y_k w_k - z_k v_k), \quad \Phi_8 = \sum_{k=1}^{n} m_k(z_k u_k - x_k w_k),$$

$$\Phi_9 = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k v_k - y_k u_k)$$

und das Energieintegral

$$\Phi_{10} = T - U,$$

wobei $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k(u_k^2 + v_k^2 + w_k^2)$

die kinetische Energie bezeichnet.

Diese 10 Integrale können entsprechend der obigen Bemerkung zur Reduktion des Systems (1.2) verwendet werden. Führt man diese Reduktion geschickt genug aus, so hat man schließlich statt der erwarteten $6n - 10$ sogar nur noch $6n - 11$ Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen, die überdies von der Zeit t gar nicht explizit abhängen. Diese verstärkte Reduktion hat J a c o b i entdeckt, sie wird als Elimination des Knotens bezeichnet.

Im Fall $n = 2$ gelangt man so zu einer einzigen Differentialgleichung

(1.4) $\dot{\eta} = g(\eta)$,

die man sofort in der impliziten Form

$$t = \int \frac{d\eta}{g(\eta)} + c$$

lösen kann, wobei man natürlich die Nullstellen von g auszunehmen hat, die Gleichgewichtslösungen von (1.4) liefern. Daher kann das Zweikörperproblem, wie ja allgemein bekannt ist, gelöst werden, während man für $n \geqslant 3$ nach der Reduktion $6n - 11 \geqslant 7$ Differentialgleichungen erhält, deren Lösung das Auffinden weiterer Integrale erfordert.

Nun haben die obigen 10 Integrale von (1.2) die spezielle Eigenschaft, algebraische Funktionen der Variablen $t, x_1, \ldots, w_n$ zu sein. Daher suchten Mathematiker und Astronomen lange Zeit nach anderen einfachen Integralen, allerdings vergeblich. Schließlich bewies B r u n s 1887, daß keine anderen unabhängigen algebraischen Integrale existieren, d. h. daß jedes algebraische Integral des n-Körperproblems (1.2) eine algebraische Funktion der bekannten Integrale $\Phi_1, \ldots, \Phi_{10}$ ist. Dieser Satz von B r u n s lehrt, daß eine über das oben Beschriebene hinaus-

Der Beweis des Satzes von Bruns ist ziemlich schwierig; er benützt aber dieselben Ideen, welche Liouville zu seinem Theorem führten, daß die elliptischen Funktionen nicht als endliche Kombination von Exponential-, Logarithmus- und algebraischen Funktionen ausgedrückt werden können.

Siegel hat nun den Brunschen Satz auf einen wichtigen Grenzfall des Dreikörperproblems übertragen, auf den sich dieser Satz nicht direkt anwenden läßt. Es handelt sich um das sogenannte restringierte Dreikörperproblem, auf das wir im folgenden zu sprechen kommen.

2 Das restringierte Dreikörperproblem und seine algebraischen Integrale

Das restringierte Dreikörperproblem ist der Grenzfall des allgemeinen Dreikörperproblems, bei dem die Bewegung in einer Ebene stattfindet, zwei Körper eine Kreisbahn um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben und der dritte Körper die Masse 0 besitzt. Üblicherweise wählt man die Einheiten von Masse, Länge und Zeit so, daß die ersten beiden Körper die Gesamtmasse 1 und den Abstand 1 besitzen und die Gravitationskonstante gleich 1 ist. Wählt man dann in der Ebene der drei Körper ein rotierendes rechtwinkliges kartesisches x-y-Koordinatensystem, dessen Mittelpunkt mit dem ersten Körper zusammenfällt und dessen x-Achse durch den zweiten geht, so lauten die Differentialgleichungen für die Bewegung des dritten Körpers

$$(2.1)\quad \ddot{x} = 2\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \ddot{y} = -2\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y};$$

dabei ist

$$V = \mu_1\left(\frac{1}{2}r^2 + r^{-1}\right) + \mu\left(\frac{1}{2}r_1^2 + r_1^{-1}\right),$$

$$m_1 = \mu_1, \qquad m_2 = \mu, \qquad \mu + \mu_1 = 1, \qquad 0 < \mu < 1, \qquad m_3 = 0,$$

$$r^2 = r_{31}^2 = x^2 + y^2, \qquad r_1^2 = r_{23}^2 = (x-1)^2 + y^2, \qquad r_{12} = 1.$$

Die Differentialgleichungen (2.1) lassen sich direkt aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz ableiten, oder aber aus den Differentialgleichungen (1.2) gewinnen. In letzterem Fall hat man nur zu verifizieren, daß (1.2) für n = 3 durch den Ansatz

$$(2.2)\quad \begin{cases} x_1 = -\mu\cos t, & x_2 = \mu_1\cos t, & x_3 = (x-\mu)\cos t - y\sin t, \\ y_1 = -\mu\sin t, & y_2 = \mu_1\sin t, & y_3 = (x-\mu)\sin t + y\cos t, \\ z_1 = 0, & z_2 = 0, & z_3 = 0 \end{cases}$$

genau dann erfüllt wird, wenn x und y den Differentialgleichungen (2.1) genügen.

Geht man mit diesem Ansatz in die Integrale $\Phi_1, \ldots, \Phi_{10}$ des allgemeinen Dreikörperproblems (1.2), n = 3 hinein, so ergeben sich Konstanten. Dennoch existiert ein nichttriviales Integral von (2.1), das Jacobische Integral

$$(2.3)\quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2V = \text{constans},$$

wie man leicht nachprüft. Entsprechend den Bemerkungen im 1. Abschnitt ist ja eine Funktion $f(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ der Ortskoordinaten x, y, der Geschwindigkeiten $\dot{x}, \dot{y}$ und der Zeit t ein Integral von (2.1), wenn der Ausdruck

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(2\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \left(-2\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

identisch in seinen 5 Argumenten verschwindet.

Bedeutet $\Phi(z)$ eine algebraische Funktion einer Variablen z, so ist $\Phi(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2V)$ nach (2.3) ein algebraisches Integral von (2.1). Siegel bewies nun 1936 in der Arbeit [23], daß jedes algebraische Integral diese Form hat.

Dieser Siegelsche Satz ist nicht im Satz von Bruns als spezieller Fall enthalten; denn bei der Spezialisierung (2.2) könnten ja außer dem Jacobischen Integral noch weitere Integrale entstehen. Siegels Beweis ist wesentlich kürzer als derjenige von Bruns, was nicht alleine von der in mancher Hinsicht einfacheren Bauart des Systems (2.1) gegenüber dem System (1.2) herrührt. Vielmehr verstand es Siegel auch, zum Beweis rein algebraischer Tatsachen die dynamischen Eigenschaften der Strömung auszunutzen, die durch die Differentialgleichungen (2.1) im $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$-Raum definiert wird, wodurch einige Beweisgänge erheblich verkürzt wurden.

3 Der Dreierstoß

Wir kehren wieder zum allgemeinen n-Körperproblem zurück.

Offensichtlich gibt es zwei Arten von Lösungen. Solche, bei denen das Potential (1.1) beschränkt bleibt für alle Zeiten, also alle Massenpunkte $P_1, \ldots, P_n$ einen gegenseitigen Mindestabstand wahren, und solche Lösungen, für die dies nicht gilt.

Der zweite Fall ist für $n = 3$ erstmals von Sundman 1907 ausführlich behandelt worden. Seinen Untersuchungen zufolge gibt es bei einer Annäherung an einen Zeitpunkt $t = t_0$, bei der das Potential nicht beschränkt bleibt, nur zwei Möglichkeiten:

Entweder strebt eine der Seiten $r_1 = r_{23}, r_2 = r_{31}, r_3 = r_{12}$ des von den Massenpunkten P_1, P_2, P_3 gebildeten Dreiecks $P_1P_2P_3$ gegen 0, während die beiden anderen einen positiven Grenzwert haben, oder aber alle drei Seiten streben gegen und die geradlinigen Fälle

$$\hat{\alpha}_1 = \pi, \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3 = 0, \quad \hat{r}_1 = \hat{r}_2 + \hat{r}_3,$$
$$\hat{\alpha}_2 = \pi, \quad \hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_1 = 0, \quad \hat{r}_2 = \hat{r}_3 + \hat{r}_1,$$
$$\hat{\alpha}_3 = \pi, \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 0, \quad \hat{r}_3 = \hat{r}_1 + \hat{r}_2.$$

Siegel konnte nun darüberhinaus zeigen, daß auch die Winkel der Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ mit den Achsen desjenigen raumfesten x-y-z-Koordinatensystems für $t \to t_0$ Grenzwerte haben, relativ zu dem die Differentialgleichungen (1.2), n = 3 des Dreikörperproblems gegeben sind.

[illegible]

$$x_k = (t - t_0)^{2/3} X_k(u_1, u_2, u_3), \qquad y_k = (t - t_0)^{2/3} Y_k(u_1, u_2, u_3),$$
$$z_k = (t - t_0)^{2/3} Z_k(u_1, u_2, u_3), \qquad k = 1, 2, 3$$

zu entwickeln, wobei X, Y, Z Potenzreihen [illegible]

[illegible]

Dabei wird

$$(3.3) \quad t - t_0 = e^{-s}$$

gesetzt und $t \downarrow t_0$ angenommen. Der Fall $t \uparrow t_0$ läßt sich entsprechend behandeln.

In einem zweiten Schritt ist dann die Gesamtheit der Lösungen von (3.1) mit der Eigenschaft (3.2) zu bestimmen. Diese Lösungen erlauben Reihenentwicklungen, die schließlich zu den obigen irregulären Potenzreihen für die Dreierstoßbahnen führen.

Diesen zweiten Schritt werde ich im 9. Abschnitt behandeln zusammen mit weiteren Beiträgen Siegels zum Problem der Stabilität.

Ergänzende Literatur:

McGehee, R.: Singularities in Classical Celestial Mechanics. Proc. Int. Congr. Math. Helsinki 1978, Bd. 2, 827–834

4 Die Bewegung des Mondes

Die Himmelsmechanik entstand aus dem Bemühen, die Bewegungen der Planeten und deren Monde zu verstehen und vorauszuberechnen. Besonders die Schiffahrt war auf genaue Kenntnis dieser Bewegungen angewiesen. Da es sich dabei um periodische oder jedenfalls nahezu periodische Bewegungen handelte, stand das Auffinden von periodischen oder nahezu periodischen Lösungen des n-Körperproblems schon immer im Vordergrund des Interesses. Bei der Bewältigung dieser Aufgabe ergaben sich allerdings für $n \geqslant 3$ erhebliche Schwierigkeiten, während für $n = 2$ ja die 10 Integrale ausreichten, um alle Lösungen des Zweikörperproblems durch Quadraturen und Auflösung von Gleichungen zu erhalten, wie wir im 1. Abschnitt schon bemerkt haben.

Bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne ließen sich die Schwierigkeiten dadurch in Grenzen halten, daß man den Einfluß der anderen Planeten wegen der großen Masse der Sonne als Störungen eines Zweikörperproblems auffaßte und nur soweit berücksichtigte, wie die Rechentechnik dies jeweils erlaubte.

Im Gegensatz dazu ist die Bewegung des Mondes um die Erde viel komplizierter, weil die Sonne trotz ihrer großen Entfernung aufgrund ihrer übergroßen Masse das System Erde – Mond zu sehr stört, als daß das Modell eines Zweikörperproblems in erster Näherung gerechtfertigt wäre.

Newton bezeichnete die Bewegung des Mondes als das einzige Problem, das ihm Kopfzerbrechen bereitet hätte. Euler stellte zwei Mondtheorien auf. Seiner zweiten aus dem Jahre 1772 legte er das restringierte Dreikörperproblem zugrunde, jedoch in einem anderen Koordinatensystem als wir es im 2. Abschnitt beschrieben haben, so daß in den Differentialgleichungen für den Mond im Gegensatz zu (2.1) die Zeit t explizit auftrat.

Der Begründer der modernen Mondtheorie ist G. W. Hill. Seine 1877/78 erschienenen Untersuchungen zur Bewegung des Mondes waren aber nicht nur für die Astronomie von grundlegender Bedeutung, sondern trugen auch entscheidend zur Entwicklung einer allgemeinen Theorie der periodischen Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Poincaré in den folgenden Jahren bei. Außerdem standen diese Untersuchungen an der Wiege der Funktionalanalysis. Denn zu seiner Konstruktion der Mondbahn mußte Hill unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten lösen. Die hierfür notwendigen allgemeinen Sätze über unendliche Determinanten entdeckte Poincaré, und von Koch [illegible]

[illegible]

als Vorbild bei seiner Konzeption der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen dienten. Schließlich knüpfte hieran Hilbert seine Theorie der linearen Transformationen.

Hill legte seiner Mondtheorie die Gleichungen (2.1) zugrunde, die er noch vereinfachte, indem er in geeigneter Weise die Sonne ins Unendliche verlegte. Für diese Differentialgleichungen fand er über die schon erwähnte Auflösung von [illegible]

[illegible]

(4.1) liegt. Setzt man (4.3) in (4.1) ein, so erhält man für x und y reelle Fourierreihen in t, die den Differentialgleichungen (2.1) genügen.

Diese Lösung des Hillschen Problems hat Siegel erstmals während seiner Göttinger Zeit 1938 bis 1940 in einer Vorlesung vorgetragen und dann 1951 in der Arbeit [57] veröffentlicht. Eine ausführlichere Darlegung findet sich in seinem Buch.

Ergänzende Literatur:

[1] Bell, E. T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf: Econ-Verlag, S. 113
[2] Hill, G. W.: Researches in the Lunar Theory. Amer. J. of Math. **1** (1878) 5–26, 129–147, 245–260
[3] Hill, G. W.: On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motion of the Sun and Moon (1877). Nachdruck Acta Math. **8** (1886) 1–36
[4] Hilbert, D.: Gesammelte Abhandlungen III. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970, S. 65 und 99
[5] Poincaré, H.: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste I. Paris: Gauthier Villars 1892
[6] v. Zeipel, H.: L'oeuvre astronomique d'Henry Poincaré. Acta Math. **38** (1921) 355
[7] Memorial Number George William Hill. Amer. J. of Math. **60** (1938) 785–948; mit Beiträgen von E. W. Brown, J. Chazy, E. Hölder, M. Morse und G. A. Hedlund, E. Strömgren, O. Toeplitz, H. Weyl, N. Wiener, A. Wintner

5 Die Lösungen von Lagrange

Lagrange fand 1772 periodische Lösungen des Dreikörperproblems, bei denen sich die drei Massenpunkte in einer festen Ebene gleichförmig auf konzentrischen Kreisbahnen bewegen und der Schwerpunkt im Zentrum ruht. Dabei gibt es für die zeitunabhängige gegenseitige Lage der Massenpunkte nur zwei mögliche Konstellationen: Entweder bilden die Massenpunkte ein gleichseitiges Dreieck oder sie liegen auf einer Geraden. Im gleichseitigen Fall bewegen sich also jeweils zwei Körper auf einer gleichförmigen Kreisbahn um den dritten mit einer Winkeldifferenz von $\pi/3$.

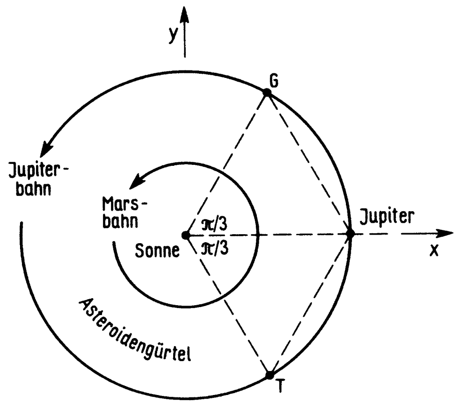

Fig. 1

Bei der Untersuchung der Bewegung der Trojaner darf man alle Planeten außer Jupiter und Saturn wegen zu großer Entfernung und zu geringer Masse außer Betracht lassen. Den Planeten Saturn darf man wenigstens in erster Näherung vernachlässigen. Dann bleibt die Aufgabe übrig, periodische Lösungen in der Nähe der Lagrangeschen zu konstruieren.

Zur Vereinfachung dieser Aufgabe wird meistens die Masse m_3 des zu betrachtenden Asteroiden, die ja ohnehin im Vergleich zu den Massen m_1, m_2 von Sonne und Jupiter verschwindend gering ist, gleich Null gesetzt. Dann erhält man gerade das im 2. Abschnitt besprochene restringierte Dreikörperproblem.

Relativ zu dem rotierenden rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit den Koordinaten (0,0) und (1,0) für Sonne und Jupiter ergeben sich für den massenlosen Punkt mit den Koordinaten (x, y) die Differentialgleichungen (2.1), und es ist leicht festzustellen, daß die Punkte T, G mit den Koordinaten

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

Gleichgewichtslösungen von (2.1) darstellen. Dies sind die Lösungen von Lagrange für $m_3 = 0$ im gleichseitigen Fall.

Die Konstruktion periodischer Lösungen in der Nähe von T und G kann nun mit Hilfe der Kontinuitätsmethode von Poincaré und der Fixpunktmethode von Poincaré-Birkhoff erfolgen. Diese Methoden wurden von Siegel in seinem Buch ausführlich dargestellt und auf das obige Problem angewendet.

Siegel beschritt in seinem Buch aber noch einen anderen Weg, wobei er die Aufgabe, periodische Lösungen in der Nähe der Lagrangeschen zu finden, ganz allgemein für beliebige Massen der drei Körper löste. Auf diesem Weg ergab sich aber die Notwendigkeit, allgemeinere Untersuchungen von Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung anzustellen.

Zunächst kann man auch in dem Fall $m_3 > 0$ ein rotierendes Koordinatensystem einführen, so daß die drei Massenpunkte ruhen, also die Lagrangeschen Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (1.2) mit $n = 3, z_1 = z_2 = z_3 =$

$= w_1 = w_2 = w_3 = 0$ als Gleichgewichtslösungen des transformierten Systems von Differentialgleichungen erscheinen.

Siegel reduzierte dieses System noch mit Hilfe der im 1. Abschnitt erwähnten Elimination des Knotens, um schließlich ein Hamiltonsches System der Form

$$(5.1)\qquad \dot{\xi}_k = \frac{\partial H}{\partial \xi_{k+m}}, \qquad \dot{\xi}_{k+m} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_k} \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

mit $m = 3$ zu erhalten, bei dem die Hamiltonfunktion H in einer Umgebung des Nullpunkts $\xi_1 = \ldots = \xi_{2m} = 0$ in eine konvergente Reihe

$$(5.2)\qquad H = \sum_{k,\ell=1}^{2m} H_{k\ell}\xi_k\xi_\ell + \ldots$$

entwickelt werden kann, die reelle Koeffizienten hat und mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt. Der Nullpunkt ist eine Gleichgewichtslösung, die der Lagrangeschen Kreisbewegung entspricht.

Die Eigenwerte $\lambda = \pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3$ des linearisierten Systems (5.1)', bei dem H durch seinen homogenen Bestandteil 2. Ordnung $H_2 = \Sigma H_{k\ell}\xi_k\xi_\ell$ ersetzt wird, berechnen sich aus der Gleichung

$$(5.3)\qquad (\lambda^2 + 1)(\lambda^4 + \lambda^2 + \gamma) = 0$$

$$\text{mit}\qquad \gamma = \frac{27}{4}\,\frac{m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}{(m_1 + m_2 + m_3)^2},$$

wie Siegel mit der ihm eigenen Eleganz zeigte. Übrigens treten bei jedem System (5.1) die Eigenwerte paarweise mit entgegengesetztem Vorzeichen auf: $\lambda = \pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$.

Nun gilt der Satz, daß zu jedem Paar rein imaginärer Eigenwerte

$$(5.4)\qquad \lambda_j, -\lambda_j = \bar{\lambda}_j \neq 0,$$

für das zusätzlich die Bedingung

$$(5.5)\qquad \lambda_k/\lambda_j \notin \mathbf{Z}, \qquad k \neq j$$

erfüllt ist, eine einparametrige Schar periodischer Lösungen des Systems (5.1), (5.2) in der Nähe des Nullpunkts $\xi_1 = \ldots = \xi_{2m} = 0$ existiert. Diesem Satz ist der 6. Abschnitt gewidmet.

In unserem konkreten Fall haben wir nach (5.3) zunächst das Eigenwertpaar $\lambda = \pm i$. Siegel bewies, daß die hierzu gehörige Schar periodischer Lösungen mit derjenigen identisch ist, die Lagrange auch schon gefunden hatte und bei der die drei Körper zwar noch ein gleichseitiges Dreieck bilden, dessen Dreiecksseiten sich aber der Länge nach periodisch mit der Zeit ändern.

Weitere rein imaginären Eigenwertpaare (5.4) mit der Bedingung (5.5) ergeben sich für $\gamma < 4^{-1}$. Dann ist stets eine Schar periodischer Lösungen vorhanden, und eine zweite ergibt sich zufolge (5.5) unter den zusätzlichen Bedingungen

$$\gamma \neq g^{-2} - g^{-4}, \qquad \gamma \neq (g + g^{-1})^{-2}$$

für alle ganzen $g > 1$.

Diese Scharen periodischer Lösungen hat für $m_3 > 0$ erstmals Siegel 1956 in seinem Buch konstruiert. Er hat in entsprechender Weise auch periodische Lösungen in der Nähe derjenigen anfangs erwähnten Lösungen von Lagrange angegeben, bei denen die drei Körper auf einer Geraden liegen. Darauf soll hier aber nicht weiter eingegangen werden, zumal die Konstruktion in diesem geradlinigen Fall ganz analog zu dem oben dargelegten gleichseitigen Fall verläuft.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die in diesem Abschnitt besprochenen Lösungen natürlich nur relativ zu dem rotierenden Koordinatensystem periodisch sind. Von einem raumfesten Koordinatensystem aus betrachtet ist eine solche Lösung genau dann periodisch, wenn ihre Frequenz mit der Frequenz der Rotation kommensurabel ist, andernfalls ist sie quasiperiodisch mit zwei Basisfrequenzen.

Ergänzende Literatur:

[1] Chebotarev, G. A.: Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics. Amsterdam: Elsevier 1967, Kap. 3
[2] Szebehely, V.: Theory of Orbits. New York: Academic Press 1967, Kap. 5

6 Das Verhalten gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung

Nachdem wir bisher Siegels Beiträge zu konkreten Problemen der Himmelsmechanik beschrieben haben, wenden wir uns nunmehr den grundsätzlichen Fragen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zu, auf die Siegel beim Studium jener Probleme gestoßen war und mit denen er sich dann sein weiteres forscherisches Leben hindurch beschäftigte. Es handelt sich dabei um Fragen des qualitativen Verhaltens der Lösungen von autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung

Gegeben sei ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

(6.1) $\dot{x} = f(x).$

Hierin bedeuten x und f(x) Spalten mit den Elementen [illegible]

III. Die Frage nach der Gesamtheit aller Lösungen, die für alle $t \geqslant 0$ in einer gegebenen, genügend kleinen Umgebung von $x = 0$ bleiben bzw. nach $x = 0$ streben. In dieses Problem mündete schließlich S i e g e l s Untersuchung des Dreierstoßes beim Dreikörperproblem, wie wir im 3. Abschnitt gesehen haben. S i e g e l behandelte diese Frage außerdem in seinem Buch und griff sie dann noch einmal in der Arbeit [98] auf. Alle diesbezüglichen Beiträge S i e g e l s werden im 9. Abschnitt zusammengefaßt.

Im folgenden behandeln wir S i e g e l s Beitrag zu Frage I. Dazu ist eine kurze formale Vorbetrachtung notwendig, die sich auch für die Erörterung der Frage II als unerläßlich erweisen wird. Wir entnehmen sie den Arbeiten [94] und [98] in teilweise leicht veränderter Form.

Zunächst stellen wir an die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Bedingungen

$$(6.3) \quad \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -\lambda_1 \neq 0, \qquad \lambda_3/\lambda_1, \ldots, \lambda_n/\lambda_1 \notin \mathbf{Z}.$$

Dann müssen zwei formale Potenzreihen α, β folgendermaßen konstruiert werden:
Es sei u ein zu dem Eigenwert λ_1 gehöriger Eigenvektor der Matrix A, es gelte also $Au = \lambda_1 u$, $A\bar{u} = \lambda_2 \bar{u}$ wegen (6.3).
Man wähle reelle n-reihige Spalten $u_3, \ldots, u_n$, so daß die Spalten $u, \bar{u}, u_3, \ldots, u_n$ über den reellen Zahlen linear unabhängig sind. Dann kann die Gleichung

$$\alpha\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} + \beta\eta \frac{\partial x}{\partial \eta} = f(x)$$

durch formale Potenzreihen

$$(6.4) \quad x = \xi u + \eta \bar{u} + \sum_{k+\ell \geqslant 2} \xi^k \eta^\ell x_{k\ell},$$

$$(6.5) \quad \alpha = \lambda_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\xi\eta)^k, \qquad \beta = \lambda_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\xi\eta)^k$$

in den Variablen ξ, η mit komplexen Zahlen α_k, β_k und komplexen n-reihigen Spalten $x_{k\ell}$ als Koeffizienten gelöst werden, wobei sich diese Koeffizienten rekursiv eindeutig bestimmen lassen, wenn man verlangt, daß in der Darstellung

$$(6.6) \quad x = \delta u + \epsilon \bar{u} + \sum_{j=3}^{n} \zeta_j u_j,$$

die aus (6.4) durch Zerlegung der $x_{k\ell}$ nach den linear unabhängigen Spalten $u, \bar{u}, u_3, \ldots, u_n$ entsteht, die Reihe $\delta = \xi + \ldots$ keine Glieder der Form $\xi(\xi\eta)^s$ und die Reihe $\epsilon = \eta + \ldots$ keine Glieder der Form $\eta(\xi\eta)^s$, $s = 1, 2, \ldots$ enthält. Die Eindeutigkeit führt dann zu den Realitätsbedingungen $x_{k\ell} = \bar{x}_{\ell k}$, $\beta_k = \bar{\alpha}_k$ für die Koeffizienten, was die Bedingungen

$$(6.7) \quad \bar{x}(\xi, \eta) = x(\eta, \xi), \qquad \beta(\xi\eta) = \bar{\alpha}(\xi\eta)$$

für die Reihen zur Folge hat.

Aufgrund von (6.7) hat die Reihe $\alpha + \beta$ reelle Koeffizienten. Entweder sind diese alle gleich Null, es ist also

(6.8) $\alpha + \beta = 0$,

oder es gilt

(6.9) $\alpha + \beta = c_r(\xi\eta)^r + c_{r+1}(\xi\eta)^{r+1} + \ldots, \qquad c_r \neq 0$

für eine natürliche Zahl r. Im letzteren Fall hängt das Verhalten der Lösungen wesentlich vom Vorzeichen von c_r ab, wie sich im 9. Abschnitt herausstellen wird.

Es gilt nun der

Satz 6.1 *Unter den Voraussetzungen* (6.3) *und* (6.8) *sind die Reihen* (6.4), (6.5) *für genügend kleine Werte von* $|\xi|$, $|\eta|$ *konvergent, und durch*

(6.10) $\xi = \rho e^{\alpha t}, \qquad \eta = \rho e^{-\alpha t}, \qquad \xi\eta = \rho^2, \qquad \alpha = \alpha(\xi\eta) = -\bar{\alpha}$

wird eine Schar periodischer Lösungen von (6.1) *geliefert, die von dem hinreichend klein zu wählenden positiven Parameter* ρ *abhängt.*

Dieser Satz, den Siegel erstmals in seinem Buch 1956 und später noch einmal in [94] bewiesen hat, liefert mehr als nur periodische Lösungen. Er zeigt, daß diese Schar periodischer Lösungen auf einer (durch (6.4) gegebenen) invarianten zweidimensionalen reellen analytischen Mannigfaltigkeit liegt. Schließlich lassen sich die Fourierkoeffizienten der periodischen Lösungen auf einfachste Art aus den Koeffizienten der gegebenen Potenzreihen $f_1, \ldots, f_n$ in (6.1) berechnen, wobei die durch die Verwendung komplexer Variabler ξ, η notwendig werdende Überprüfung der Realitätsverhältnisse in übersichtlicher Weise mit Hilfe von (6.7), (6.8) und (6.10) geschehen kann.

Der Satz 6.1 muß natürlich um eine Aussage ergänzt werden, die es erlaubt, das Erfülltsein der Bedingung (6.8) an dem System (6.1) abzulesen.

Diese Aussage besteht in der Äquivalenz der Bedingung (6.8) mit der Existenz eines formalen zeitfreien Integrals, d. h. einer formalen Potenzreihe Φ in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ mit reellen Koeffizienten ohne konstante und lineare Glieder, die der Differentialgleichung

$$f_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} = 0$$

genügt, wobei $f_1, \ldots, f_n$ die Komponenten von f in (6.1) bedeuten. Dieses Integral muß, nachdem man gemäß (6.4) die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch die Potenzreihen in ξ, η ersetzt hat, als Potenzreihe in ξ, η das Glied zweiten Grades $\xi\eta$ wirklich enthalten.

In dem Fall, daß (6.1) ein Hamiltonsches System (5.1) ist mit $n = 2m$, $\xi_k = x_k$, $k = 1, \ldots, n$, hat man in der Hamiltonfunktion (5.2) ein sogar konvergentes Integral mit der verlangten Eigenschaft. Daher liefert Satz 6.1 unter der Bedingung (6.3), die nach eventueller Umnumerierung der Eigenwerte mit den Relationen (5.4), (5.5) identisch ist, eine Schar periodischer Lösungen für das System (5.1), wie es im 5. Abschnitt behauptet worden ist.

Die oben dargelegte Theorie über die Existenz von periodischen Lösungen stammt im Fall $n = 2$ von Poincaré (1885, Théorie des Centres, Oeuvres I, S. 95). Siegel vollendete Poincarés Ausführungen in formaler Hinsicht und verallgemeinerte sie auf n Dimensionen.

Der erste, der Poincarés Existenzbeweis für periodische Lösungen von 2 auf n Dimensionen verallgemeinerte, war Ljapunow. Seine große Arbeit über Stabilitätstheorie, in der sich dieser Existenzsatz befindet, erschien 1892 in Charkow und dann in französischer Übersetzung in den Ann. Fac. Sci. Toulouse 1907. Ljapunow konstruierte jedoch nur die Schar periodischer Lösungen, nicht die invariante analytische Mannigfaltigkeit, auf der diese Schar liegt.

Den frühesten Hinweis in der Himmelsmechanik auf Ljapunows Konstruktion periodischer Lösungen, der mir erreichbar war, fand ich als Zusatz bei der Korrektur in einer Abhandlung von Wintner über das restringierte Dreikörperproblem (MZ 32 (1930) 643).

Wintner benützt bei der Konstruktion periodischer Lösungen in der Nähe der Lagrangeschen Kreislösungen (vgl. 5. Abschnitt) im Fall $m_3 = 0$ nicht Ljapunows Resultat, sondern eine Arbeit von Horn aus dem Jahre 1903, in der ebenfalls Poincarés Théorie des Centres verallgemeinert wird.

In der Arbeit von Wintner finden sich auch Ausführungen über die Schwierigkeiten bei der Verwendung komplexer Veränderlicher in nichtlinearen Problemen der Himmelsmechanik. Es ist ein Verdienst Siegels, eine übersichtliche Realitätsdiskussion bei Systemen (6.1) in der Nähe der Gleichgewichtslösung $x = 0$ ermöglicht zu haben. Siegel war stets bemüht, die Vorteile bei der Anwendung komplexer Variabler mit der dann notwendigen Berücksichtigung der Realitätsverhältnisse in optimaler Weise zu verbinden.

7 Kleine Nenner

In der Himmelsmechanik sind kleine Nenner seit langem bekannt. Sie traten auf bei der Darstellung von Lösungen des n-Körperproblems mit Hilfe trigonometrischer Reihen. Die Frage der Konvergenz dieser Reihen erwies sich als besonders schwierig, weil das n-Körperproblem nicht linear ist.

Siegel war der erste, der ein nichtlineares durch kleine Nenner verursachtes Konvergenzproblem löste. Es handelte sich dabei um das funktionentheoretische Zentrumproblem, dessen Lösung er erstmals 1942 in der Arbeit [39] und dann 1956 in seinem Buch (§§ 23, 24) veröffentlichte.

Gegeben sei in der komplexen z-Ebene eine Abbildung

$$z \mapsto z_1 = f(z) = \lambda z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \ldots, \tag{7.1}$$

wobei f eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten ohne konstantes Glied ist, die in einer Umgebung von $z = 0$ konvergiert. Ferner werde

$$\lambda = e^{2\pi\alpha i}, \quad \alpha \text{ reell und irrational}$$

gesetzt. In diesem Fall ist die Abbildung (7.1) formal äquivalent der Drehung

$$w \mapsto w_1 = \lambda w. \tag{7.2}$$

Es gibt nämlich dann eine eindeutig bestimmte formale Potenzreihen-Transformation

$$z = h(w) = w + h_2 w^2 + h_3 w^3 + \ldots,$$

die sog. Schrödersche Reihe, so daß die Abbildung (7.1) in der neuen Variablen w die Form (7.2) erhält, daß also die „Schrödersche Funktionalgleichung“

$$h(\lambda w) = f(h(w))$$

erfüllt ist. Diese kann zu der Gleichung

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda^k - \lambda) h_k w^k = \sum_{\ell=2}^{\infty} f_\ell h(w)^\ell$$

umgeformt werden, aus der unmittelbar hervorgeht, daß sich die Koeffizienten von h rekursiv eindeutig bestimmen lassen und daß die kleinen Nenner $\lambda^n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$ auftreten. Es lassen sich Beispiele von Abbildungen (7.1) mit Liouvilleschen Zahlen α angeben, für welche die Schrödersche Reihe infolge dieser dann *zu* kleinen Nenner divergiert.

Siegel konnte jedoch zeigen, daß die Schrödersche Reihe h stets in einer Umgebung von $w = 0$ konvergiert, wenn α keine Liouvillesche Zahl ist, also

$$|n\alpha - m| > cn^{-\nu} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$$

gilt für zwei positive Zahlen c und ν.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem genialen Gedanken, der die Trennung des Problems in einen funktionentheoretischen und in einen zahlentheoretischen Teil ermöglicht, wobei die kleinen Nenner dann nur noch in letzterem erscheinen.

Ich vermute, daß Siegel nach der Entdeckung dieses Satzes große Anstrengungen unternahm, nun auch den kleinen Nennern in den (Fourier-) Reihen der Himmelsmechanik beizukommen. Drei Jahre später veröffentlichte er jeden-genügen, wobei $g_1, \ldots, g_n$ alle nicht-negativen ganzen Zahlen mit $g = g_1 + \ldots + g_n > 1$ durchlaufen, bewies Siegel die Konvergenz der eindeutig bestimmten formalen Potenzreihen-Substitution $x_k = y_k + \ldots$ $(k = 1, \ldots, n)$ in den neuen Variablen $y_1, \ldots, y_n$ mit komplexen Koeffizienten, welche (7.3) in das linearisierte System

$$\dot{y}_k = \lambda_k y_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

überführt.

Diese Konvergenzaussage erweiterte ganz wesentlich einen entsprechenden Satz von Poincaré, bei dem die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf eine offene komplexe Halbebene beschränkt werden müssen. Aufgrund dieser Sätze von Poincaré und Siegel ist es in der englischsprachigen Literatur üblich geworden, einen Punkt $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ als zur *Siegel domain* gehörig zu bezeichnen, wenn $0 \in \mathbf{C}$ in der konvexen Hülle von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ liegt. Andernfalls gehört λ zur *Poincaré domain*.

1954 fand Kolmogorov eine Methode, um mit den kleinen Nennern in der Himmelsmechanik fertig zu werden. Diese Methode wurde von Arnold und Moser ausgebaut und auf eine Reihe von Problemen angewendet.

Moser hatte ja bei Siegel in dessen Vorlesung im Wintersemester 1951/52 Himmelsmechanik gelernt und sich seitdem auf diesem Gebiet forscherisch betätigt. Seine erste bedeutende Arbeit zum Thema kleine Nenner, in der er die Existenz invarianter Kurven von inhaltstreuen Abbildungen eines Kreisrings bewies, schickte er Siegel, der sie am 16. 2. 1962 der Akademie der Wissenschaften in Göttingen vorlegte. Siegel sagte in jenen Tagen einmal, er hätte sich sein ganzes Leben vergeblich um dieses Problem bemüht.

Ich schickte meine Arbeit, in der ich Mosers Resultat verbessern konnte, ebenfalls an Siegel, der mir am 26. 4. 1970 u. a. schrieb: „Ihre Arbeit habe ich nun durchgesehen und alles in Ordnung gefunden, außer mehreren Schreibfehlern in den Formeln, die ich korrigiert habe."

Hieraus geht hervor, daß Siegel von Anfang an mit der neuen Technik wohl vertraut war. Er wollte sich aber an dieser Entwicklung nicht mehr beteiligen. In seinem Alterswerk [94], [98] kam er noch einmal auf seine eigene Methode zu sprechen und bemerkte in bezug auf die Untersuchungen von Arnold und Moser: „Diesen tiefliegenden Ergebnissen vermag ich nichts Entsprechendes hinzuzufügen; ...". Bei der Neufassung seines Buches, die in englischer Übersetzung 1971 herauskam, überließ er Moser das Kapitel über die Stabilität, in dem das Problem der kleinen Nenner abgehandelt wird.

Die Lectures on Celestial Mechanics von Siegel und Moser sind zu einem Standardwerk in der Himmelsmechanik geworden.

8 Die Birkhoffsche Normalform

Aus der Störungstheorie der Himmelsmechanik entwickelte sich eine Integrationsmethode für analytische Hamiltonsche Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung mit Hilfe formaler Potenzreihen, die 1927 von G. D. Birkhoff in eine endgültige Form gebracht wurde. Birkhoff betrachtete auch analoge Reihen, die bei der Transformation inhaltstreuer Abbildungen in eine Normalform in der Nähe eines Fixpunktes entstehen. S i e g e l untersuchte die Konvergenz solcher Reihen in den Arbeiten [37], [63], [71].

Gegeben sei ein Hamiltonsches System

$$(8.1)\qquad \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial x_{m+k}}, \qquad \dot{x}_{m+k} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

wobei die Hamiltonfunktion

$$(8.2)\qquad H = H(x) = \sum_{k,\ell=1}^{2m} h_{k\ell} x_k x_\ell + \ldots$$

eine in einer Umgebung von $x_1 = \ldots = x_{2m} = 0$ konvergente Potenzreihe in den Variablen $x_1, \ldots, x_{2m}$ mit reellen Koeffizienten ist, die mit Gliedern zweiten Grades beginnt. Für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$ der Matrix der linearen Glieder in (8.1) gilt bekanntlich

$$\lambda_k + \lambda_{m+k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Wir setzen noch

$$(8.3)\qquad \begin{cases} g_1\lambda_1 + \ldots + g_m\lambda_m \neq 0 & ((g_1, \ldots, g_m) \in \mathbf{Z}^m \setminus \{0\}), \\ \lambda_k + \bar{\lambda}_k = 0 & (k = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

voraus, so daß insbesondere alle Eigenwerte rein imaginär und voneinander verschieden sind.

Es gibt nun eine formale Potenzreihen-Transformation

$$(8.4)\qquad x_k = X_k(y) = \sum_{\ell=1}^{2m} c_{k\ell} y_\ell + \ldots \qquad (k = 1, \ldots, 2m; \det(c_{k\ell}) \neq 0)$$

mit reellen Koeffizienten, die kanonisch ist (deren Funktionalmatrix $(\partial X_k/\partial y_\ell)$ also symplektisch ist) und die das System (8.1), (8.2), (8.3) in die Birkhoffsche Normalform

$$(8.5)\qquad \begin{cases} \dot{y}_k = p_k y_{m+k}, \qquad \dot{y}_{m+k} = -p_k y_k, \\ p_k = \dfrac{\partial K}{\partial w_k}, \qquad w_k = \dfrac{1}{2}(y_k^2 + y_{m+k}^2) \qquad (k = 1, \ldots, m), \\ K = H(X(y)) = K(w) = i\lambda_1 w_1 + \ldots + i\lambda_m w_m + \ldots \end{cases}$$

überführt, wobei die reellen Koeffizienten der Potenzreihe K in den Variablen $w_1, \ldots, w_m$ eindeutig bestimmt sind, unabhängig von der gewählten kanonischen Transformation (8.4).

Die Funktionen $y \mapsto w_k (k = 1, \ldots, m)$ und folglich die p_k sind Integrale von (8.5), weshalb die allgemeine Lösung dieses Systems sofort in der Form

$$(8.6)\qquad \begin{cases} y_k + iy_{m+k} = e^{-ip_k t}(\eta_k + i\eta_{m+k}), \\ p_k = p_k(w), \qquad w_k = \dfrac{1}{2}(\eta_k^2 + \eta_{m+k}^2) \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

gefunden werden kann mit 2m reellen Integrationskonstanten $\eta_1, \ldots, \eta_{2m}$. Das Einsetzen von (8.6) in (8.4) liefert im Falle der Konvergenz der Reihen (8.4) für hinreichend kleine $|\eta_1|, \ldots, |\eta_{2m}|$ sämtliche Lösungen von (8.1) in einer Umgebung von $x_1 = \ldots = x_{2m}$. Diese Lösungen sind quasiperiodisch, wobei der von den Integrationskonstanten abhängige Modul der Frequenzen von $p_1, \ldots, p_m$ erzeugt wird.

In der Arbeit [37] konstruierte Siegel nun aber Beispiele von Systemen (8.1), (8.2), (8.3), die gar keine konvergente Transformation (8.5) in die Normalform (8.6) besitzen. Später bewies er in [63], daß dies sogar die Regel ist.

Siegel betrachtete genauer den Fall m = 2 und nahm an, daß die Hamiltonfunktion (8.2) bereits die Normalform bis zu den Gliedern vom Grad $\leqslant 2s$ für eine ganze Zahl $s \geqslant 2$ besitzt, also die Gestalt

$$(8.7) \qquad H = F + G$$

hat, wobei

$$F = i\lambda_1 z_1 + i\lambda_2 z_2 + \sum_{2 \leqslant \ell_1 + \ell_2 \leqslant s} F_{\ell_1 \ell_2} z_1^{\ell_1} z_2^{\ell_2}, \qquad z_k = \frac{1}{2}(x_k^2 + x_{m+k}^2), \qquad k = 1, 2$$

$$\text{und} \qquad G = \sum_{|\ell| \geqslant 2s+1} G_\ell x^\ell, \qquad x^\ell = x_1^{\ell_1} \ldots x_4^{\ell_4}, \qquad \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_4), \qquad |\ell| = \ell_1 + \ldots + \ell_4$$

zu setzen ist.

Die reellen Koeffizienten des Polynoms F in z_1, z_2 werden nun fest gewählt, derart daß (8.3) und

$$\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z_1} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} \neq 0$$

gilt, während die Koeffizienten von G als reelle Variable mit

$$(8.8) \qquad |G_\ell| \leqslant 1 \qquad (|\ell| \geqslant 2s + 1)$$

betrachtet werden. Dann gilt der

Satz 8.1 *Es gibt abzählbar unendlich viele analytisch unabhängige Potenzreihen* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ *in den unendlich vielen Variablen* G_ℓ*, welche in* (8.8) *absolut konvergieren, derart, daß eine konvergente kanonische Transformation* (8.4) *von* (8.1), (8.7) *in die Normalform* (8.5) *nur existiert, wenn* $\Phi_j = 0$ *ist für unendlich viele* j.

Dieser Satz zeigt, daß Divergenz der Transformationen in die Birkhoffsche Normalform die Regel ist. Erstaunlich ist, daß diese Divergenzaussage unabhängig von der arithmetischen Beschaffenheit der Eigenwerte ist.

Arnold und Moser haben bewiesen, daß trotzdem die meisten Lösungen von nicht-degenerierten Systemen (8.1), (8.2), (8.3) in der Nähe von $x_1 = \ldots = x_{2m} = 0$ quasiperiodisch sind. Man vergleiche hierzu neben dem Buch von Siegel und Moser auch J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Ann. of Math. Studies 77 (1973).

Birkhoff betrachtete auch inhaltstreue Abbildungen

$$(8.9)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + \ldots \\ cx + dy + \ldots \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

in der Nähe des Fixpunkts $x = y = 0$, wobei f und g Potenzreihen in x, y mit reellen Koeffizienten sind, die in einer Umgebung von $x = y = 0$ konvergieren. Solche Abbildungen treten auf beim Studium des Stabilitätsverhaltens von periodischen Lösungen bei Hamiltonschen Systemen mit 2 Freiheitsgraden.

Es gibt eine inhaltstreue Koordinaten-Transformation

$$(8.10)\quad \begin{cases} x = X(\xi, \eta) = \alpha\xi + \beta\eta + \ldots, \\ y = Y(\xi, \eta) = \gamma\xi + \delta\eta + \ldots, \end{cases} \qquad \frac{\partial X}{\partial \xi}\frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial Y}{\partial \xi} = 1,$$

wobei X und Y formale Potenzreihen in ξ, η mit reellen Koeffizienten sind, welche die Abbildung (8.9) in die Normalform

$$(8.11)\quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k (\xi^2 + \eta^2)^k$$

überführt, falls für die Eigenwerte λ, λ^{-1} der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Relationen

$$\lambda = e^{iw_0}, \quad 0 < w_0 < \pi, \quad w_0 \neq 2\pi/k, \quad k = 3, 4, \ldots$$

gelten, und in die Normalform

$$(8.12)\quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} e^{w} & 0 \\ 0 & e^{-w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k (\xi\eta)^k,$$

falls $\lambda = \pm e^{w_0}$, $w_0 > 0$ gilt. In beiden Fällen sind die Birkhoff-Konstanten $w_1, w_2, \ldots$ reell und eindeutig bestimmt. Diese Dinge werden ausführlich in Siegels Buch, § 21, abgehandelt.

Im ersten, dem elliptischen Fall sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt invariant unter der Abbildung (8.11). Daher hat die Abbildung (8.9) in einer Umgebung des Nullpunkts eine Schar von invarianten, den Nullpunkt umschließenden Jordankurven, wenn eine konvergente Transformation (8.10) in die Normalform (8.11) existiert. Nun ist aber auch hier wie oben bei den Hamiltonschen Differentialgleichungen Divergenz der Transformationen in die Normalform die Regel. Einen entsprechenden Satz habe ich in meiner bei Siegel angefertigten Dissertation bewiesen. Trotzdem existieren solche invarianten Kurven in beliebiger Nähe des Nullpunkts, wenn nicht alle Birkhoff-Konstanten $w_1, w_2, \ldots$ verschwinden (vgl. § 32 des Buches von Siegel und Moser).

Im zweiten, dem hyperbolischen Fall sind die Koordinatenachsen $\xi = 0$ und $\eta = 0$ invariant unter der Abbildung (8.12). Man bekommt also zwei invariante Kurven der Abbildung (8.9) durch den Nullpunkt, wenn eine konvergente Transformation (8.10) in die Normalform (8.12) existiert. Diese invarianten Kurven, die als die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit bezeichnet werden, können aber leicht auch ohne eine konvergente Transformation in die Normalform konstruiert werden. Dennoch ist die Frage der Existenz einer konvergenten Transformation von prinzipiellem Interesse.

S i e g e l hatte sich bis zur Drucklegung seines Buches vergeblich um einen Konvergenzbeweis bemüht. Dies gelang erst M o s e r auf einem Umweg über eine entsprechende Konvergenzaussage für Hamiltonsche Differentialgleichungen, die noch periodisch von der Zeit abhängen. S i e g e l schaffte daraufhin in der Arbeit [71] den direkten Beweis für die Konvergenz einer in ganz bestimmter Weise normierten Transformation (8.10) in die Normalform (8.12) mit Hilfe der Majorantenmethode. Er trug diesen Beweis 1957 im Göttinger Mathematischen Kolloquium von Anfang bis Ende vor.

Ähnlich der Analogie zwischen dem elliptischen Fall der Abbildung (8.1) und den Hamiltonschen Differentialgleichungen (8.1), (8.2), (8.3) entspricht dem hyperbolischen Fall das System (8.1), (8.2) mit m = 2 und nicht-reellem Quotienten λ_1/λ_2 der Eigenwerte. Auch zu diesem Hamiltonschen System, das wir ebenfalls hyperbolisch nennen wollen, gibt es eine Birkhoffsche Normalform, und ein

9 Siegels Beitrag zum Problem der Stabilität

Wir betrachten wieder das analytische System von Differentialgleichungen

schluß an die Definition dieses Systems formulierten Frage III nach der Gesamtheit aller Lösungen, die für alle $t \geqslant 0$ in einer gegebenen, genügend kleinen Umgebung von $x = 0$ bleiben bzw. nach Null streben.

Die Schwierigkeiten beim Versuch einer vollständigen Beantwortung dieser Frage nehmen mit der Anzahl der rein imaginären Eigenwerte der Matrix (6.2) zu, u. a. infolge des Auftretens von kleinen Nennern. In den drei einfachsten Fällen ließen sich diese Schwierigkeiten in Grenzen halten. Es handelt sich dabei um den Fall, in dem keine imaginären Eigenwerte vorhanden sind, den Fall eines verschwindenden Eigenwerts und den Fall zweier nicht verschwindender, rein imaginärer Eigenwerte.

Diese Fälle wurden hauptsächlich von Bohl, Cotton, Ljapunow, Perron und Poincaré untersucht. Dabei wurden auch topologische Methoden verwendet, wobei dann die rechte Seite des Systems (6.1) nur als differenzierannehmen, wobei A^-, A^+ bzw. A^0 reelle quadratische m, p bzw. q – reihige Matrizen sind, deren Eigenwerte sämtlich negative, positive bzw. verschwindende Realteile haben, $m + p + q = n$. Wenn wir auch die Spalte der Koordinaten entsprechend aufteilen, die Koordinaten der Reihe nach mit $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p$, $z_1, \ldots, z_q$ bezeichnen und zu den Spalten x, y, z zusammenfassen, so können wir das System (6.1) ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form

$$(9.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = A^- x + F^-(x, y, z), \\ \dot{y} = A^+ y + F^+(x, y, z), \\ \dot{z} = A^0 z + F^0(x, y, z) \end{cases}$$

annehmen, wobei die Komponenten $F_1^-, \ldots, F_q^0$ von F^-, F^+, F^0 konvergente Potenzreihen in den Variablen x, [illegible] z, mit reellen Koeffizienten ohne konstante

[illegible]

und lineare Glieder sind.

Eine Möglichkeit weiterer Vereinfachung bieten die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit. Es handelt sich dabei um die beiden invarianten analytischen Mannigfaltigkeiten, die sich aus allen für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ exponentiell gegen den Nullpunkt $x = 0, y = 0, z = 0$ strebenden Lösungen von (9.1) zusammensetzen.

[illegible]

nur in impliziter Form. Sie können auch in der expliziten Form

$$(9.2) \quad y = Y^-(x), z = Z^-(x) \quad \text{bzw.} \quad x = X^+(y), z = Z^+(y)$$

definiert werden, wobei im Falle der stabilen Mannigfaltigkeit die Komponenten Y_1^-, [illegible] Z^- von Y^-, Z^- und im Falle der instabilen Mannigfaltigkeit die Komposungen von (9.1) auf diesen Mannigfaltigkeiten genügen den Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A^- x + F^-(x, 0, 0) \tag{9.4}$$

bzw.

$$\dot{y} = A^+ y + F^+(0, y, 0). \tag{9.5}$$

Siegel konstruierte nun nicht nur diese Mannigfaltigkeiten, sondern führte auf ihnen in demselben Arbeitsgang auch gewisse Normalkoordinaten ein, derart daß sich die aus (9.4), (9.5) durch Transformation auf die Normalkoordinaten hervorgegangenen Systeme sofort in geschlossener Form integrieren ließen.

Wir holen diesen Übergang zu Normalkoordinaten nach. Da die Eigenwerte von A^- und A^+ jeweils in einer offenen Hälfte der komplexen Ebene liegen, gibt es konvergente Potenzreihen-Transformationen

$$\left\{\begin{array}{ll} x_j = \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_k + \ldots, & y_j = \sum_{\ell=1}^{p} d_{j\ell} v_\ell + ;;; \\ (j = 1, \ldots, m) & (j = 1, \ldots, p) \end{array}\right. \tag{9.6}$$

in den neuen Variablen $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_p$ mit komplexen Koeffizienten, so daß die transformierten Systeme die Normalform

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{u}_j = \lambda_j u_j + \sum C_{jk_1\ldots k_m} u_1^{k_1} \ldots u_{j-1}^{k_{j-1}} & (j = 1, \ldots, m) \\ \dot{v}_j = \lambda_{m+j} v_j + \sum D_{j\ell_1\ldots\ell_p} v_1^{\ell_1} \ldots v_{j-1}^{\ell_{j-1}} & (j = 1, \ldots, p) \end{array}\right. \tag{9.7}$$

bekommen, wobei die Summe in der j-ten Gleichung sich über alle nicht-negativen ganzen Zahlen $k_1, \ldots, k_{j-1}$ bzw. $\ell_1, \ldots, \ell_{j-1}$ erstreckt, für die

$$\lambda_j = k_1\lambda_1 + \ldots + k_{j-1}\lambda_{j-1} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

bzw. $\lambda_{m+j} = \ell_1\lambda_{m+1} + \ldots + \ell_{j-1}\lambda_{m+j-1} \qquad (j = 1, \ldots, p)$

gilt, und die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von A^- bzw. $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+p}$ von A^+ der Größe ihrer Realteile nach zu ordnen sind:

$$\operatorname{Re}\lambda_m \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re}\lambda_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_{m+p}.$$

Es haben dann alle Lösungen von (9.7) die Gestalt

$$u_j = e^{\lambda_j t} P_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{9.8}$$

$$v_j = e^{\lambda_{m+j} t} Q_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, p) \tag{9.9}$$

mit Polynomen P_j, Q_j in t, deren Koeffizienten m bzw. p Integrationskonstanten enthalten. Setzt man (9.8), (9.9) in (9.6) ein, so ergeben sich Reihenentwicklungen für sämtliche Lösungen auf der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeit, und diese Lösungen streben exponentiell nach Null für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$.

Wenn $q = 0$ ist, also in (9.1) die Gleichung für z fehlt, gibt es keine anderen Lösungen als die eben beschriebenen, die für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ in einer genügend kleinen Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ bleiben. Damit ist in diesem Fall das Verhalten der Lösungen von 9.1 in der Nähe des Nullpunkts vollständig geklärt, und zwar in der Art und Weise, wie es in Siegels Arbeit [34] über den Dreierstoß geschehen ist.

Der Bezug zu den Ausführungen am Ende des 3. Abschnitts ergibt sich durch Identifikation von (3.1) mit (9.1), $q = 0$, so daß also $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_m = y_p$, $t = s$ zu setzen ist. Schließlich ist in (9.8) dann s durch $t - t_0$ gemäß (3.3) zu ersetzen.

In dem Fall $q \geqslant 1$, bei dem in (9.1) die Gleichung für z wirklich vorhanden ist, gibt es möglicherweise noch weitere Lösungen, die sich für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ in einer genügend kleinen Umgebung des Nullpunkts $x = 0, y = 0, z = 0$ aufhalten.

Diese Frage wurde in den Fällen

$$q = 1, A^0 = 0 \quad \text{und} \quad q = 2, A^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu > 0$$

von Siegel in [94] und [98] vollständig beantwortet. Ljapunow hatte diese Fälle zwar auch schon behandelt, aber $p = 0$ vorausgesetzt, d. h. die zweite Gleichung in (9.1) für y fehlte bei ihm.

Bevor wir uns diesen Untersuchungen Siegels zuwenden, ist es aus Gründen besserer Formulierbarkeit der Resultate nützlich, die heute allgemein üblichen Begriffe der stabilen und der instabilen Zentrumsmannigfaltigkeit von vorneherein einzuführen. Man kann sie in der Form

$$(9.10) \quad y = Y_0^-(x, z), \qquad x = Y_0^+(y, z)$$

als Lösung partieller Differentialgleichungen definieren, die wieder wie bei (9.2) einfach dadurch entstehen, daß man (9.10) formal nach t differenziert und dann $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ mit Hilfe von (9.1) eliminiert. Es gibt C^∞-Funktionen Y_0^-, X_0^+, die diese Differentialgleichungen erfüllen und für $x = 0, z = 0$ bzw. $y = 0, z = 0$ mitsamt ihren partiellen Ableitungen verschwinden. Die Koeffizienten der mit Gliedern zweiten Grades beginnenden formalen Taylorreihe von Y_0^- bzw. X_0^+ in $x = 0, z = 0$ bzw. $y = 0, z = 0$ lassen sich aus den entsprechenden Differentialgleichungen rekursiv eindeutig berechnen, während die C^∞-Funktionen Y_0^-, X_0^+ selbst im allgemeinen nicht eindeutig sind.

Wie wir oben gesehen haben, dürfen wir o. B. d. A. für (9.1) noch die Gleichungen (9.3) voraussetzen, die

$$Y_0^-(x, 0) = 0, \qquad X_0^+(y, 0) = 0$$

zur Folge haben. Das bedeutet, daß derjenige Teil der stabilen (instabilen) Zentrumsmannigfaltigkeit, der nicht auf der stabilen (instabilen) Mannigfaltigkeit liegt, durch $z \neq 0$ gegeben ist. Diese Aussage bezieht sich wie alles andere in diesem Abschnitt auf eine hinreichend kleine Umgebung des Nullpunkts $x = 0, y = 0, z = 0$.

Für Siegel existierte die stabile bzw. instabile Zentrumsmannigfaltigkeit nur, soweit sich auf ihr wirklich Lösungen des Systems (9.1) befanden.

Um zu genaueren Aussagen zu gelangen, setzen wir jetzt

$$(9.11) \quad q = 2, A^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu > 0$$

voraus. Nach Umnumerierung der Eigenwerte ist dann die Bedingung (6.3) erfüllt, und nach Identifikation von (6.1) mit (9.1) kann der im Anschluß an (6.3) dargestellte Prozeß durchgeführt werden, der entweder die Gleichung (6.8) oder die

Relationen (6.9) ergibt. Wenn wir den Fall (6.8) mit $r = \infty$ bezeichnen, haben wir die drei Möglichkeiten

$$(9.12)\quad r = \infty; \qquad r < \infty, c_r < 0; \qquad r < \infty, c_r > 0.$$

Die Resultate von [98] lassen sich nun im wesentlichen zusammenfassen in dem

Satz 9.1 *Gegeben sei das System von Differentialgleichungen* (9.1) *mit den Eigenschaften* (9.3) *und* (9.11). *Der oben bezeichnete Prozeß führe zu dem Fall* $r < \infty$, $c_r < 0$ *unter den drei Möglichkeiten* (9.12). *Dann gilt:*

(a) *Zu einer beliebig vorgegebenen Umgebung* V *von* $x = 0, y = 0, z = 0$ *existiert eine Umgebung* U *von* $x = 0, z = 0$, *so daß die stabile Zentrumsmannigfaltigkeit* $y = Y_0^-(x, z)$ *in* U *eindeutig bestimmt und außerdem für* $z \neq 0$ *analytisch ist. Ferner gibt es zu jedem Punkt* (x_0, z_0) *von* U *genau eine Lösung* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ *von* (9.1), *die für alle* $t \geqslant 0$ *in* V *liegt und für die* $x(0) = x_0$, $z(0) = z_0$ *gilt. Diese Lösung liegt auf der stabilen Zentrumsmannigfaltigkeit, d. h. es ist*

$$y(t) = Y_0^-(x(t), z(t)) \qquad (t \geqslant 0),$$

und es gilt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

(b) *Es gibt eine Umgebung* V *von* $x = 0, y = 0, z = 0$, *so daß für jede Lösung* $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ *von* (9.1), *die für* $t \leqslant 0$ *in* V *bleibt,* $y(t) = 0$, $z(t) = 0$ *gilt. Jede dieser Lösungen liegt also auf der instabilen Mannigfaltigkeit und strebt exponentiell gegen Null für* $t \to -\infty$.

Den entsprechenden Satz für den Fall $r < \infty$, $c_r > 0$ erhält man, wenn man t durch $-t$ ersetzt.

Nun kommen wir zum Fall $r = \infty$, der nach den Ausführungen im 6. Abschnitt vorliegt, wenn das System (9.1) ein Integral in Form einer mit gewissen Gliedern zweiten Grades beginnenden Potenzreihe in den Variablen $x_1, \ldots, z_q$ besitzt.

Die Zusammenfassung der in [94] enthaltenen Resultate führt zu dem

Satz 9.2 *Gegeben sei das System von Differentialgleichungen* (9.1) *mit den Eigenschaften* (9.3) *und* (9.11). *Der oben bezeichnete Prozeß führe zu dem Fall* $r = \infty$ *unter den drei Möglichkeiten* (9.12). *Dann gilt:*

(a) *Die formale Taylorreihe von* Y_0^- *bzw.* X_0^+ *ist konvergent in einer Umgebung von* $x = 0, z = 0$ *bzw. von* $y = 0, z = 0$, *so daß also die stabile und die instabile Zentrumsmannigfaltigkeit* $y = Y_0^-(x, z)$, $x = X_0^+(y, z)$ *eindeutig bestimmt und analytisch sind. Der Durchschnitt dieser beiden Mannigfaltigkeiten ist in einer genügend kleinen Umgebung* V *des Nullpunkts* $x = 0, y = 0, z = 0$ *eine zweidimensionale analytische Mannigfaltigkeit, die ausgefüllt wird mit einer Schar periodischer Lösungen. Es handelt sich dabei um die durch Satz* 6.1 *gegebenen periodischen Lösungen. Andere für alle Zeiten in* V *liegenden Lösungen von* (9.1) *gibt es nicht.*

(b) *Jede Lösung von* (9.1), *die für* $t \geqslant 0$ *bzw.* $t \leqslant 0$ *in einer genügend kleinen Umgebung von* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *liegt, muß auf der stabilen bzw. instabilen Zentrumsmannigfaltigkeit liegen.*

(c) *Zu jeder Umgebung* V *von* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *gibt es eine Umgebung* U *von* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, *so daß jede Lösung von* (9.1), *die für* $t = 0$ *in* U *und auf der stabilen bzw. instabilen Zentrumsmannigfaltigkeit liegt, für alle* $t \geqslant 0$ *bzw.* $t \leqslant 0$ *in* V *bleibt und sich asymptotisch an eine periodische Lösung heranwindet.*

Siegel behandelte in [94], [98] auch den Fall eines Systems (9.1) mit (9.3) und $q = 1$, $A^0 = 0$ statt (9.11), der zu ganz ähnlichen Ergebnissen führt, wobei Gleichgewichtslösungen an die Stelle der periodischen Lösungen treten.

Zum Schluß sei noch die kleine Arbeit [38] erwähnt, in der Siegel ohne Beweis einen Satz für Abbildungen formulierte, der auf das System (9.1) übertragen, so lautet:

Jede gegenüber dem System (9.1) invariante Menge liegt auf einer q-dimensionalen irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit.

Diese Aussage ist jedenfalls richtig in den von Siegel untersuchten Fällen.

Prof. Dr. Helmut Rüßmann
Fachbereich Mathematik
Johannes-Gutenberg-Universität
Saarstr. 21
6500 Mainz

(*Eingegangen 30. 5. 1983*)

Anhang

Schriftenverzeichnis[1]

Abhandlungen

1. Approximation algebraischer Zahlen. Jahrbuch der Philosophischen Fakultät Göttingen, Teil II. Auszüge aus den Dissertationen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung 1921, 291–296
2. Approximation algebraischer Zahlen. Mathematische Zeitschrift **10** (1921) 173–213
3. Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate. Mathematische Zeitschrift **11** (1921) 246–275
4. Über Näherungswerte algebraischer Zahlen. Mathematische Annalen **84** (1921) 80–99
5. Ueber die Coefficienten in der Taylorschen Entwicklung rationaler Funktionen. The Tôhoku Mathematical Journal **20** (1921) 26–31
6. Ueber den Thueschen Satz. Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania 1921, I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse, 2. Bind, Nr. 16
7. Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion. Mathematische Annalen **85** (1922) 123–128
8. Additive Theorie der Zahlkörper I. Mathematische Annalen **87** (1922) 1–35
9. Bemerkungen zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. Mathematische Annalen **86** (1922) 276–279
10. Über die Diskriminanten total reeller Körper. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1922, 17–24
11. Neuer Beweis des Satzes von Minkowski über lineare Formen. Mathematische Annalen **87** (1922) 36–38
12. Additive Zahlentheorie in Zahlkörpern. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **31** (1922) 22–26
13. Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion II. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1922, 25–31
14. Additive Theorie der Zahlkörper II. Mathematische Annalen **88** (1923) 184–210
15. The integer solutions of the equation $y^2 = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k$. The Journal of the London Mathematical Society **1** (1926) 66–68
16. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse 1929, Nr. 1
17. Über die Perioden elliptischer Funktionen. Journal für die reine und angewandte Mathematik **167** (1932) 62–69

---

1) Entnommen aus: S i e g e l , C. L.: Gesammelte Abhandlungen. Bd. I bis III 1966; Bd. IV 1979. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag.

18. Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik **2** (1932) 45–80
19. Über Gitterpunkte in convexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem. Acta Mathematica **65** (1935) 307–323
20. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Annals of Mathematics **36** (1935) 527–606
21. Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper. Acta Arithmetica **1** (1935) 83–86
22. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen II. Annals of Mathematics **37** (1936) 230–263
23. Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems. Transactions of the American Mathematical Society **39** (1936) 225–233
24. Mittelwerte arithmetischer Funktionen in Zahlkörpern. Transactions of the American Mathematical Society **39** (1936) 219–224
25. The volume of the fundamental domain for some infinite groups. Transactions of the American Mathematical Society **39** (1936) 209–218
26. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III. Annals of Mathematics **38** (1937) 212–291
27. Analytische Theorie der quadratischen Formen. Comptes Rendus du Congrès international des Mathématiciens (Oslo) 1937, 104–110
28. Die Gleichung $ax^n - by^n = c$. Mathematische Annalen **114** (1937) 57–68
29. Formes quadratiques et modules des courbes algébriques. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2. série **61** (1937) 331–352
30. Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen. Mathematische Zeitschrift **43** (1938) 682–708
31. Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen II. Mathematische Zeitschrift **44** (1939) 398–426
32. Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Mathematische Annalen **116** (1939) 617–657
33. Einheiten quadratischer Formen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität **13** (1940) 209–239
34. Der Dreierstoß. Annals of Mathematics **42** (1941) 127–168
35. On the modern development of celestial mechanics. American Mathematical Monthly **48** (1941) 430–435
36. Equivalence of quadratic forms. American Journal of Mathematics **63** (1941) 658–680
37. On the integrals of canonical systems. Annals of Mathematics **42** (1941) 806–822
38. Some remarks concerning the stability of analytic mappings. Revista de la Universidad Nacional de Tucumán A2 (1941) 151–157
39. Iteration of analytic functions. Annals of Mathematics **43** (1942) 607–612
40. Note on automorphic functions of several variables. Annals of Mathematics **43** (1942) 613–616
41. Symplectic geometry. American Journal of Mathematics **65** (1943) 1–86
42. Contribution to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions. Annals of Mathematics **44** (1943) 143–172
43. Discontinuous groups. Annals of Mathematics **44** (1943) 674–689
44. Generalization of Waring's problem to algebraic number fields. American Journal of Mathematics **66** (1944) 122–136

45. On the theory of indefinite quadratic forms. Annals of Mathematics **45** (1944) 577–622
46. Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle. Duke Mathematical Journal **11** (1944) 597–602
47. The average measure of quadratic forms with given determinant and signature. Annals of Mathematics **45** (1944) 667–685
48. The trace of totally positive and real algebraic integers. Annals of Mathematics **46** (1945) 302–312
49. Sums of m^{th} powers of algebraic integers. Annals of Mathematics **46** (1945) 313–339
50. A mean value theorem in geometry of numbers. Annals of Mathematics **46** (1945) 340–347
51. On the zeros of the Dirichlet L-functions. Annals of Mathematics **46** (1945) 409–422
52. Note on differential equations on the torus. Annals of Mathematics **46** (1945) 423–428
53. Some remarks on discontinuous groups. Annals of Mathematics **46** (1945) 708–718
54. En brevveksling om et polynom som er i slekt med Riemanns zetafunksjon. Norsk Matematisk Tidsskrift 28 (1946) 65–71
55. Indefinite quadratische Formen und Modulfunktionen. Courant Anniversary Volume 1948, 395–406
56. Bemerkung zu einem Satze von Jacob Nielsen. Matematisk Tidsskrift, B (1950) 66–70
57. Über eine periodische Lösung im ebenen Dreikörperproblem. Mathematische Nachrichten **4** (1951) 28–35
58. Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I. Mathematische Annalen **124** (1951) 17–54
59. Die Modulgruppe in einer einfachen involutorischen Algebra. Festschrift zur Feier des 200jährigen Bestehens der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, 1951, 157–167
60. Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie II. Mathematische Annalen **124** (1952) 364–387
61. Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1952, Nr. 5, 21–30
62. A simple proof of $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\sqrt{\tau/i}$. Mathematika **1** (1954) S. 4
63. Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Mathematische Annalen **128** (1954) 144–170
64. Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1955, Nr. 4, 71–77
65. Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Communications on Pure and Applied Mathematics **8** (1955) 677–681
66. Die Funktionalgleichungen einiger Dirichletscher Reihen. Mathematische Zeitschrift 63

67. A generalization of the Epstein zeta function. Journal of the Indian Mathematical Society **20** (1956) 1–10.
68. Zur Vorgeschichte des Eulerschen Additionstheorems. In: Sammelband Leonhard Euler

71. Vereinfachter Beweis eines Satzes von J. Moser. Communications on Pure and Applied Mathematics **10** (1957) 305–309
72. Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen. Publications of the Mathematical Society of Japan 1959, Nr. 5
73. Zur Bestimmung des Volumens des Fundamentalbereichs der unimodularen Gruppe. Mathematische Annalen **137** (1959) 427–432
74. Über das quadratische Reziprozitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1960, Nr. 1, 1–16
75. Über die algebraische Abhängigkeit von Modulfunktionen n-ten Grades. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1960, Nr. 12, 257–272
76. Bestimmung der elliptischen Modulfunktion durch eine Transformationsgleichung. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **27** (1964) 32–38
77. Moduln Abelscher Funktionen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1963, Nr. 25, 365–427
78. Zu zwei Bemerkungen Kummers. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1964, Nr. 6, 51–57
79. Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisensteinschen Reihen. Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddelelser **34** (1964) Nr. 6
80. Beweis einer Formel für die Riemannsche Zetafunktion. Mathematica Scandinavica **14** (1964) 193–196
81. Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars. Frankfurter Universitätsreden 1965, Heft 36, Klostermann-Verlag
82. Faksimile eines Briefes an W. Gröbner.
83. Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstraß. In: Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Zur Erinnerung an Edmund Landau (1877–1938). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1968, 299–306
84. Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1968, Nr. 2, 7–38
85. Zum Beweise des Starkschen Satzes. Inventiones mathematicae **5** (1968) 180–191
86. Über die Fourierschen Koeffizienten von Eisensteinschen Reihen der Stufe T. Mathematische Zeitschrift **105** (1968) 257–266
87. Erinnerungen an Frobenius. In: F. G. Frobenius, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I. 1968, Addendum S. IV–VI
88. Abschätzung von Einheiten. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1969, Nr. 9, 71–86
89. Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1969, Nr. 10, 87–102
90. Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1970, Nr. 3, 15–56
91. Einige Erläuterungen zu Thues Untersuchungen über Annäherungswerte algebraischer Zahlen und diophantische Gleichungen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1970, Nr. 8, 169–195
92. Algebraische Abhängigkeit von Wurzeln. Acta Arithmetica **21** (1972) 59–64
93. Über Moduln Abelscher Funktionen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1971, Nr. 4, 79–96

94. Periodische Lösungen von Differentialgleichungen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1971, Nr. 13, 261–283
95. Wurzeln Heckescher Zetafunktionen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1972, Nr. 2, 11–20
96. Zur Theorie der quadratischen Formen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1972, Nr. 3, 21–46
97. Normen algebraischer Zahlen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1973, Nr. 11, 197–215
98. Beitrag zum Problem der Stabilität. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1974, Nr. 3, 23–58
99. Zur Summation von L-Reihen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1975, Nr. 18, 269–292

Nachtrag

100. Zur Einführung. In: Selected Mathematical Papers of Axel Thue. Oslo: Universitetsforlaget 1977, XXVII–XXXII

Bücher und Vorlesungsausarbeitungen

In der folgenden Liste werden alle von Siegel publizierten Bücher, Monographien und vervielfältigten Ausarbeitungen Siegelscher Vorlesungen erfaßt. Die Namen der Bearbeiter erscheinen in Klammern hinter dem Titel.

Bücher

Transcendental Numbers. Ann. of Math. Studies 16, Princeton 1949

Transzendente Zahlen. Mannheim: Bibliographisches Institut 1967 (aus dem Englischen übersetzt von B. Fuchssteiner und D. Laugwitz)

Symplectic Geometry. New York: Academic Press 1964 (auch Siegel, Ges. Abh. Bd. II, S. 274–359)

Nr. 7: On Quadratic Forms 1957 (K. G. Ramanathan)
Nr. 23: On Advanced Analytic Number Theory 1. Ausgabe 1961, 2. Ausgabe 1965 (S. Raghavan)
Nr. 28: On Riemann Matrices 1963 (S. Raghavan, S. S. Rangachari)
Nr. 42: On the Singularities of the Three-Body Problem 1967 (K. Balagangadharan, M. K. Venkatesha Murthy)

3. Göttingen, Mathematisches Institut: Analytische Zahlentheorie, 1951
   Himmelsmechanik, 1951/52 (W. Fischer, J. Moser, A. Stöhr)
   Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie, Teil I 1953/54, Teil II 1954 (E. Gottschling für beide Teile)
   Automorphe Funktionen in mehreren Variablen, 1954/55 (E. Gottschling, H. Klingen)
   Quadratische Formen, 1955 (H. Klingen)
   Analytische Zahlentheorie, Teil I, 1963 (K. F. Kürten), Teil II, 1963/64 (K. F. Kürten, G. Köhler)
   Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, Teil I, 1964/65, Teil II, 1965, Teil III, 1965/66; alle Teile von Siegel selbst verfaßt
4. New York, New York University: Lectures on Analytic Number Theory, 1945 (B. Friedman)
   Lectures on Geometry of Numbers, 1945/46 (B. Friedman)
5. Princeton, The Institute for Advanced Study: Analytic Functions of Several Complex Variables, 1948/49 (P. T. Bateman)
   Lectures on the Analytic Theory of Quadratic Forms, auch Princeton University, 1. Ausgabe 1935 (M. Ward), 2. verbesserte Ausgabe 1949, 3. verbesserte Ausgabe 1963

Doktoranden

(erstes Datum: Tag der mündlichen Prüfung; zweites Datum: Ausstellung der Urkunde)

In Frankfurt (1922 bis 1937):

1. Wilhelm Maier: Potenzreihen irrationalen Grenzwertes
   22. 6. 1925 / 7. 2. 1927
2. Fritz Götzky: Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher
   27. 2. 1928 / 5. 11. 1928
3. Karl Böhle: Über die Transzendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten (Verallgemeinerung eines Satzes von A. Gelfond)
   28. 7. 1932 / 11. 3. 1933
4. Berthold Steßmann: Periodische Minimalflächen
   19. 6. 1933 / 4. 4. 1934
5. Theodor Schneider: Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen
   12. 11. 1934 / 5. 12. 1934
6. Walter Wagner: Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeiner Zahlsysteme
   27. 6. 1936 / 6. 11. 1937
7. Helene Braun: Über die Zerlegung quadratischer Formen in Quadrate
   28. 6. 1937 / 10. 11. 1937
8. Gertrud Meyer: Allgemeine Jupiterstörungen des Planeten 27 Euterpe (Boda und Siegel)
   28. 6. 1937 / 27. 8. 1938

In Göttingen (1920 bis 1921, 1938 bis 1940, 1946 bis 1947, ab 1951):

9. Günter Meinardus: Über das Partitionenproblem eines reellquadratischen Zahlkörpers
   13. 2. 1953 / 19. 11. 1953
10. Helmut Klingen: Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen
    19. 11. 1954 / 31. 1. 1955
11. Ulrich Christian: Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades
    16. 11. 1956 / 27. 11. 1956
12. Ernst Wienholtz: Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typ
    26. 7. 1957 / 3. 12. 1957
13. Helmut Rüßmann: Über die Existenz einer Normalform inhaltstreuer elliptischer Transformationen
    27. 6. 1958 / 17. 7. 1958
14. Günter Kaufhold: Dirichletsche Reihen mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktionen 2. Grades
    12. 12. 1958 / 20. 1. 1959

15. Erhard Gottschling: Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades
25. 2. 1959 / 19. 3. 1959
16. Christian Pommerenke: Über die Gleichverteilung von Gitterpunkten auf m-dimensionalen Ellipsoiden
25. 2. 1959 / 4. 5. 1959
17. Otto Körner: Übertragung des Goldbach-Vinogradovschen Satzes auf reellquadratische Zahlkörper
20. 5. 1960 / 19. 12. 1960
18. Werner Schaal: Übertragung des Kreisproblems auf reell-quadratische Zahlkörper
21. 7. 1961 / 10. 3. 1962
19. Günter Köhler: Ein Trennungssatz für Eisensteinsche Reihen zweiten und dritten Grades der Stufe I
10. 11. 1966 / 18. 11. 1966

Ehrungen

11. April 1947: Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab (Kopenhagen), Mitglied

4. März 1949: Akademie der Wissenschaften in Göttingen, korrespondierendes Mitglied

22. Juni 1951: Akademie der Wissenschaften in Göttingen, ordentliches Mitglied

28. März 1952: Det Norske Videnskaps-Akademi (Oslo), Mitglied

20. März 1953: The University of Chicago, Doctor of Science honoris causa

18. Dez. 1953: Indian Mathematical Society, Honorary Member

14. Nov. 1954: Université de Nancy, Docteur honoris causa

25. April 1956: Königlich Schwedische Akademie der Wissenschaften, auswärtiges Mitglied

14. Mai 1956: Académie des Sciences de l'Institut de France, Correspondant pour la section de géometrie

29. Nov. 1956: Akademie Lincei (Rom), auswärtiges Mitglied

22. Dez. 1956: London Mathematical Society, Honorary Member

21. Febr. 1958: Bayerische Akademie der Wissenschaften (München), korrespondierendes Mitglied

24. Juni 1958: Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina (Halle), Mitglied

7. Jan. 1959: Tata Institute of Fundamental Research (Bombay), Honorary Fellow

2. Juli 1960: Universität Basel, Doctor honoris causa

28. Juni 1963: Orden Pour le mérite für Wissenschaften und Künste (Bonn), Mitglied

10. Juni 1964: Universität Frankfurt, Doctor honoris causa

14. Dez. 1964: Bundesrepublik Deutschland, Das Große Verdienstkreuz mit Stern

11. Mai 1965: Universität Wien, Doctor honoris causa

10. April 1967: New York University, Doctor of Science honoris causa

11. Nov. 1967: Eidgenössische Technische Hochschule (Zürich), Doktor der Mathematik ehrenhalber

23. April 1968: National Academy of Sciences of the United States of America, Foreign Associate Member

31. Aug. 1968: Académie Internationale d'Histoire des Sciences (Paris), Membre d'honneur

16. Aug. 1971: Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät (Göttingen), Erneuerung der am 16. 08. 21 verliehenen Würde eines Doktors der Philosophie

19. März 1973: Académie des Sciences de l'Institut de France, Associé étranger

14. Mai 1974: Österreichische Akademie der Wissenschaften (Wien), Ehrenmitglied der Math.-Nat. Klasse

10. April 1978: The Wolf Foundation, Israel, The Wolf Prize

9. Mai 1979: American Academy of Arts and Sciences (Boston, Massachusetts), Foreign Honorary Member

Juni 1970: Bayerische Akademie der Wissenschaften (München), Gratulation zum Doktorjubiläum

31. Dez. 1976: Österreichische Akademie der Wissenschaften (Wien), Gratulation zum 80. Geburtstag

31. Dez. 1976: Bayerische Akademie der Wissenschaften (München), Gratulation zum 80. Geburtstag

Wolf D. Beiglböck

Lineare Algebra

Eine anwendungsorientierte Einführung in die Geometrie, die Gleichungs- und Ungleichungstheorie, sowie die Proportionalitätsgesetze zum Gebrauch neben Vorlesungen

1983. XXV, 328 Seiten
DM 39,50; approx. US$ 15.70. ISBN 3-540-12477-2

7064/5/1

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. – Motivation. – Lineare Räume. – Die lineare Abbildung. – Die linearen Gleichungen. – Die affine Geometrie. – Die linearen Funktionale. – Die metrischen Strukturen. – Die Rolle der komplexen Zahlen. – Die Reduktionstheorie. – Anhänge. – Literaturverzeichnis. – Sachverzeichnis.

Die vorliegende Einführung in die Lineare Algebra wendet sich an Studierende der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaftswissenschaften. Die Darstellung ist mathematisch exakt, ohne dabei den informellen Aspekt der Theorie aufzugeben. Im Vergleich mit Konkurrenzwerken seien die folgenden Punkte erwähnt: