82. Band Heft 1
ausgegeben am 12.3.1980

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, W.-D. Geyer

B. G. Teubner Stuttgart 1980

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende dieses Heftes zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 74,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 73 30 76
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 82, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

H. Schöneborn: In memoriam W. Krull
H.-J. Nastold: Wolfgang Krulls Arbeiten zur kommutativen Algebra und ihre Bedeutung für die algebraische Geometrie
J. W. S. Cassels: Rationale quadratische Formen
D. Bierlein; V. Mammitzsch: Hans Richter zum Gedenken
M. Knebusch: Signaturen, reelle Stellen und reduzierte quadratische Formen
L. Gårding: Microlocal Analysis of Distributions
H. Tietz: Fundstellen für biographische und bibliographische Angaben über deutsche Mathematiker, die nach 1933 verstorben sind (Stand 1977)
M. Frewer: Felix Bernstein
H. Amann: Funktionalanalysis und nichtlineare Differentialgleichungen
St. Schottlaender: Zum Gedenken an Wilhelm Quade
P. L. Butzer et al.: Eduard Helly (1884–1943) – Eine nachträgliche Würdigung
M. Kracht: Maximilian Pinl in memoriam

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bimarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Jber, d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 1–11
MOS-Klassifikation: 01A55

Riemann und das „Weierstraßsche" Prinzip der analytischen Fortsetzung durch Potenzreihen*)

E. Neuenschwander, Zürich

Einleitung

In fast allen neueren Arbeiten und Lehrbüchern zur Geschichte der Funktionentheorie werden drei verschiedene Ansätze und Methoden zum Aufbau der Funktionentheorie nach ihren drei Hauptbegründern unterschieden: Cauchy (Integralformeln, Reihenentwicklung), Riemann (Potentialtheorie, Riemannsche Fläche, konforme Abbildung), Weierstraß (Potenzreihen, Prinzip der analytischen Fortsetzung). Dabei wird häufig behauptet, daß diese Ansätze während längerer Zeit ohne Wechselwirkung blieben und erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts u. a. durch Goursat ([7], Vorwort) vereinigt wurden[1]).

Diese Darstellung mag zwar für die Zeit nach Riemann einigermaßen zutreffen[2]), Riemann selbst wird sie jedoch keineswegs gerecht, wie die Nachschriften von Riemanns Vorlesungen zeigen. Sie konnte sich erst verbreiten, nachdem die nicht publizierten Teile dieser Nachschriften allmählich in Vergessenheit gerieten und man sich einzig auf Riemanns Schriften [22] und die veröffentlichten Teile seines Nachlasses [22], [23] zu stützen begann. Es scheint uns daher angebracht, an dieser Stelle einen kurzen Überblick von Riemanns Vorlesungen zu geben und einige Bemerkungen über die gegenseitigen Beziehungen zwischen den drei genannten Mathematikern hinzuzufügen.

---

*) Die vorliegenden Forschungsresultate wurden während eines Studienaufenthaltes an der Harvard University erarbeitet und erstmals am 28. Oktober 1978 auf der Jahresversammlung der History of Science Society in Madison (USA) vorgetragen und danach in der Form eines Preprints veröffentlicht. Wir danken dem History of Science Department der Harvard University für die erwiesene Gastfreundschaft, dem Kanton Zürich für den gewährten Reisekostenbeitrag und Herrn Dr. Haenel von der Handschriftenabteilung der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen für seine entgegenkommende Hilfe bei der Handschriftenbeschaffung. Angaben über weitere, nicht in Göttingen befindliche Riemanniana werden jederzeit dankbar entgegengenommen.

1) Vgl. z. B. [11], S. 669; [12], S. 194 und [13], S. 358f.

2) Für die Zeit nach Riemann siehe z. B. [8], S. 92ff. und [1], S. 27ff. Weierstraß hat Riemanns Methoden nach dessen Tode mehrmals, zum Teil sogar öffentlich kritisiert (vgl. Weierstraß' Kritik am Dirichletschen Prinzip [40] oder auch [41], S. 235).

0012–0456/80/01 0001–11 $02.20/0

Riemanns Vorlesungen zur allgemeinen Funktionentheorie

Nach der Zusammenstellung von M. Noether und W. Wirtinger ([23], S. 114) kündigte Riemann mehrmals einführende Vorlesungen zur Funktionentheorie an, und zwar für die Semester: WS 1855/56, WS 1856/57, WS 1858/59 und SS 1861. Von allen diesen Vorlesungen existieren in der Universitätsbibliothek Göttingen meist Nachschriften verschiedener Hörer, so daß wir sein Vorgehen recht gut kennen. Riemanns Vorlesungen aus dem Wintersemester 1855/56 decken sich noch am ehesten mit seinen publizierten Arbeiten[3]). In den folgenden Jahren hat Riemann die sogenannten „Cauchyschen" und „Weierstraßschen" Methoden vermehrt be- [illegible]

[illegible] tionentheorie zu vermitteln, wollen wir hier kurz den Inhalt des einführenden Teiles der Vorlesung „Über Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche" aus dem Sommersemester 1861 zusammenfassen[4]).

Riemann beginnt seine Vorlesung mit einigen Vorbemerkungen über die komplexen Zahlen (Gaußsche Zahlenebene, Rechenoperationen). Ausgehend von der komplexen Differentiation und den sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen definiert er sodann, ähnlich wie in seinen publizierten Arbeiten ([24], [25]), die analytische Funktion. Nach einer Betrachtung des Integralbegriffes leitet er anschließend den Cauchyschen Integralsatz her und geht danach zum Logarithmus und der Cauchyschen Integralformel über. In den nächsten Kapi-

Hauptteil seiner damaligen Vorlesungen zu, der Theorie der Abelschen und elliptischen Funktionen[5]).

Aus der obenstehenden Zusammenfassung ergibt sich, daß Riemann im einleitenden Teil seiner Vorlesungen, entgegen der heute vorherrschenden Meinung, bereits eine gewisse Verschmelzung der sogenannten „Cauchyschen", „Riemannschen" und „Weierstraßschen" Methoden vollzogen hat. Riemanns diesbezügliche Haltung wurde wohl am zutreffendsten von Klein geschildert, der schrieb ([10], S. 254): „Überhaupt liegt Riemann jede starre Einseitigkeit gänzlich fern; er macht für sich nutzbar, was er vorfindet und zieht die verschiedensten Methoden heran, wenn er durch sie sein Problem zu fördern und zu klären vermag".

Riemanns Darstellung der analytischen Fortsetzung durch Potenzreihen

Leider reicht der Platz hier nicht aus, um Riemanns gesamten Aufbau der Funktionentheorie anhand der überlieferten Vorlesungsnachschriften ausführlich zu erörtern. Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf seine Methode der ana-

Beim Beweis stützt sich Riemann auf die unmittelbar vorher behandelte Entwicklung einer analytischen Funktion in eine Potenzreihe (vgl. z. B. [27], S. 17ff.) und zeigt zunächst die Gültigkeit des Identitätssatzes für Potenzreihen. Nach Dedekind ([27], S. 21 f.) geht er hierzu von zwei Funktionen $f(\zeta)$ und $g(\zeta)$ aus, die längs einer endlichen, von a ausgehenden Linie übereinstimmen und in einem diese Linie umfassenden Gebiete regulär sind. Somit gilt[7]):

$$f(\zeta) = \sum_0^\infty a_\nu (\zeta - a)^\nu$$

$$g(\zeta) = \sum_0^\infty b_\nu (\zeta - a)^\nu$$

$$f(\zeta) - g(\zeta) = \sum_0^\infty (a_\nu - b_\nu)(\zeta - a)^\nu$$

$$= a_0 - b_0 + (\zeta - a) \sum_1^\infty (a_\nu - b_\nu)(\zeta - a)^{\nu - 1}.$$

Da nun $f(\zeta)$ und $g(\zeta)$ längs der Linie übereinstimmen, folgt, indem man $\zeta \to a$ gehen läßt, $a_0 = b_0$. (Für den Beweis vgl. die Ausführungen des Originaltextes anhand der Reproduktion auf S. 5 oben.) Wendet man dieselbe Schlußweise auf

$$\frac{f(\zeta) - g(\zeta)}{\zeta - a} = a_1 - b_1 + (\zeta - a) \sum_2^\infty (a_\nu - b_\nu)(\zeta - a)^{\nu - 1}$$

an, so ergibt sich $a_1 = b_1$ und so fortfahrend $a_\nu = b_\nu$ für sämtliche Koeffizienten. Folglich ist $f(\zeta) = g(\zeta)$ innerhalb desjenigen Gebietes, wo sich die Funktionen in die obigen Potenzreihen entwickeln lassen.

Danach zeigt Riemann mit Hilfe des Kreiskettenverfahrens, daß sich die Funktion über dieses Gebiet hinaus, „wenn überhaupt, nur auf eine Weise stetig fortsetzen läßt". Er entwickelt hierzu zunächst die Funktion in einem Gebiete um a. Danach entwickelt er sie in einem Gebiete um a_1, wobei a_1 innerhalb des Kreises um a liegen soll. Alsdann entwickelt er die Funktion um a_2, wobei a_2 innerhalb des Kreises um a_1 liegen soll (vgl. hierzu den auf S. 5 reproduzierten Originaltext mit der dazugehörigen Abbildung). So fortfahrend ergibt sich, daß die Fortsetzung der Funktion eine völlig bestimmte ist, womit der Identitätssatz für analytische Funktionen nach Riemann bewiesen ist.

Zum Abschluß weist Riemann noch darauf hin, daß je nach der Beschaffenheit der fortzusetzenden Funktion diese entweder für denselben Wert von z immer wieder denselben Wert annehmen wird, auf welchem Weg auch die Fortsetzung geschehen sein möge oder nicht. Den letzteren Fall illustriert er anhand der mehrdeutigen Funktionen $\sqrt{z}$ und log z, wobei er die Begriffe „Zweig" und „Verzweigungsstelle" einer Funktion einführt (vgl. hierzu die auf S. 6 wiedergegebene Abbildung aus [31]). Es ergibt sich somit, daß die bereits früher erwähnte Stelle aus

[7]) Die nachfolgenden Ausführungen geben den Dedekindschen Text möglichst wortgetreu wieder. An einigen Stellen haben wir uns jedoch kleine Änderungen erlaubt, um dem modernen Leser das Verständnis zu erleichtern.

$$f(\zeta) - g(\zeta) = \sum_0^\infty (a_\nu - b_\nu)(\zeta - a)^\nu$$

$$= a_0 - b_0 + (\zeta - a)\sum_1^\infty (a_\nu - b_\nu)(\zeta - a)^{\nu-1}$$

$a_0 - b_0 = 0$ [illegible] $= p$, [illegible]

$$f(\zeta) - g(\zeta) = p + (\zeta - a)\, q = q\left(\frac{p}{q} + \zeta - a\right)$$

[illegible] 0 [illegible] $\zeta - a$ [illegible],
[illegible] $\frac{p}{q}$.
[illegible] $\zeta = a$ [illegible] 0 [illegible],
[illegible] 0 [illegible] $a_0 = b_0$

$$\frac{f\zeta - g\zeta}{\zeta - a} = a_1 - b_1 + (\zeta - a)\sum_2^\infty (a_\nu - b_\nu)(\zeta - a)^{\nu-1}$$

a_1 [illegible] $= b_1$ [illegible]

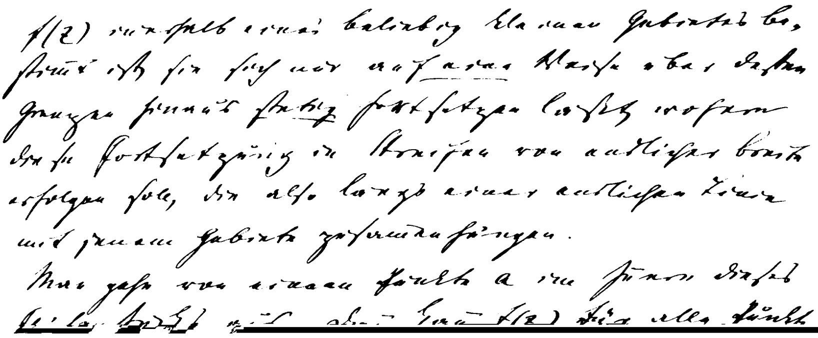
$f\zeta = g\zeta$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] a

[illegible] a. [illegible] a


f(z) innerhalb eines beliebig kleinen Gebietes bestimmt ist, sie sich nur auf eine Weise über dessen Grenzen hinaus stetig fortsetzen lässt, wofern die Fortsetzung in Strecken von endlicher Breite erfolgen soll, die also längs einer endlichen Linie mit jenem Gebiete zusammenhängen.
Man gehe von einem Punkte a im Innern dieses

Riemanns Theorie der Abelschen Funktionen ([25], S. 88f.) unter Zuhilfenahme der analytischen Fortsetzung durch Potenzreihen zu interpretieren ist. Die von Brill und Noether ([2], S. 250f.) gegebene Interpretation ist daher nur bedingt richtig, und es zeigt sich, daß Riemann auch beim obigen Beweis zu einer gewissen Verschmelzung von „Cauchyschen“, „Riemannschen“ und „Weierstraßschen“ Methoden fortgeschritten ist.

Zu den Wechselwirkungen zwischen der französischen Schule, den Berliner Mathematikern und Riemann

Für den Mathematikhistoriker stellt sich nun die interessante Frage, ob Riemann seine Methode der analytischen Fortsetzung durch Potenzreihen relativ unabhängig entwickelte oder sie vielleicht einfach von einem früheren Mathematiker übernahm. Im letzteren Fall wäre natürlich zunächst an Weierstraß zu denken, der ja die analytische Fortsetzung durch Potenzreihen bereits in Arbeiten ([37] bis [39]) aus den Jahren 1841/42 darlegte[8]), die jedoch erst 50 Jahre später in seinen gesammelten Werken publiziert wurden. Betrachtet man den Nachlaß von Riemann, so sieht man, daß sich Riemann jedenfalls seit 1856 für die Arbeiten von Weierstraß interessierte und schon im Erscheinungsjahr von dessen publizierter Abhandlung [36] zur Theorie der Abelschen Funktionen Kenntnis hatte[9]). Ob jedoch Riemann auch in dem uns interessierenden Punkte von Weierstraß abhängt, ist eine andere, bedeutend schwerer zu entscheidende Frage, da Riemann die diesbezüglichen Anregungen durchaus auch auf einem anderen, von der mathematikhistorischen Forschung bisher nur wenig beachteten Wege erhalten haben könnte.

In einer vorangegangenen Arbeit [16] wurde gezeigt, wie Cauchys und Liouvilles Entdeckungen zur Funktionentheorie von Puiseux sowie Briot und Bouquet ausgearbeitet und in Lehrbuchform zusammengefaßt und wie verschiedene Mathematiker in Italien (z. B. Casorati) und in Deutschland (z. B. Durège) dadurch beeinflußt wurden. Aus den obenzitierten Vorlesungsnachschriften ergibt sich nun, daß auch Riemann die Arbeiten der betreffenden französischen Mathematiker kannte und schätzte. In seinen Vorlesungen erwähnte er neben Cauchy unter anderem auch Lagrange, Poisson, Liouville, Puiseux sowie Briot und Bouquet. Von Briot und Bouquet kannte er nicht nur das spätere, zusammenfassende Buch „Théorie des fonctions doublement périodiques . . . ([4], 1859)“, sondern auch den vorangegangenen Teilartikel „Étude des fonctions d'une variable imaginaire ([3], 1856)“, der sich in den Nachschriften von Bezold ([29], S. 28) und Nägelsbach ([30], Bl. 7) aus dem Jahre 1858/59 zitiert findet und etwa das erste „Buch“ des Werkes [4] umfaßt. Anläßlich seiner Pariser Reise im Jahre 1860 besuchte Riemann zudem Briot und bemerkt hierüber in einem Brief an seine Schwester Ida ([32], Brief Nr. 79 vom 27. April 1860): „Einen Tag habe ich auf dem Lande,

[8]) Vor allem in [39], S. 83f. Eine mathematikgeschichtliche Würdigung der obenerwähnten frühen Arbeiten von Weierstraß findet man bei Manning [13].

[9]) Die Arbeiten ([35]–[36]) von Weierstraß werden sowohl in [28], S. 213; [27], S. 29f. und [25], S. 101f. als auch in einem Brief von Riemann an seinen Bruder vom 2. Nov. 1856 (vgl. [22], S. 552) erwähnt.

ein paar Eisenbahnstationen von Paris, in Chatenay bei Briot's recht angenehm verlebt. Ich kannte und schätzte Briot längst seiner guten Arbeiten wegen . . . ". In den obenerwähnten Arbeiten von Puiseux sowie Briot und Bouquet findet sich nun bereits der Identitätssatz für Potenzreihen und das Kreiskettenverfahren (vgl. z. B. [3], S. 116 = [4], S. 35 sowie [21], S. 379f. und Fig. 7). Es dürfte deshalb für Riemann, der die Probleme der Fortsetzung analytischer Funktionen bereits früher mit anderen Mitteln studiert hatte, ein leichtes gewesen sein, die obigen Resultate hiermit in Beziehung zu setzen, wie dies zum Beispiel später auch Méray [15] tat. Somit wäre es durchaus denkbar, daß Riemanns Verfahren der analytischen Fortsetzung durch Potenzreihen unter dem Einfluß der französischen Schule um Cauchy entstand und nicht unter demjenigen von Weierstraß.

Riemanns Beiträge zur Theorie der analytischen Fortsetzung wurden in Berlin relativ früh diskutiert, wie man aus Aufzeichnungen von Gesprächen entnehmen kann, die Casorati im Jahre 1864 in Berlin mit Kronecker und Weierstraß führte. Nach Casoratis Notizen äußerte sich Kronecker zu den diesbezüglichen Bemühungen von Riemann und der französischen Schule wie folgt ([17], S. 7):

> Er [Kronecker] sagte, daß man immer annimmt, daß eine Funktion immer fortgesetzt werden könne, welches auch immer der Teil der Ebene sei, wohin die Variable gehen soll (Briot et Bouquet, Cauchy . . .), das heißt, daß man diese immer einen solchen Weg durchlaufen lassen könne, daß die gefährlichen Punkte vermieden werden, als ob die derartigen Punkte die Verbindung zwischen den Teilen der Ebene nicht gänzlich hindern könnten. Riemann ist ein wenig genauer, aber er schweigt zu viel über diese Dinge,
>
> ecker] nehme zum Beispiel die Funktion
>
> $\Theta_0(q) = 1 + 2\,q + 2\,q^4 + [2\,q^9] + \ldots$
>
> die nur für mod $q < 1$ existiert, das heißt für q innerhalb eines Kreises vom Radius 1. Um die Funktion außerhalb dieses Kreises zu kennen, muß man

nach den Angaben von Schwarz ([33], S. 318) und Casorati ([17], S. 15f. = [18], S. 79f.) scheint ihm jedoch sein späterer Widersacher Kronecker bei der Angabe eines konkreten Beispieles zuvorgekommen zu sein.

Nachtrag: Die oben skizzierten Beziehungen fanden anläßlich der systematischen Durchsicht des Riemannschen Nachlasses eine weitere Bestätigung. Es zeigt sich, daß Riemann die entscheidenden Arbeiten der französischen Mathematiker bereits im Jahre 1851 kannte. In einem nicht publizierten Entwurf zur Verteidigung seiner Doktordissertation vom 16. Dezember 1851 (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Handschrift Riemann 13, Bl. 100f.) bemerkt Riemann unter anderem: „Diese Ansicht ist von Cauchy, welcher sich unter den Franzosen zuerst und am meisten mit der Theorie der complexen Größen beschäftigt hat, in der Sitzung der Par[iser] Ak[ademie] v[om] 31. März dieses Jahres bei Gelegenheit eines Berichts über eine Arbeit von Puiseux ausgesprochen worden und in mehreren folgenden Vorträgen weiter ausgeführt“.

Literatur

[1] Behnke, H.: Karl Weierstraß und seine Schule. In: Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815–1965. Köln und Opladen 1966, 13–40

[2] Brill, A.; Noether, M.: Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 3 (1892/93) 107–566

[3] Briot, C.; Bouquet, J.: Étude des fonctions d'une variable imaginaire. J. de l'Éc. Imp. Polytech. Cah. 36. Tome 21 (1856) 85–131

[4] Briot, C.; Bouquet, J.: Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques. 1. Ed. Paris 1859, 2. Ed. Paris 1875: Théorie des fonctions elliptiques. Dt. Übers. Halle 1862: Briot und Bouquet's Theorie der doppeltperiodischen Functionen und insbesondere der elliptischen Transcendenten.

[5] Dugac, P.: Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. Arch. for Hist. of Exact Sci. **10** (1973) 41–176

[6] Goursat, É.: Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy. Trans. of the Amer. Math. Soc. **1** (1900) 14–16

[7] Goursat, É.: Cours d'Analyse mathématique. Bd. 2. Paris 1905

[8] Hurwitz, A.: Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. In: Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897. Leipzig 1898, 91–112

[9] Klein, F.: Ueber den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Nachr. v. d. K. Gesell. d. Wiss. Gött. Geschäftl. Mitt. 1898, S. 13–18

[10] Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil 1. Berlin 1926

[11] Kline, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York 1972

[12] Kropp, G.: Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten. Heidelberg 1969

[13] Manning, K. R.: The Emergence of the Weierstrassian Approach to Complex Analysis Arch. for Hist. of Exact Sci. **14** (1975) 297–383

[14] Markuschewitsch, A. I.: Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen. Berlin 1955

[15] Méray, Ch.: Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872

[16] Neuenschwander, E.: The Casorati-Weierstrass Theorem. Studies in the History of Complex Function Theory I. Hist. Math. **5** (1978) 139–166

[17] Neuenschwander, E.: Casoratis Gespräche mit Kronecker und Weierstrass in Berlin im Jahre 1864. Prepr. Hist. of Sci. Den. Univ. of Aarhus 1977

[20] O s g o o d , W. F.: Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen einer und mehrerer komplexen Grössen. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II. 2. Leipzig 1901, S. 1–114
[21] P u i s e u x , V.: Recherches sur les fonctions algébriques. J. de math. pures appl. **15** (1850) 365–480. Dt. Übers.: Halle 1861
[22] R i e m a n n , B.: Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. 1. Auflage: Leipzig 1876. 2. Auflage: Leipzig 1892, New York 1953
[23] R i e m a n n , B.: Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke. Nachträge. Herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Leipzig 1902. Nachdruck: New York 1953
[24] R i e m a n n , B.: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Inaug.-diss. Göttingen 1851. = [22], 2. Aufl., 3–48
[25] R i e m a n n, B.: Theorie der Abel'schen Functionen, J. f. d. reine angew. Math. **54** (1857) 101–155. = [22], 2. Aufl., 88–144
[26] R i e m a n n , B.: Elliptische Functionen. Vorlesungen von Bernhard Riemann. Mit Zusätzen herausgegeben von Hermann Stahl. Leipzig 1899
[27] R i e m a n n , B.: Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere hypergeometrische Reihen und verwandte Transzendenten. W.S. 1856/57. Nachschrift von R. Dedekind. Handschrift: Dedekind I, 15. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
[28] R i e m a n n , B.: Theorie der Functionen complexer Größen mit besonderer Anwendung auf die Gauß'sche Reihe F (α, β, γ, x) und verwandte Transcendenten. Wintersemester 1856/7. Nachschrift von E. Schering. Handschrift: Riemann 37, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 193–277
[29] R i e m a n n , B.: Über die hypergeometrische Reihe. Vorlesungen von Prof. B. Riemann. Sommersemester 1859 (?). Stenographische Nachschrift von W. von Bezold. Handschrift: Riemann 29, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
[30] R i e m a n n , B.: Über Funktionen einer veränderlichen Größe, insbesondere über hypergeometrische Reihen und verwandte Transcendenten. Wintersemester 1858/9. Nachschrift von H. Nägelsbach. Handschrift: Riemann 42^{c}, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
[31] R i e m a n n , B.: Theorie der Functionen complexer Variabeln. Vorlesung des Prof. Riemann. Göttingen. Sommersemester 1861. Nachschrift von E. Abbe aus dem Besitz von G. Thieme. Handschrift: Riemann 32^{c}, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
[32] R i e m a n n , B.: Familienbriefe und auf die Familie bezügliche Schriftstücke. Nachlaß Bernhard Riemann in der Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz Berlin
[33] S c h w a r z , H. A.: Ueber diejenigen Fälle, in welchen die *Gauss*ische hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Function ihres vierten Elementes darstellt. J. f. d. reine angew. Math. **75** (1872) 292–335. = Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Bd. 2. Berlin 1890. 211–259
[34] S e g a l , S. L.: Riemann's Example of A Continuous "Nondifferentiable" Function Continued. Math. Intelligencer 1 (1978) 81–82
[35] W e i e r s t r a ß , K.: Zur Theorie der Abel'schen Functionen. J. f. d. reine angew. Math. **47** (1854) 289–306. In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Bd. 1. Berlin 1894, 133–152
[36] W e i e r s t r a ß , K.: Theorie der Abel'schen Functionen. J. f. d. reine angew. Math. **52** (1856) 285–339. Auszug in: Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Bd. 1. Berlin 1894, 297–356.
[37] W e i e r s t r a ß , K.: Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt. Abhandlung aus dem Jahre 1841. In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Bd. 1. Berlin 1894, 51–66
[38] W e i e r s t r a ß , K.: Zur Theorie der Potenzreihen. Abhandlung aus dem Jahre 1841. In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Bd. 1. Berlin 1894, 67–74
[39] W e i e r s t r a ß , K.: Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen. Aus einer Abhandlung aus dem Jahre 1842. In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Bd. 1. Berlin 1894 75–85

[40] W e i e r s t r a ß, K.: Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip. Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 14. Juli 1870. In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Bd. 2. Berlin 1895, 49–54

[41] W e i e r s t r a ß , K.: Aus einem bisher noch nicht veröffentlichten Briefe an Herrn Professor Schwarz, vom 3. October 1875. In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Bd. 2. Berlin 1895, 235–244

PD Dr. E. Neuenschwander
Mathematisches Institut
Universität Zürich
Freiestrasse 36
CH-8032 Zürich

(Eingegangen: 25. 5. 1979)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 12–32

Kategorizität

U. Felgner, Tübingen*)

§ 1 Einleitung

Die Axiomen-Systeme, die man in den verschiedensten Gebieten der Mathematik antrifft, werden aufgestellt, entweder mit dem Ziel, die Eigenschaften genau einer Struktur zu erfassen, oder mit dem Ziel, diejenigen Eigenschaften zu erfassen, die vielen gleichartigen Strukturen zukommen. So hat man beispielsweise für die Bereiche der natürlichen Zahlen **N**, der reellen Zahlen **R** und der Euklidischen Ebene **E** Axiomen-Systeme, die nur jeweils diese Strukturen selbst als einzige Modelle haben. Andererseits sollen Axiomatisierungen etwa des Gruppen-Begriffes, des Körper-Begriffes etc. möglichst viele Modelle besitzen. Ein Axiomen-System, welches bis auf Isomorphie nur genau ein Modell besitzt, nennt man *kategorisch* oder *monomorph.* Die Bezeichnung ‚kategorisch' für derartige Axiomen-Systeme hat O. Veblen im Jahre 1904 in die mathematische Literatur eingeführt. Veblen [50] berichtet, daß ihm dieses Wort von dem Philosophen John Dewey vorgeschlagen worden sei. Unter Verwendung anderer Bezeichnungen hatten bereits früher G. Can-

(G. Peano [33]), die Arithmetik der reellen Zahlen (Huntington [22]) und die Euklidische Geometrie (Veblen [50]) alle in Sprachen der zweiten Stufe formuliert sind.

Im folgenden wollen wir einen etwas schwächeren Kategorizitäts-Begriff diskutieren. Falls $\mathfrak{m}$ eine (endliche oder unendliche) Kardinalzahl ist, dann nennen wir ein Axiomen-System $\mathfrak{m}$*-kategorisch,* falls es bis auf Isomorphie nur höchstens ein Modell der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ hat.

Die Bedeutung dieses abgeschwächten Kategorizitäts-Begriffes läßt sich leicht durch eine Vielzahl interessanter und wichtiger Beispiele belegen. Das wohl älteste Beispiel stammt von G. Cantor (1895):

Satz 1.1 (G. Cantor [7], p. 304) *Das Axiomen-System für dicht-geordnete linear-geordnete Mengen ohne erstes und ohne letztes Element ist* $\aleph_0$*-kategorisch. Es ist in keiner überabzählbaren Mächtigkeit kategorisch.*

Ein anderes klassisches Beispiel stammt von E. Steinitz (1910). Das Spektrum der Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, für die $\mathfrak{m}$-Kategorizität vorliegt, ist hier komplementär zum Spektrum des Cantorschen Beispieles.

Satz 1.2 (E. Steinitz [47], p. 125) *Das Axiomen-System für algebraisch abgeschlossene Körper fest vorgegebener Charakteristik ist in allen überabzählbaren Kardinalzahlen kategorisch. Es ist jedoch nicht* $\aleph_0$*-kategorisch.*

Satz 1.3 *Sei* p *eine Primzahl. Das Axiomen-System für elementar-abelsche* p*-Gruppen ist in allen endlichen und allen unendlichen Kardinalzahlen kategorisch.*

Wir erwähnen noch das folgende Beispiel: *Das Axiomen-System für Boolesche Algebren ist in allen endlichen, aber in keiner unendlichen Kardinalzahl kategorisch.* Die Liste derartiger Beispiele ließe sich noch beliebig lang fortsetzen. Zwei Dinge fallen bei all diesen Beispielen unmittelbar auf:

(1) Diese Axiomen-Systeme können innerhalb von Sprachen erster Stufe formuliert werden. Wir werden daher keines dieser wichtigen Beispiele auslassen, wenn wir uns von nun an stets auf Sprachen 1. Stufe beschränken werden.

(2) Wir können kein in einer Sprache 1. Stufe formuliertes Axiomen-System finden, welches beispielsweise $\aleph_{17}$-kategorisch, aber nicht $\aleph_{18}$-kategorisch ist. Dieses merkwürdige Phänomen war zuerst J. Łoś 1955 aufgefallen (cf. Łoś [26], p. 62). Den tieferen Grund dafür hat aber erst M. Morley 1965 gefunden. Er bewies den folgenden Satz, der zu den schönsten Ergebnissen der mathematischen Logik gehört:

Satz 1.4 (M. Morley [31]) *Für jedes Axiomen-System* Σ, *das in einer abzählbaren Sprache erster Stufe formuliert ist, sind die folgenden Eigenschaften untereinander äquivalent:*

(i) Σ *ist in allen überabzählbaren Kardinalzahlen kategorisch;*

(ii) Σ *ist in einer überabzählbaren Kardinalzahl kategorisch;*

(iii) Σ *ist* $\aleph_1$*-kategorisch.*

Einige Aspekte des Beweises werden wir in § 2 diskutieren. Weitere Beweise des Satzes von Morley haben später F. Rowbottom (1967), H. J. Keisler [24] und

J. T. Baldwin – A. Lachlan [3] gegeben. Aufgrund des Satzes von Morley werden wir uns im folgenden nur noch mit $\aleph_0$-kategorischen und $\aleph_1$-kategorischen Axiomen-Systemen befassen.

Ein weiteres Phänomen, das uns nicht nur am Beispiel der algebraisch abgeschlossenen Körper fester Charakteristik, sondern auch etwa am Beispiel der $\aleph_1$-kategorischen Theorie der torsionsfreien teilbaren abelschen Gruppen auffällt, findet seine Erklärung in dem folgenden

Satz 1.5 (J. T. Baldwin – A. Lachlan [3]) *Jedes $\aleph_1$-kategorische Axiomen-System, das in einer abzählbaren Sprache 1. Stufe formuliert ist, ist entweder $\aleph_0$-kategorisch oder besitzt genau $\aleph_0$ nicht isomorphe abzählbare Modelle.*

In diesem Zusammenhang drängt es sich auf, Axiomen-Systeme zu betrachten, die in irgendeiner unendlichen Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ bis auf Isomorphie nur endlich viele Modelle besitzen. Ein klassisches Beispiel ist das Axiomen-System Σ^0, dessen Modelle gerade die Strukturen $\mathfrak{A} = \langle A, R\rangle$ sind, wo R eine Äquivalenz-Relation auf A ist, welche genau zwei Äquivalenz-Klassen besitzt, die beide unendlich sind. Σ^0 ist offenbar $\aleph_0$-kategorisch, und Σ^0 besitzt bis auf Isomorphie genau zwei Modelle der Kardinalität $\aleph_1$. Hinter diesem Beispiel verbirgt sich ein sehr viel allgemeinerer Sachverhalt, den A. Lachlan 1975 aufgedeckt hat.

Satz 1.6 (A. Lachlan [25]) *Jedes vollständige Axiomen-System, das in einer abzählbaren Sprache 1. Stufe formuliert ist, welches in einer überabzählbaren Mächtigkeit bis auf Isomorphie nur endlich viele Modelle besitzt, ist entweder* $\aleph_0$-kategorisch oder $\aleph_1$-kategorisch.

Dabei heißt ein Axiomen-System Σ, welches in der Sprache $\mathscr{L}$ formuliert ist, *vollständig,* falls für jede $\mathscr{L}$-Aussage Φ gilt: Entweder ist Φ oder die Negation von Φ in Σ beweisbar.

Wir sollten an dieser Stelle noch das folgende überraschende Ergebnis von R. L. Vaught [49] erwähnen: *Es gibt kein in einer abzählbaren Sprache 1. Stufe formuliertes vollständiges Axiomen-System, das bis auf Isomorphie genau zwei abzählbare Modelle hat.* Das Axiomen-System für dichte lineare Ordnungen mit erstem Element hat (bis auf Isomorphie) genau zwei abzählbare Modelle – dieses Axiomen-System ist jedoch nicht vollständig!

§ 2 Syntaktische Probleme

Kategorizität ist eine *semantische* Eigenschaft, d. h. eine Eigenschaft von Modellen eines Axiomen-Systems. Wir fragen, ob diese semantische Eigenschaft mit einer *syntaktischen* Eigenschaft äquivalent ist.

Sei $\mathscr{L}$ eine formale Sprache 1. Stufe. Jede widerspruchsfreie Menge von $\mathscr{L}$-Aussagen bezeichnen wir als in der Sprache $\mathscr{L}$ formuliertes Axiomen-System. Jede widerspruchsfreie, deduktiv abgeschlossene Menge von $\mathscr{L}$-Aussagen bezeichnen wir als *$\mathscr{L}$-Theorie.* Falls T eine $\mathscr{L}$-Theorie ist und $\Sigma \subseteq T$ derart, daß der deduktive Abschluß von Σ ganz T ist, dann nennen wir Σ ein Axiomen-System für T(Σ und T haben dann dieselben Modelle). Bei den in § 1 diskutierten Fragen hätten wir uns statt auf Axiomen-Systeme genausogut auf Theorien beziehen können. Die jetzt zu diskutierenden Fragen beziehen sich jedoch mehr auf Theorien T als auf Axiomen-Systeme für T. Wir diskutieren die Frage, ob und wie sich die semantische Eigenschaft der $\aleph_\alpha$-Kategorizität einer Theorie T durch eine syntaktische Eigenschaft von T charakterisieren läßt.

Als Prototyp einer $\aleph_0$-kategorischen Theorie kann Cantors Theorie der dicht-geordneten, linear-geordneten Mengen ohne Endpunkte dienen. Diese Theorie sei mit Th(DLO) bezeichnet. Die $\aleph_0$-Kategorizität von Th(DLO) hat Cantor unter Verwendung seines sogenannten *Zick-Zack-Verfahrens* bewiesen. Wenn $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1, \leqslant \rangle$ und $\mathfrak{A}_1 = \langle A_2, \leqslant \rangle$ abzählbare dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte sind, dann wird ein Isomorphismus φ von $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$ durch Rekursion konstruiert, indem man abwechselnd dem n-ten Element x_n der einen Struktur ein Element y_n in der anderen Struktur zuordnet, welches sich in bezug auf die bereits gefundenen Elemente $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ in derselben Lage befindet wie x_n in bezug auf $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Um dieses Verfahren auch für andere Arten von Strukturen fruchtbar zu machen, müssen wir den Begriff „*in derselben Lage*" adäquat verallgemeinern. Dazu führt man den Begriff des *Typs* eines Elementes ein. Wir machen eine Vorbemerkung.

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ ein Modell der $\mathscr{L}$-Theorie T. Mit dieser Notation wird angedeutet, daß A der Individuen-Bereich der Struktur $\mathfrak{A}$ ist und daß an der Stelle der Pünktchen die Interpretationen in $\mathfrak{A}$ der Funktions-Zeichen, Relations-Zeichen, und Individuen-Konstanten (die im Alphabet von $\mathscr{L}$ vorkommen) aufgeführt sind. Im folgenden wird es nützlich sein zu erlauben, daß einzelne Elemente aus $\mathfrak{A}$ in den Ausdrücken aus $\mathscr{L}$ vorkommen dürfen. Wenn $B \subseteq A$, dann sei $\mathscr{L}(B)$ die Menge aller $\mathscr{L}$-Formeln, in denen Elemente aus B als Parameter vorkommen dürfen.

Definition *Sei* $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ *eine* $\mathscr{L}$*-Struktur und* $B \subseteq A$. *Für jedes geordnete* n*-tupel* $(a_1, \ldots, a_n)$ *von Elementen* $a_i \in A$ *setzen wir*

$$p_B^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \{\Phi(v_1, \ldots, v_n) \in \mathscr{L}(B)\ ;\ \Phi[a_1, \ldots, a_n] \text{ gilt in } \mathfrak{A}\}$$

und nennen $p_B^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ *den* T y p v o n $(a_1, \ldots, a_n)$ i n $\mathfrak{A}$ ü b e r B.

Die Menge $p_B^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ sammelt also alle $\mathscr{L}(B)$-Formeln, welche höchstens $v_1, \ldots, v_n$ als freie Variable enthalten, die eine in $\mathfrak{A}$ gültige Eigenschaft des n-tupels $(a_1, \ldots, a_n)$ ausdrücken[1]). Im Falle $n = 1$ gibt $p_B^{\mathfrak{A}}(a)$ also Auskunft über die *Lage* von a in $\mathfrak{A}$ in bezug auf die Elemente von B. Insbesondere können wir sagen, daß zwei Elemente a und a' von $\mathfrak{A}$ sich *in derselben Lage bezüglich* B befinden, wenn $p_B^{\mathfrak{A}}(a) = p_B^{\mathfrak{A}}(a')$ gilt. Damit ist klar geworden, welche Begriffsbildungen zu verwenden sind, wenn wir das Cantorsche Zick-Zack-Verfahren im Falle beliebiger Strukturen $\mathfrak{A}$ anwenden wollen. Unklar ist aber noch, unter welchen Bedingungen das Zick-Zack-Verfahren erfolgreich durchführbar ist.

Definition *Wenn* T *eine* $\mathscr{L}$*-Theorie ist, dann heißt eine Menge* p *von* $\mathscr{L}$*-Formeln ein* n - T y p v o n T, *falls es ein Modell* $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ *von* T *und*

---

[1]) Falls $B = \phi$, dann schreiben wir $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ statt $p_\phi^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$.

Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$ *mit* $p = p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ *gibt. Ein* n-*Typ* p *von* T *heißt* H a u p t - T y p *falls eine* $\mathscr{L}$ *-Formel* $\Psi(v_1, \ldots, v_n)$ *existiert so, daß für alle* $\Phi(v_1, \ldots, v_n) \in p$

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n [\Psi(v_1, \ldots, v_n) \rightarrow \Phi(v_1, \ldots, v_n)]$$

in T *beweisbar und* $\exists v_1 \ldots \exists v_n \Psi(v_1, \ldots, v_n)$ *mit* T *konsistent ist.*

Sei $S_n = S_n^T$ die Menge aller n-Typen von T. Man kann S_n^T als Stone-Raum einer gewissen Booleschen Algebra $B_n(T)$ deuten (cf. [8], Exercise 2.3.14*). Die n-Typen von T sind gerade die Ultrafilter von $B_n(T)$ und die Haupt-Typen sind genau die Haupt-Ultrafilter von $B_n(T)$. Daraus ergibt sich übrigens sofort, daß S_n^T genau dann endlich ist, wenn jeder n-Typ von T ein Haupt-Typ ist.

Eine Charakterisierung $\aleph_0$*-kategorischer* Theorien können wir jetzt formulieren:

Satz 2.1 (E. E n g e l e r [16], C. R y l l - N a r d z e w s k i [39], L. S v e n o n i u s [48]) *Für jede vollständige Theorie* T, *die in einer abzählbaren Sprache* 1. *Stufe formuliert ist, sind äquivalent:*

(i) T *ist* $\aleph_0$*-kategorisch;*

(ii) *für alle* $n \in \mathbf{N}$: T *besitzt nur endlich viele* n-*Typen;*

(iii) *für alle* $n \in \mathbf{N}$: *jeder* n-*Typ von* T *ist ein Haupt-Typ;*

(iv) *jedes abzählbare* T-*Modell* $\mathfrak{A}$ *hat für jedes* $n \in \mathbf{N}$ *nur endlich viele* n-*orbits.*

Wenn $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ ein T-Modell ist und $(a_1, \ldots, a_n)$ ein n-tupel von Elementen aus A, dann wird

$$\{(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)); \quad \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})\}$$

als n-*orbit* von $(a_1, \ldots, a_n)$ in $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Dabei ist $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ die Automorphismen-Gruppe von $\mathfrak{A}$.

Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) wird durch Anwendung des Zick-Zack-Verfahrens bewiesen: wenn $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1, \ldots \rangle$ und $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2, \ldots \rangle$ abzählbare T-Modelle sind, und wenn φ ein partieller Isomorphismus von $B = \{b_0, \ldots, b_{n-1}\} \subseteq A_1$ in A_2 mit

$$(\dagger) \qquad p^{\mathfrak{A}_1}(b_0, \ldots, b_{n-1}) = p^{\mathfrak{A}_2}(\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{n-1}))$$

ist, dann können wir zu jedem $b_n \in A_1$ ein $d = d_n \in A_2$ finden mit

$$(\dagger\dagger) \qquad p^{\mathfrak{A}_1}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) = p^{\mathfrak{A}_2}(\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{n-1}), d)\ .$$

Dies ist klar, denn wenn etwa $\Psi(v_0, \ldots, v_n)$ die erzeugende Formel des Haupt-Typs $p = p^{\mathfrak{A}_1}(b_0, \ldots, b_n)$ ist, dann gilt $\Psi(b_0, \ldots, b_n)$, also $\exists v_n \Psi(\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{n-1}), v_n) \in p^{\mathfrak{A}_2}(\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{n-1}))$ nach ($\dagger$). Wir können also ein $d \in A_2$ finden so, daß $\Psi(\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{n-1}), d)$ in $\mathfrak{A}_2$ gilt; weil Ψ ein Erzeuger ist, folgt ($\dagger\dagger$). Induktiv kann daher φ durch das Zick-Zack-Verfahren zu einem Isomorphismus von $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$ erweitert werden.

Im Falle $\aleph_1$kategorischer Theorien ist die typen-theoretische Analyse komplizierter. Da man jetzt überabzählbare T-Modelle zu betrachten hat, müssen Typen

$p_B^{\mathfrak{A}}(a)$ auftreten, wobei B unendlich sein kann. Statt der Endlichkeit der Stone-Räume S_n^T wird daher jetzt eine andere Mächtigkeits-Abschätzung bedeutsam.

Es sei T eine Theorie in der Sprache $\mathscr{L}$ und $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ ein Modell von T. Mit $Th(\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A})$ bezeichnen wir die $\mathscr{L}(A)$-Theorie von $\mathfrak{A}$, d. h. die Menge aller in $\mathfrak{A}$ gültigen $\mathscr{L}(A)$-Aussagen. Mit $S_n(\mathfrak{A}) = S_n^T(\mathfrak{A})$ bezeichnen wir schließlich noch die Menge aller n-Typen von $Th(\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A})$.

Definition *Sei* T *eine Theorie, die in einer abzählbaren Sprache* 1. *Stufe formuliert ist, und sei* λ *eine unendliche Kardinalzahl.* T *heißt* λ- s t a b i l, *falls* A *und* $S_1^T(\mathfrak{A})$ *gleichmächtig sind für jedes* T-*Modell* $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ *der Kardinalität* λ. T *heißt* s t a b i l, *wenn es eine Kardinalzahl* $\lambda \geqslant \aleph_0$ *gibt so, daß* T λ-*stabil ist.*

Die Stabilität einer Theorie T bedeutet eine gewisse „Zahmheit“ von T. Um dies einzusehen, erinnern wir daran, daß eine Teilmenge M der $\mathscr{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ *definierbar* (genauer: *parametrisch definierbar*) heißt, falls eine $\mathscr{L}$-Formel $\Phi(v_0, \ldots, v_m)$ und Elemente $a_1, \ldots, a_m \in A$ existieren so, daß

$$M = \{b \in A;\ \Phi[b, a_1, \ldots, a_m] \text{ gilt in } \mathfrak{A}\}.$$

Die Menge $Def(\mathfrak{A})$ aller definierbaren Teilmengen von $\mathfrak{A}$ bildet eine Boolesche Algebra, und $S_1(\mathfrak{A})$ ist gerade der Stone-Raum von $Def(\mathfrak{A})$. Es gilt $|A| \leqslant |Def(\mathfrak{A})| \leqslant |S_1(\mathfrak{A})|$, wenn $|X|$ die Kardinalität von X bezeichnet. λ-Stabi- [illegible]

bare Teilmengen besitzen.

(näheres dazu in G. Sacks [40], Section 35). Beispielsweise sind in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper die Elemente einer Transzendenz-Basis ununterscheidbar und in jeder torsions-freien teilbaren abelschen Gruppe G (als $\mathbf{Q}$-Vektor-Raum aufgefaßt) die Elemente einer Basis ununterscheidbar.

S. Shelah hat 1969 ein bemerkenswertes Ergebnis über das Spektrum der Kardinalzahlen erzielt, in denen eine abzählbare Theorie stabil ist.

Satz 2.3 (S. Shelah [45]) *Sei* T *eine vollständige Theorie, die in einer abzählbaren Sprache* 1. *Stufe formuliert ist, und sei*

$$\mathrm{Spec}(T) = \{\lambda;\ \lambda \geq \aleph_0 \text{ und } T \text{ ist } \lambda\text{-stabil}\}.$$

Dann gilt entweder $\mathrm{Spec}(T) = \phi$ *oder* $\mathrm{Spec}(T) = \{\lambda;\ \lambda^\omega = \lambda\}$ *oder* $\mathrm{Spec}(T) = \{\lambda; \lambda \geq 2^\omega\}$ *oder* $\mathrm{Spec}(T) = \{\lambda; \lambda \geq \aleph_0\}$.

Die hier auftretenden vier Möglichkeiten bezeichnet man der Reihe nach als *Unstabilität, Stabilität, Super-stabilität* und *ω-Stabilität*. Ein typisches Beispiel für eine unstabile Theorie ist Cantors Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte, Th(DLO). In der Tat bestimmt jeder Dedekindsche Schnitt in einer dichten linearen Ordnung $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ einen Typ $p \in S_1(\mathfrak{A})$. Wenn beispielsweise $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ eine η_α-Menge der Kardinalität $\aleph_\alpha$ ist, dann gilt $|S_1(\mathfrak{A})| > \aleph_\alpha$. Allgemeiner gilt: *Die Theorie* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *einer linearen Ordnung* $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$ *ist dann und nur dann stabil, wenn* A *endlich ist.* In der Tat, wenn $\mathbf{D} = \mathfrak{B}^I/\mathscr{F}$ Ultrapotenz eines Modelles $\mathfrak{B}$ von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ ist, wo $\mathscr{F}$ ein *guter* Ultrafilter auf I ist, dann besitzt $\mathbf{D}$ eine in sich dichte Teilmenge X der Kardinalität $|\mathfrak{B}|$, und es gibt $\mathfrak{C}$ mit $|\mathfrak{C}| = |X|$ und $X \subseteq \mathfrak{C} \preccurlyeq \mathbf{D}$. Daß die Unstabilität der Theorien unendlicher linearer Ordnungen geradezu der Ur-Grund aller Unstabilität ist, hat S. Shelah 1971 gezeigt:

Satz 2.4 (S. Shelah [42]) *Sei* T *eine vollständige Theorie, die in einer abzählbaren Sprache* 1. *Stufe* $\mathscr{L}$ *formuliert ist. Äquivalent sind:*

(i) T *ist unstabil;*

(ii) *es gibt eine* $\mathscr{L}$*-Formel* $\Phi(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, *ein* T*-Modell* $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ *und* n*-tupel* $\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}) \in A^n$ $(j \in \mathbf{N})$, *so daß* $i < j \Leftrightarrow (\Phi[\vec{a}_i, \vec{a}_j]$ *gilt in* $\mathfrak{A}$).

Aus Satz 2.2 und Satz 2.4 ergibt sich, daß in Modellen $\aleph_1$-kategorischer Theorien keine unendlichen linearen Ordnungen definierbar sind. Wie nützlich dies in Anwendungen ist, werden wir an späterer Stelle sehen. Sehr nützlich ist auch noch der folgende Satz von J. Baldwin und A. Lachlan 1971. Dabei nennen wir ein T-Modell $\mathfrak{A}$ ein *zwei-Kardinalzahl-Modell,* falls es eine parametrisch-definierbare unendliche Teilmenge gibt, deren Kardinalität echt kleiner als die Kardinalität von $\mathfrak{A}$ ist.

Satz 2.5 (J. Baldwin – A. Lachlan [3]) *Sei* T *eine vollständige Theorie, die in einer abzählbaren Sprache* 1. *Stufe formuliert ist. Äquivalent sind:*

(i) T *ist* $\aleph_1$*-kategorisch;*

(ii) T *ist* ω*-stabil und besitzt kein zwei-Kardinalzahl-Modell.*

§ 3 Kategorische algebraische Theorien

In den §§ 1 und 2 hatten wir eine Reihe von Beispielen $\aleph_\alpha$-kategorischer

Theorien diskutiert. Diese Beispiele entstammen der Algebra und der Theorie der geordneten Mengen. Wir wenden uns jetzt dem Problem zu, beispielsweise alle $\aleph_\alpha$-kategorischen Theorien linearer Ordnungen, alle $\aleph_\alpha$-kategorischen Theorien von Körpern etc. zu bestimmen.

Falls T eine vollständige $\mathscr{L}$ -Theorie ist und $\mathfrak{A}$ ein T-Modell, dann gilt $T = Th(\mathfrak{A})$. Das Problem, das jetzt diskutiert werden soll, können wir daher äquivalent wie folgt formulieren: klassifiziere alle linearen Ordnungen, alle Körper, alle Gruppen etc., deren Theorien 1. Stufe $\aleph_\alpha$-kategorisch sind. Ganz konkret:

(1) Gibt es neben dem von E. Steinitz angegebenen Beispiel eines algebraisch abgeschlossenen Körpers (cf. Satz 1.2) noch andere Körper $\mathfrak{K}$ für die $Th(\mathfrak{K})$ $\aleph_1$-kategorisch ist?

(2) Gibt es neben dem von G. Cantor angegebenen Beispiel $\langle \mathbf{Q}, \leqslant \rangle$ noch andere lineare Ordnungen mit $\aleph_0$-kategorischer Theorie und bei positiver Antwort, welche?

Ähnliche Fragen stellen sich im Falle von Gruppen, Ringen, Booleschen Algebren, Graphen, Schiefkörpern etc. Die Frage (1) hat A. Macintyre in [28] beantwortet. Er bewies, daß es außer endlichen und algebraisch abgeschlossenen Körpern keine anderen Körper gibt, deren Theorie $\aleph_1$-kategorisch ist. Die Antwort auf (2) hat J. G. Rosenstein gegeben; in [37] hat er alle linearen Ordnungen mit $\aleph_0$-kategorischer Theorie bestimmt. Diese und viele weitere Resultate sollen jetzt besprochen werden. Die folgende abkürzende Sprechweise ist bequem und üblich: wir werden eine Struktur $\mathfrak{A}$ $\aleph_\alpha$-kategorisch nennen, wenn die Theorie 1. Stufe von $\mathfrak{A}$, $Th(\mathfrak{A})$, $\aleph_\alpha$-kategorisch ist (analog bei Stabilität).

Wir stellen noch einmal klar, daß eine Struktur $\mathfrak{A}$ der Kardinalität $\aleph_\alpha$, $\aleph_\alpha$-kategorisch genannt wird, wenn $\mathfrak{A}$ unter allen gleichartigen Strukturen gleicher Mächtigkeit bis auf Isomorphie eindeutig durch die Menge $Th(\mathfrak{A})$ aller in $\mathfrak{A}$ gültigen Aussagen 1. Stufe bestimmt ist. Zwar wird dabei auf formale Sprache 1. Stufe Bezug genommen, aber das soll nicht dazu verleiten, die gestellten Fragen allein der Logik zuzurechnen. Es ist üblich, daß ein Mathematiker nicht auf die syntaktische Struktur seiner Aussagen achtet. Gelegentlich tut er es doch, so etwa

a) wenn er das Dualitäts-Prinzip der projektiven Geometrie formuliert, um es auf geometrische Aussagen anzuwenden,

b) wenn er exakt erklären will, was in der Galois-Theorie ein Radikal ist,

c) wenn er sich etwa mit sogenannten PI-Ringen oder etwa mit algebraisch abgeschlossenen Gruppen beschäftigt,

d) wenn er Varietäten von Gruppen untersucht, etc.

Varietäten sind durch Systeme von Gleichungen definierte Klassen, also durch bestimmte Aussagen 1. Stufe definierte Klassen (EC_Δ-Klassen). Ebensowenig wie die Klassifikation aller Schreierschen Varietäten von Gruppen (P. Neumann [32]) allein der Logik zuzurechnen ist, sind die jetzt zu diskutierenden Fragen allein der Logik zuzurechnen. Sprachen 1. Stufe sind ein sehr feines Instrumentarium. Strukturen, die in bestimmten Mächtigkeiten bis auf Isomorphie eindeutig ...

ten 1. Stufe gekennzeichnet sind, lassen einen großen Vorrat schöner algebraischer Eigenschaften erwarten. Daß dies tatsächlich der Fall ist, soll im folgenden gezeigt werden.

A) Abelsche Gruppen

Die Bestimmung aller $\aleph_0$-kategorischen abelschen Gruppen ist leicht und wurde von vielen unabhängig durchgeführt.

Satz 3.1 *Eine abelsche Gruppe ist genau dann $\aleph_0$-kategorisch, wenn sie einen endlichen Exponent hat.*

Als Exponent einer Gruppe G bezeichnet man dabei die kleinste natürliche Zahl $n \geqslant 1$ für die $g^n = 1$ für alle $g \in G$ gilt, falls eine solche Zahl n existiert. Der Beweis ergibt sich leicht aus Satz 2.1: Betrachte den 2-Typ des geordneten Paares (g, g^m). Auf (g, g^m) trifft die Eigenschaft $\Phi(u, v) := (u^m = v)$ zu. Wenn G $\aleph_0$-kategorisch ist, dann folgt aus Satz 2.1 (ii) sofort, daß G einen endlichen Exponenten hat. Abelsche Gruppen von endlichem Exponent sind nach einem Satz von Prüfer direkte Summen endlicher zyklischer Gruppen, so daß sich aus Satz 2.1 (iv) sofort die $\aleph_0$-kategorizität ergibt.

Um die $\aleph_1$-kategorischen abelschen Gruppen zu bestimmen, ist es nach Satz 2.2 ratsam, zuerst alle stabilen und alle ω-stabilen abelschen Gruppen zu bestimmen.

Satz 3.2 (i) (D. Berthier) *Jede abelsche Gruppe ist stabil.*

(ii) (A. Macintyre [27]) *Eine abelsche Gruppe* G *ist genau dann ω-stabil, wenn sie die Form* $G = D \oplus H$ *hat, wobei* D *divisibel ist und* H *einen endlichen Exponent hat.*

Um (i) zu beweisen, wähle man eine Kardinalzahl λ mit $\lambda^\omega = \lambda \geqslant |G|$ und bette G zunächst elementar in eine rein-injektive abelsche Gruppe A ein mit $|A| \leqslant \lambda$, und sei B eine λ^+-saturierte elementare Erweiterung von A der Mächtigkeit $\leqslant 2^\lambda$. Es ist $B = A \oplus C$ für ein geeignetes C und B hat daher nur höchstens

[redacted]

bemerkenswerte Korollar:

Korollar 3.5 *Wenn* G *eine abelsche* p-*Gruppe ist, dann ist* G *genau dann* ω-*stabil, wenn* $\mathrm{Ext}(S, G) = 0$.

$\mathrm{Ext}(A, B)$ ist dabei die Gruppe der abelschen Erweiterungen von B durch A und $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$ besagt, daß jede abelsche Gruppe G mit $B \leqslant G$ und $G/B = A$ isomorph über B zur direkten Summe $A \oplus B$ ist.

B) Kommutative Körper

Ähnlich wie in Satz 3.1 folgt sehr schnell, daß $\aleph_0$-kategorische Körper und $\aleph_0$-kategorische Schiefkörper notwendig endlich sind. Dies folgt, weil ganz allgemein $\aleph_0$-kategorische Strukturen lokal-endlich (sogar: uniform-lokal-endlich) sind (cf. [19]). Mit dem folgenden Satz bewies A. Macintyre nicht nur die Umkehrung des Satzes von E. Steinitz (Satz 1.2), sondern auch die Umkehrung eines Satzes von A. Tarski (1930, publiziert 1948), welcher besagt, daß *die* $\mathscr{L}$ $(+, -, \cdot, 0, 1)$-*Theorie eines jeden algebraisch-abgeschlossenen Körpers Quantoren-Elimination erlaubt.* Allgemein sagt man, daß eine $\mathscr{L}$-Theorie T Quantoren-Elimination erlaubt, falls es für jede $\mathscr{L}$-Formel Φ eine Quantoren-freie $\mathscr{L}$-Formel ψ gibt, so daß die Äquivalenz $\Phi \longleftrightarrow \psi$ in T beweisbar ist.

Satz 3.6 (A. Macintyre [28]) *Für jeden Körper* $\mathfrak{K} = \langle K, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) $\mathfrak{K}$ *ist* $\aleph_1$-*kategorisch,*

(ii) $\mathfrak{K}$ *ist* ω-*stabil,*

(iii) $\mathfrak{K}$ *ist endlich oder algebraisch abgeschlossen,* Da Th($\mathfrak{K}$) Quantoren-Elimination erlaubt und Th($\mathfrak{K}$) = Th(F) = Th(F*), folgt

genau dann eine Nullstelle hat, wenn $\varphi_1(f(x))$ in F* (und damit in H*) eine Nullstelle hat. Daraus folgt nach J.Ax[2]) ([1], Lemma 5, Seite 172), daß φ_1 zu einem Isomorphismus φ_2 von H auf H* fortsetzbar ist. Ganz ähnlich folgt jetzt unter Verwendung eines Lemmas von L. Kronecker (cf. D. Winter [51], Theorem 1.3.5), daß φ_2 zu einem Isomorphismus φ_3 von F auf F* fortsetzbar ist. Die $\aleph_1$-Kategorizität von Th($\mathfrak{K}$) haben wir damit nachgewiesen.

Zu (ii) ⇒ (iii): Sei $\mathfrak{K} = \langle K, \ldots \rangle$ ein unendlicher ω-stabiler Körper. Wir müssen zeigen, daß es keine endlichen Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ gibt. Wenn $\mathfrak{F} = \langle F, \ldots \rangle$ eine endliche Erweiterung von $\mathfrak{K}$ ist, dann ist $\mathfrak{F}$ ein endlich dimensionaler $\mathfrak{K}$-Vektor-Raum. Unter Verwendung von $\mathfrak{K}$-Basen können wir Fragen über $\mathfrak{F}$ zurückspielen auf Fragen über $\mathfrak{K}$. Insbesondere folgt, daß auch $\mathfrak{F}$ ω-stabil ist. Wie im Falle abelscher Gruppen ergibt sich, daß die multiplikative Gruppe F^X von $\mathfrak{F}$ die Form $D \oplus H$ hat, wobei D divisibel ist und H einen endlichen Exponent hat. Polynome n-ten Grades haben in kommutativen Körpern nur höchstens n Nullstellen, und daher ist H sogar endlich, also zyklisch. Mit etwas mehr modell-theoretischer Maschinerie folgt sogar $H = 1$, also ist F^X divisibel. Falls $\mathfrak{F}$ Primzahl-Charakteristik p hat, dann gibt es für jedes $b \in F$ ein $a \in F$ mit $a^p - a = b$. Um schließlich die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathfrak{K}$ zu folgern, beweist Macintyre in [28] die folgenden algebraischen Aussagen, die für sich allein von Interesse sind:

(1) *Sei $\mathfrak{K}$ ein Körper der Charakteristik* 0. *Falls die multiplikative Gruppe einer jeden endlichen algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{K}$ divisibel ist, dann ist $\mathfrak{K}$ algebraisch abgeschlossen.*

(2) *Sei $\mathfrak{K}$ ein Körper der Primzahl-Charakteristik p. Falls für jede endliche*

Korollar 3.10 *Für jeden Ring* $R \neq 0$ *ohne nilpotente Elemente sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) R *ist super-stabil,*

(ii) R *ist* ω*-stabil,*

(iii) R *ist die direkte Summe von endlich vielen kommutativen Körpern, die entweder endlich oder algebraisch-abgeschlossen sind.*

Aus der Super-Stabilität (bzw. ω-Stabilität) eines Ringes $R \neq 0$ ohne nilpotente Elemente folgt also nicht nur die Kommutativität, sondern auch die Existenz eines Eins-Elementes.

Die endlichen oder algebraisch abgeschlossenen Körper lassen sich auch in der Klasse der Integritäts-Bereiche (= nullteiler-freie kommutative Ringe mit Eins) wie folgt charakterisieren:

Satz 3.11 *Für jeden Integritäts-Bereich* $\mathfrak{R} = \langle R, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) $\mathfrak{R}$ *ist ein endlicher oder algebraisch abgeschlossener Körper,*

(ii) $\mathfrak{R}$ *ist* $\aleph_1$*-kategorisch,*

(iii) $\mathfrak{R}$ *ist* ω*-stabil,*

(iv) $\mathfrak{R}$ *ist super-stabil,*

(v) $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ *erlaubt Quantoren-Elimination.*

Dabei wurde die Implikation (v) $\Rightarrow$ (i) von L. van den Dries [15] und B. Rose [36] bewiesen, (i) $\Rightarrow$ (v) gilt nach A. Tarski, (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt nach E. Steinitz und die übrigen Implikationen ergeben sich aus Cherlin-Shelah [14], Felgner [17] und Reineke [34].

In den bisher bekannten $\aleph_1$-kategorischen unendlichen Ringen R ist immer ein algebraisch abgeschlossener Körper involviert, der die Struktur von R mehr oder weniger bestimmt[3]). Im Falle $\aleph_0$-kategorischer Ringe ist die Situation gänzlich anders.

Satz 3.12 (A. Macintyre – J. R. Rosenstein [30]). *Sei* R *ein abzählbarer Ring mit Eins, der keine nilpotenten Elemente* $\neq 0$ *enthält. Dann sind äquivalent:*

(i) R *ist* $\aleph_0$*-kategorisch,*

(ii) R *ist die direkte Summe von endlich vielen Ringen der Form* $C(X, F; X_i, F_i, i < n)$, *wobei* X *ein Boolescher Raum ist,* F *ein endlicher Körper,* F_i *ein Unterkörper von* F *(für jedes* $i < n$*) und* X_i *eine abgeschlossene Teilmenge von* X, *so daß* $\langle B(X), \hat{X}_i, i < n \rangle$ $\aleph_0$*-kategorisch ist.*

Dabei ist $C(X, F; X_i, F_i, i < n)$ der Ring aller stetigen Funktionen f von X in den diskreten Raum F, so daß $f(X)_i \subseteq F_i$ für alle $i < n$ (wobei $n \in \mathbf{N}$). Dabei wird angenommen, daß die Zuordnung $X_i \to F_i$ ordnungserhaltend ist. B(X) ist die

---

[3]) B. I. Zilber und G. Cherlin haben kürzlich gezeigt, daß in jeder auflösbaren, nicht-nilpotenten ω-stabilen zusammenhängenden Gruppe von endlichem Morley-Rang ein algebraisch-abgeschlossener Körper interpretierbar ist.

Boolesche Algebra aller offen-abgeschlossenen (clopen) Teilmengen von X, und $\hat{X}_i = \{A \in B(X);\ A \cap X_i = 0\}$ ist ein Ideal in $B(X)$.

Die B e w e i s - I d e e : Sei R ein $\aleph_0$-kategorischer Ring. Wie im Falle abelscher Gruppen folgt zunächst, daß die additive Gruppe von R einen endlichen Exponent hat, $nx = 0$ für alle $x \in R$. Ganz analog ergibt sich aus dem Satz von Engeler, Ryll-Nardzewski, Svenonius für die multiplikative Halbgruppe von R, daß eine natürliche Zahl $N \neq 0$ existiert so, daß für jedes $x \in R$ entweder $x^{N+1} = x^N$ oder $x^{N+1} = x^{N-1}$ oder ... oder $x^{N+1} = x$. Daraus folgt, daß R ein sogenannter *PI-Ring* ist, denn das Polynom $\varphi(x) = \prod_{1 \leq i \leq N} (x^{N+1} - x^i) \in \mathbf{Z}[x]$ ist auf R identisch Null. Sei $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ die Primzahl-Zerlegung des Exponenten n von $\langle R, + \rangle$ und setze

$R_i = \{x \in R;\ p_i^{\alpha_i} x = 0\}$. Dann ist R_i ein Ideal von R, und R ist die direkte Summe der R_i. Da jedes R_i in R definierbar ist und da wir in Satz 2.1 eine syntaktische Charakterisierung von $\aleph_0$-Kategorizität haben, folgt, daß jeder Ring R_i $\aleph_0$-kategorisch ist. Wenn R keine nilpotenten Elemente hat, dann hat R_i die Charakteristik p_i und ist daher eine Algebra über dem Körper $GF(p_i)$ von p_i Elementen. Da R_i auch ein PI-Ring ist, ist R_i nach einem Satz von McCoy kommutativ. Nach einem Struktur-Satz von Arens-Kaplansky hat R_i die Form $C(X, F; X_i, F_i, i < m)$. Wir müssen hier darauf verzichten, die jetzt einsetzende komplizierte Analyse der Ringe $C(X, F; X_i, F_i, i < m)$ weiter zu verfolgen. Wir müssen aber noch erwähnen, daß Macintyre und Rosenstein in [30], Theorem 7, auch in der Lage sind, alle Strukturen der Form $\langle B(X), \hat{X}_i, i < m \rangle$, welche $\aleph_0$-kategorisch sind, zu klassifizieren.

Es stellt sich jetzt das Problem, die $\aleph_0$-kategorischen Ringe mit nilpotenten Elementen zu klassifizieren. Dieses Problem ist bisher ungelöst; über einige interessante Teilergebnisse kann jedoch berichtet werden. Ein Ring-Element a heißt *nilpotent*, falls $a^m = 0$ für einige $m \in \mathbf{N}$. Ein Ring R wird *Nil-Ring* genannt, falls alle Elemente von R nilpotent sind. Demgegenüber wird R *nilpotent* genannt, falls eine natürliche Zahl m existiert, so daß $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$ für alle $x_1, \ldots, x_m \in R$ gilt (also $R^m = 0$).

Satz 3.13 (i) (J. T. B a l d w i n – B. R o s e [4]) *Das Jacobson-Radikal* J(R) *eines $\aleph_0$-kategorischen Ringes* R *ist ein Nil-Ring.*

(ii) (G C h e r l i n [11]) *$\aleph_0$-kategorische Nil-Ringe sind nilpotent.*

Es war bereits in Felgner [17] gezeigt worden, daß das Jacobson-Radikal eines stabilen Ringes nilpotent ist. Daraus folgt dann leicht, daß ein *$\aleph_0$-kategorischer stabiler Ring fast-nilpotent ist* (d. h. J(R) ist nilpotent und R/J(R) ist endlich).

D) Nicht-kommutative Gruppen

Obwohl die Bestimmung a l l e r $\aleph_0$-kategorischen und aller $\aleph_1$-kategorischen a b e l s c h e n Gruppen noch relativ einfach war, treten im nicht-kommutativen Fall erhebliche Schwierigkeiten auf. Diese Schwierigkeiten treten vor allem bei der Behandlung nilpotenter Gruppen einerseits und einfacher Gruppen andererseits auf. Wenn wir jedoch Gruppen G betrachten, die sowohl $\aleph_0$-kategorisch als auch stabil sind, dann lassen sich in überzeugender Weise Modell-theoretische Techniken und Gruppen-theoretische Methoden verbinden, um zu Struktur-Aussagen zu kommen. $\aleph_0$-kategorische stabile Gruppen sind in vieler Hinsicht endlichen Gruppen ähnlich; in der Tat erfüllen diese Gruppen eine Reihe von sogenanngen *Endlichkeits-Bedingungen:*

Lemma 3.14 (i) *$\aleph_0$-kategorische Gruppen sind lokal-endlich in einem starken Sinne: Es gibt eine Funktion* $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *so, daß* n *Elemente eine Untergruppe von höchstens* $f(n)$ *Elementen erzeugen.*

(ii) *ω-stabile Gruppen erfüllen die Minimal-Bedingung für parametrisch definierbare Untergruppen.*

(iii) (U. Felgner [20]) *Für jede $\aleph_0$-kategorische stabile Gruppe* G *existiert eine Funktion* $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *so, daß jede Kette von* n*-definierbaren Untergruppen von* G *höchstens die Länge* $f(n)$ *hat.*

(iv) (J. T. Baldwin) *Stabile Gruppen* G *erfüllen die Minimal-Bedingung für Zentralisatoren in einem starken Sinne: Es gibt eine nur von* G *abhängige Zahl* $m \in \mathbf{N}$ *so, daß für alle* $X \subseteq G$ *eine höchstens* m*-elementige Teilmenge* $Y \subseteq X$ *mit* $C_G(X) = C_G(Y)$ *existiert.*

Gruppen mit der in (i) genannten Eigenschaft nennt man *uniform-lokal-endlich.* (i) folgt leicht aus Satz 2.1; (ii) wird beispielsweise in [19] bewiesen und Beweise für (iii) und (iv) sind in [20]. Eine parametrisch definierbare Teilmenge (cf. § 2) heißt n*-definierbar,* falls die definierende Formel nur höchstens n Parameter enthält.

Um die Aussage (iii) aus Lemma 3.14 ausnutzen zu können, muß man wissen, daß „viele" Untergruppen in $\aleph_0$-kategorischen stabilen Gruppen definierbar sind. Es wird in [19], [20] gezeigt, daß tatsächlich die „wichtigsten" Untergruppen definierbar sind, so beispielsweise jede endlich erzeugte Untergruppe, die Kommutator-Untergruppe, das Hirsch-Plotkin-Radikal und der maximale lokal-auflösbare Normalteiler. Besonders erwähnenswert ist dabei das folgende Resultat, das eine Brücke zwischen Algebra und Modell-Theorie herstellt.

Lemma 3.15 (U. Felgner [19], [20]) (i) *In einer abzählbaren uniform-lokal-endlichen Gruppe* G *sind die maximalen* p*-Untergruppen genau dann alle untereinander konjugiert, wenn sie alle definierbar sind.*

(ii) *In einer abzählbaren $\aleph_0$-kategorischen Gruppe ist eine Untergruppe genau dann charakteristisch, wenn sie 0-definierbar ist.*

Satz 3.16 (W. Baur – G. Cherlin – A. Macintyre [6], U. Felgner [20])

(i) *Einfache $\aleph_0$-kategorische stabile Gruppen sind endlich.*

(ii) *$\aleph_0$-kategorische stabile Gruppen sind fast-nilpotent (d. h., das Hirsch-Plotkin Radikal ist nilpotent und hat endlichen Index).*

Die Aussagen (i) und (ii) dieses Satzes werden simultan durch eine nicht leicht zu beschreibende Induktion bewiesen. Der in [20] gegebene Beweis orientiert sich in manchen Punkten an H. Fittings Programm der Klassifikation aller endlichen Gruppen. Die begrifflich wichtigsten Hilfsmittel sind demzufolge das Hirsch-Plotkin-Radikal $\rho(G)$ (die Fitting-Untergruppe im Falle endlicher Gruppen), das lokal-auflösbare Radikal $\sigma(G)$ und der Sockel $Soc(G/\sigma(G))$ von $G/\sigma(G)$. Damit der in der

Theorie der endlichen Gruppen so fundamentale Satz von Sylow auch in der hier vorliegenden Situation zur Verfügung steht, wird zunächst gezeigt, daß für jede Primzahl p jede maximale p-Untergruppe definierbar ist. Nach Lemma 3.15 folgt daraus die Konjugiertheit aller p-Sylow-Gruppen. Die Definierbarkeit impliziert auch, daß sich die $\aleph_0$-Kategorizität und Stabilität der ganzen Gruppe G auf alle p-Sylow-Untergruppen vererbt. Daraus folgt, daß diese nicht nur lokal-nilpotent, sondern sogar nilpotent sind. Auch $\rho(G)$ ist daher nilpotent. Da G uniform lokal endlich ist und Sylow-Untergruppen konjugiert sind, folgt nach B. Hartley die Endlichkeit von $\sigma(G)/\rho(G)$. Wie bei H. Fitting folgt, daß $\overline{G} = G/\sigma(G)$ bis auf Isomorphie in der Automorphismen-Gruppe des Sockels von $\overline{G}$ enthalten ist, $\overline{G} \underset{\sim}{\subseteq} \mathrm{Aut}(\mathrm{Soc}(\overline{G}))$. Um Satz 3.16 zu beweisen, muß man also noch zeigen, daß $\mathrm{Soc}(\overline{G})$ endlich ist. Hier ist im wesentlichen nur zu zeigen, daß die einfachen Gruppen, die in $\mathrm{Soc}(\overline{G})$ liegen, endlich sind. Gäbe es in $\mathrm{Soc}(\overline{G})$ eine unendliche einfache Gruppe H, dann darf man annehmen (dies wird durch Induktion bewiesen), daß alle lokalen Untergruppen von H fast-nilpotent sind. Als *lokale Untergruppe* wird hier in Anlehnung an Alperin jeder Normalisator $N_H(A)$ einer definierbaren nilpotenten Untergruppe A von H bezeichnet. Unter Verwendung von Lemma 3.14 (iii) und des Begriffs der *zusammenhängenden Untergruppe* läßt sich dann in H eine Familie $\mathscr{K}$ von abelschen Untergruppen konstruieren, deren Eigenschaften nach einem tiefliegenden Satz von Kegel-Wehrfritz die Isomorphie $H \cong PSL(2, K)$ nach sich ziehen. Weil K dabei ein unendlicher, lokal-endlicher Körper ist, haben wir den gesuchten Widerspruch gefunden: H hätte keinen endlichen Exponenten. Jetzt sind wir fertig, denn wenn $\mathrm{Soc}(G/\sigma(G))$ endlich ist, dann ist wegen $G/\sigma(G) \underset{\sim}{\subseteq} \mathrm{Aut}(\mathrm{Soc}(G/\sigma(G))$ und der Endlichkeit von $\sigma(G)/\rho(G)$ auch $G/\rho(G)$ endlich.

Wie nilpotente $\aleph_0$-kategorische stabile Gruppen aussehen, ist bisher unbekannt. Mit der stärkeren Voraussetzung der ω-Stabilität läßt sich jedoch einiges sagen:

Satz 3.17 (W. Baur, G. Cherlin, A. Macintyre [6]) *$\aleph_0$-kategorische ω-stabile Gruppen besitzen einen abelschen Normalteiler von endlichem Index (dieser ist definierbar).*

Satz 3.18 (W. Baur, G. Cherlin, A. Macintyre [6]) *Die folgenden Eigenschaften einer Gruppe* G *sind äquivalent:*

(i) G *ist zugleich $\aleph_0$-kategorisch und $\aleph_1$-kategorisch,*

(ii) *Es gibt endliche Untergruppen* F *und* H *so, daß* $C_G(F)$ *ein abelscher Normalteiler von* G *ist,* $G = H \cdot C_G(F)$, *und* $C_G(F)$ *ist die direkte Summe von zwei Normalteilern* M *und* B, *wo* B *endlich ist und* M *die direkte Summe paarweise isomorpher endlicher direkt unzerlegbarer* H-*Moduln.*

Eine Klassifikation aller Gruppen, die lediglich $\aleph_0$-kategorisch sind, ist bisher unbekannt und ist wohl auch in den nächsten Jahren nicht zu erwarten. In der Tat treten hier vor allem bei der Behandlung nilpotenter Gruppen einerseits und unendlicher einfacher Gruppen andererseits erhebliche kombinatorische Probleme auf. $\aleph_0$-kategorische einfache Gruppen sind vermutlich endlich. Die Existenz einer unendlichen $\aleph_0$-kategorischen einfachen Gruppe würde jedenfalls die Existenz unendlich vieler bis heute unbekannter endlicher einfacher Gruppen nach sich ziehen (cf. [19], § 6). Eine Reihe singulärer Ergebnisse über $\aleph_0$-kategorische Gruppen teilen wir noch mit:

Satz 3.19 (i) (J. Wilson) *$\aleph_0$-kategorische einfache Gruppen sind absolut-einfach.*

(ii) (J.G. Rosenstein [38]) *Jede Gruppe* G, *welche einen abelschen Normalteiler* A *mit endlichem quadratfreien Exponent enthält so, daß* G/A *zyklisch von Primzahl-Ordnung ist, ist $\aleph_0$-kategorisch.*

(iii) (U. Felgner) *$\aleph_0$-kategorische* CA-*Gruppen* G *sind fast-nilpotent; das Hirsch-Plotkin-Radikal* ρ(G) *ist eine* 2-*stufig auflösbare nilpotente Gruppe der Form* $A \oplus B$ *mit* A *abelsch und* B *eine* p-*Gruppe.*

Dabei heißt G eine CA-*Gruppe,* falls für alle $g \notin Z(G)$, $C_G(g)$ abelsch ist. *Absolut-einfache* Gruppen sind in Kegel-Wehrfritz ([23], p. 5) definiert. $\aleph_0$-kategorische Gruppen mit abelschen Normalteilern von endlichem Index werden in Rosenstein [38] und Cherlin-Rosenstein [13] diskutiert. Derartige Gruppen sind stets stabil. $\aleph_0$-kategorische Gruppen haben jedoch nicht notwendig einen abelschen Normalteiler von endlichem Index. In der Tat ist jede unendliche *extraspezielle* p-*Gruppe* G $\aleph_0$-kategorisch und besitzt keinen abelschen Normalteiler von endlichem Index.

§ 4 Epilog

Nachdem wir in den §§ 1 und 2 die logische Analyse des Kategorizitäts-Begriffes dargestellt haben und in § 3 konkrete algebraische Theorien auf Kategorizität hin untersucht haben, so wollen wir jetzt noch kurz auf die weitergehende Bedeutung des Kategorizitäts-Begriffes eingehen.

Wir beginnen mit der folgenden einfachen, aber nützlichen Bemerkung, daß die Vollständigkeit eines Axiomen-Systems häufig sehr elegant dadurch bewiesen werden kann, daß man die Kategorizität feststellt:

Lemma 4.1 (J. Los, R.L. Vaught) *Jede Theorie* 1. *Stufe, welche keine endlichen Modelle hat und in einer unendlichen Kardinalzahl kategorisch ist, ist vollständig.*

Daß ein Zusammenhang zwischen Entscheidbarkeit, Quantoren-Elimination und Kategorizität von Theorien besteht, kann aufgrund der bisher bekannten Beispiele und Resultate vermutet werden. A. Grzegorczyk [21] hatte 1970 vermutet, daß jede $\aleph_0$-kategorische Theorie T, die in einer Sprache mit nur endlich vielen außer-logischen Zeichen formuliert ist, entscheidbar sei. Diese Vermutung wurde 1971 von C. J. Ash, A. Ehrenfeucht, W. Glassmire und C. W. Henson widerlegt: *Für jeden Turing-Grad* d *gibt es eine $\aleph_0$-kategorische Theorie, die in einer Sprache* 1. *Stufe mit nur einem zweistelligen Relations-Zeichen formuliert ist, welche den Unlösbarkeits-Grad* d *hat.* Die folgende Vermutung von J. H. Schmerl [41] (1977) ist aber bisher unentscheiden: *Endlich axiomatisierbare $\aleph_0$-kategorische Theorien sind voll entscheidbar?*

Über die Bedeutung der $\aleph_0$-Kategorizität bei Fragen über Quantoren-Elimination gibt das folgende Lemma etwas Auskunft (cf. Schmerl [41]):

Lemma 4.2 *Äquivalent sind für jede Struktur* $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$:

(i) $\mathfrak{A}$ *ist uniform-lokal-endlich und* Th($\mathfrak{A}$) *läßt Quantoren-Elimination zu.*

(ii) $\mathfrak{A}$ *ist* $\aleph_0$*-kategorisch und* Th($\mathfrak{A}$) *läßt Quantoren-Elimination zu.*

Insbesondere ist jede Relational-Struktur, deren Theorie Quantoren-Elimination zuläßt, $\aleph_0$-kategorisch.

Die Begriffe der *Stabilität, Super-Stabilität* und *ω-Stabilität,* die bei der Erforschung des Kategorizitäts-Begriffes aufgetreten sind, spielen in der Modell-Theorie eine ganz zentrale Rolle; sie sind bedeutungsvoller als der Kategorizitäts-Begriff selbst. Mit diesen Begriffen wird die Gesamtheit aller vollständigen Theorien in vier Klassen eingeteilt, die ω-stabilen, die super-stabilen, die stabilen und die unstabilen Theorien (cf. Satz 2.3). Für stabile Theorien hat S. Shelah in [46] eine Theorie des *forking* (Abweichens) eingeführt (vgl. auch Shelah [44] und die elegante Formulierung von B. Poizat [53] und B. Poizat – D. Lascar [54]). Eine Reihe von Sätzen geben über die Eigenschaften der Theorien aus diesen vier Klassen Auskunft. Wir erwähnen zwei Beispiele:

Satz 4.3 (S. Shelah) *Jede vollständige Theorie 1. Stufe, die nicht super-stabil ist, hat in jeder überabzählbaren Mächtigkeit* λ *genau* 2^λ *paarweise nicht isomorphe Modelle.*

Wir illustrieren diesen Satz mit den folgenden Anwendungen:

(1) (A. Macintyre – S. Shelah) *In jeder überabzählbaren Mächtigkeit* λ *gibt es* 2^λ *paarweise nicht isomorphe separabel-abgeschlossene Körper.* In der Tat sind separabel-abgeschlossene, nicht algebraisch-abgeschlossene Körper stabil, aber nicht super-stabil (cf. [44], p. 71).

(2) (U. Felgner) *In jeder überabzählbaren Mächtigkeit* λ *gibt es für jede Primzahl* $p \neq 2$ *genau* 2^λ *paarweise nicht-isomorphe extra-spezielle* p*-Gruppen vom Exponent* p. *Bis auf Isomorphie gibt es aber nur genau eine abzählbar unendliche extraspezielle* p*-Gruppe vom Exponenten* p (cf. [18]).

Satz 4.4 (S. Shelah [43]) *Sei* T *eine vollständige ω-stabile Theorie, die in einer abzählbaren Sprache* $\mathcal{L}$ *1. Stufe formuliert ist. Dann besitzt jede* $\mathcal{L}$*-Struktur* $\mathfrak{A}$, *welche überhaupt in ein* T*-Modell einbettbar ist, bis auf* $\mathfrak{A}$*-Isomorphie in der Klasse aller* T*-Modelle genau eine Prim-Erweiterung.*

Dieser Satz verallgemeinert die bekannte Tatsache (E. Steinitz 1910), daß jeder Körper $\mathfrak{K}$ bis auf $\mathfrak{K}$-Isomorphie genau einen algebraischen Abschluß besitzt (die Theorie der algebraisch-abgeschlossenen Körper fester Charakteristik ist vollständig nach Lemma 4.1 und ω-stabil nach Satz 3.6). Satz 4.4 führte aber auch zu neuen Ergebnissen. So hat beispielsweise L. Blum zeigen können, daß die Theorie der differentiell abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 ω-stabil ist, woraus nach Satz 4.4 folgt, daß jeder Differential-Körper der Charakteristik 0 einen eindeutig bestimmten differentiellen Abschluß besitzt (cf. G. Sacks [40] § 41).

A. Lachlan vermutet, daß jede $\aleph_0$-kategorische stabile Theorie ω-stabil ist.

Eine weitere Bedeutung der Begriffe der Kategorizität und Stabilität vor allem in der Ring-Theorie und der Gruppen-Theorie liegt darin, daß diese Begriffe äußerst interessante *Ketten-Bedingungen* und *Endlichkeits-Bedingungen* beinhalten.

Wir hatten dies schon in § 3 angedeutet. Was das Leben mit unendlichen Gruppen, Ringen, etc. im allgemeinen schwer macht, ist bekanntlich das Fehlen der Möglichkeit, Beweise durch Induktion über die Kardinalität zu führen. Es ist hier zu erwähnen, daß neben den Ketten-Bedingungen auch *Rang-Begriffe* vorliegen, welche induktiv geführte Beweise ermöglichen.

Satz 4.5 (i) (M. Morley) *Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist genau dann ω-stabil, wenn der Morley-Rang auf $\mathfrak{A}$ total definiert ist (d. h., wenn alle definierbaren Teilmengen von $\mathfrak{A}$ einen Morley-Rang haben).*

(ii) (S. Shelah) *Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist genau dann super-stabil, wenn der Shelah-Grad auf $\mathfrak{A}$ total definiert ist.*

J. T. Baldwin bewies, daß $\aleph_1$-kategorische Theorien einen endlichen Morley-Rang besitzen. J. Reineke [35] bewies, daß Gruppen vom Morley-Rang 1 und Shelah-Grad 1 abelsch sind. Gruppen vom Morley-Rang $\leqslant 3$ hat G. Cherlin [10] untersucht.

Es darf angenommen werden, daß, über reine Kategorizitäts-Untersuchungen hinausgehend, das geschilderte Instrumentarium in den kommenden Jahren noch viele weitere Einsichten ermöglichen wird, die sowohl unter modell-theoretischen als auch unter algebraischen Gesichtspunkten bedeutungsvoll sind.

Literatur

[1] Ax, J.: Solving diophantine problems modulo every prime. Ann. of Math. **85** (1967) 161–183

[2] Baer, R.: Die Torsionsuntergruppe einer Abelschen Gruppe. Math. Ann. **135** (1958) 219–234

[3] Baldwin, J. T., Lachlan, A. H.: On strongly minimal sets. J. of Symbolic Logic **36** (1971) 79–96

[4] Baldwin, J. T., Rose, B.: $\aleph_0$-Categoricity and Stability of Rings. J. of Algebra **45** (1977) 1–16

[5] Baldwin, J. T., Saxl, J.: Logical Stability in Group Theory. J. Austral. Math. Soc. (A) **21** (1976) 267–276

[6] Baur, W., Cherlin, G., Macintyre, A.: Totally Categorical Groups and Rings. J. of Algebra **57** (1979) 407–440

[7] Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen (E. Zermelo, Hrsg.) Berlin 1932. Nachdruck: Hildesheim: G. Olms 1962

[8] Chang, C. C.; Keisler, H. J.: Model Theory. Amsterdam–London: North-Holland 1973

[9] Cherlin, G.: Super stable division rings. In: Logic Colloquium '77 (A. Macintyre, L. Pacholski, J. Paris, Eds.). Amsterdam: North-Holland 1978, pp. 99–111

[10] Cherlin, G.: Groups of Small Morley Rank. To appear in Ann. of Math. Logic

[11] Cherlin, G.: On $\aleph_0$-categorical Nilrings, Part II. To appear in J. of Symbolic Logic

[12] Cherlin, G.; Reineke, J.: Categoricity and Stability of commutative rings. Ann. of Math. Logic **10** (1976) 367–399

[13] Cherlin, G.; Rosenstein, J. G.: On $\aleph_0$-categorical Abelian-by-Finite Groups. J. of Algebra **53** (1978) 188–226

[14] Cherlin, G.; Shelah, S.: Super-Stable Fields. To appear

[15] Van den Dries, L.: Model Theory of Fields. Diss. Utrecht 1978

[16] Engeler, E.: A characterization of theories with isomorphic denumerable models. Not. of the Amer. Math. Soc. **6** (1959) 161

[17] Felgner, U.: $\aleph_1$-Kategorische Theorien nicht-kommutativer Ringe. Fund. Math. **82** (1975) 331–346

[18] Felgner, U.: On $\aleph_0$-categorical extra-special p-Groups. In: Six days of Model Theory, Proceedings conference Louvain-la-Neuve 1975 (P. Henrard, Ed.) Albeuve: Editions Castella 1977, pp. 175–196

[19] Felgner, U.: Stability and $\aleph_0$-Categoricity of Nonabelian Groups. In: Logic Colloquium '76 (R. O. Gandy, M. Hyland, Eds.). Amsterdam: North-Holland 1977, pp. 301–324

[20] Felgner, U.: $\aleph_0$-Categorical Stable Groups. Math. Z. **160** (1978) 27–49

[21] Grzegorczyk, A.: Decision Procedures for Theories categorical in Aleph$_0$. In: Symposium on Automatic Demonstration, Versailles 1968. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970. = Lecture Notes in Math., vol. 125, pp. 87–100

[22] Huntington, E. V.: A complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude. Trans. of the Amer. Math. Soc. **3** (1902) 264–279

[23] Kegel, O. H.; Wehrfritz, B. A. F.: Locally Finite Groups. Amsterdam: North-Holland 1973

[24] Keisler, H. J.: Some Model Theoretic Results For ω-Logic. Israel J. of Math. **4** (1966) 249–261

[25] Lachlan, A. H.: Theories with a finite number of models in an uncountable power are categorical. Pac. J. Math. **61** (1975) 465–481

[26] Łoś, J.: On the Categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems. Colloq. Math. **3** (1955) 58–62

[27] Macintyre, A.: On ω_1-categorical theories of abelian groups. Fund. Math. **70** (1971) 253–270

[28] Macintyre, A.: On ω_1-categorical theories of fields. Fund. Math. **71** (1971) 1–25

[29] Macintyre, A.; McKenna, K.; van den Dries, L.: Quantifier Elimination in algebraic structures. To appear.

[30] Macintyre, A.; Rosenstein, J. G.: $\aleph_0$-Categoricity for Rings without nilpotent elements and for Boolean Structures. J. of Algebra **43** (1976) 129–154

[31] Morley, M.: Categoricity in Power. Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965) 514–538

[32] Neumann, P.; Newman, M. F.: Schreier-Varieties of Groups. Math. **98** (1967) 196–199

[33] Peano, G.: Sul concetto di numero. Rivist. di Mat. **1** (1891) 87–102. (Nachdruck in

[34] Reineke, J.: Über ω_1-Kategorizität von kommutativen Ringen mit Eins-Element. Diss. Hannover 1973

[35] Reineke, J.: Minimale Gruppen. Z. f. Math. Logik u. Grundlagen d. Math. **21** (1975) 357–359

[36] Rose, B.: Rings which admit Elimination of Quantifiers. J. of Symbolic Logic **43** (1978) 92–112. Corrigendum **44** (1978)

[37] Rosenstein, J. G.: $\aleph_0$-Categoricity of linear orderings. Fund. Math. **64** (1969) 1–5

[38] Rosenstein, J. G.: $\aleph_0$-Categoricity of Groups. J. of Algebra **25** (1973) 435–467. Corrections. J. of Algebra **48** (1977) 236–240

[39] Ryll-Nardzewski, C.: On the categoricity in power $\leqslant \aleph_0$. Bull. Acad. Polon. Sci. (Ser. Sci. math., astr. et phys.) **7** (1959) 545–548

[40] Sacks, G. E.: Saturated Model Theory. Reading, Mass.: W. A. Benjamin, 1972

[41] Schmerl, J. H.: Decidability and $\aleph_0$-Categoricity of Theories of partially ordered sets. To appear.

[42] Shelah, S.: Stability, the f.c.p., and superstability; model theoretic properties of formulas in first order theory. Ann. of Math. Logic. **3** (1971) 271–362

[43] Shelah, S.: Uniqueness and Characterization of Prime Models over sets for totally transcendental first-order theories. J. of Symbolic Logic **37** (1972) 107–113

[44] Shelah, S.: The lazy model-theoreticians guide to stability. In: Six Days of Model Theory, Proceedings of a conference at Louvain-la-Neuve 1975 (P. Henrard, Ed.). Albeuve: Editions Castella, 1977, 9–76

[45] Shelah, S.: Stable theories. Israel J. of Math. **7** (1969) 187–202

[49] Vaught, R. L.: Denumerable models of complete theories. In: Infinitistic Methods, Proceedings Symposium Warsaw 1959. London: Pergamon 1961, 303–321
[50] Veblen, O.: A System of Axioms for geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **5** (1904) 343–384
[51] Winter, D.: The Structure of Fields. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1974
[52] Zilber, B. I.: Rings with $\aleph_1$-categorical theories. Algebra and Logic **13** (1975) 95–104
[53] Poizat, B.: Déviation des types. Thèse de Doctorat, Paris, Univ. 6 (1977)
[54] Lascar, D.; Poizat, B.: An Introduction to forking. J. of Symbolic Logic **44** (1979) 330–350

Prof. Dr. U. Felgner
Mathematisches Institut
der Universität
Auf der Morgenstelle 10
7400 Tübingen

(Eingegangen: 31. 7. 1979)

[redacted]

82 (1980) 33–50

Ordnungsstrukturen in der Operatorentheorie*)

H. H. Schaefer, Tübingen

Inhaltsübersicht

Einleitung

Als an mich die Einladung erging, vor dem Auditorium einer Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über mein Arbeitsgebiet zu berichten, dachte ich zunächst an ein Thema wie „Ordnungsstrukturen in der Funktionalanalysis“. Tatsächlich bin ich im Laufe der letzten 25 Jahre in mehr oder weniger enge Berührung mit fast allen Teilgebieten der Funktionalanalysis gekommen, in denen Ordnungsstrukturen eine wesentliche Rolle spielen – eingeschlossen Teile der nichtlinearen Theorie. Jedoch zeigte schon der Versuch einer ersten Übersicht, daß ein solches Vorhaben den gesetzten und angemessenen Rahmen völlig gesprengt hätte. So habe ich mich für „Ordnungsstrukturen in der Operatorentheorie“ entschieden.

Auch in diesem engeren Bereich mußte eine Auswahl getroffen werden (s. Inhaltsübersicht). Der im 1. Abschnitt diskutierte Zusammenhang ordnungsbeschränkter Operatoren mit der Theorie der Operatorenideale, vor allem den

---

*) Hauptvortrag auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Hamburg 1979.

Grothendieckschen integralen Abbildungen, ist für den Anschluß der Ordnungstheorie an die allgemeine Operatorentheorie fundamental. Die Spektraltheorie positiver linearer Operatoren auf Banachverbänden (2. Abschnitt), eine – wie mir scheint, schöne – Theorie mit vielfältigen Anwendungen, habe ich auch deshalb ausgewählt, weil ihre Hauptresultate und Methoden für die Theorie der Erzeugenden positiver Halbgruppen (3. Abschnitt) mutatis mutandis gültig bleiben. Dies ist um so erstaunlicher, als diese Erzeugenden (im allgemeinen unbeschränkt und in den Anwendungen meist Differentialoperatoren) auf den ersten Blick mit positiven Operatoren nichts gemein haben. Während über den Gegenstand der ersten beiden Abschnitte samt zugehörigen Anwendungen die Monographie [38] des Verfassers ausführlich Auskunft gibt, sind die Resultate des 3. Abschnitts noch durchweg unveröffentlicht. Es sei deshalb hier noch ein Wort über positive Halbgruppen angefügt.

Die Häufigkeit einparametriger Halbgruppen in verschiedenen Gebieten der Analysis und ihre Bedeutung für die Anwendungen sind wohlbekannt. Viele dieser Halbgruppen sind Halbgruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden; indessen bemerkt schon E. Hille in seiner grundlegenden Monographie [6]: „The task of developing an adequate theory of transformation semi-groups operating in partially ordered spaces is left to more competent hands“ (l. c., Foreword). Rückschauend erkennt man nun, daß die in der Theorie positiver Operatoren auf Banachverbänden langjährig entwickelten Methoden und Techniken für ein fruchtbares Studium positiver Operatorenhalbgruppen unerläßliche Voraussetzung sind. Vor diesem Hintergrund ist eine Bemerkung S. Karlins [9], daß sich viele Aussagen über zyklische Halbgruppen $(T^n)_{n \in \mathbf{N}}$ positiver Operatoren auf kontinuierliche übertragen ließen, nur von heuristischem Wert; auch sind die diesbezüglichen Resultate von [9] teilweise lücken- oder fehlerhaft.

Der vorliegende Bericht muß, schon aus Raumgründen, auf Beweise oder Beweisskizzen verzichten; auch soll der interessierte Leser zunächst einen Eindruck von den gewonnenen Ergebnissen erhalten, ohne mit den häufig sehr technischen Beweisen belastet zu werden. Für die der Theorie positiver Operatoren auf Banachverbänden eigenen Techniken sowie für Anwendungen auf Ergodentheorie, Approximationstheorie, normierte Tensorprodukte, Kernoperatoren und anderes sei erneut auf [38] verwiesen. Darüber hinaus muß der große Kreis von Ergebnissen unerwähnt bleiben, die positive Operatoren auf geordneten Banachräumen betreffen, welche keine Banachverbände sind; hierzu gehören nichtkommutative C*-Algebren (vgl. [5] und die dort angegebene Literatur).

1 Operatorenideale

Im folgenden wird unter einem *Operator* stets eine beschränkte lineare Abbildung zwischen Banachräumen verstanden. Ein (Links-, Rechts-, zweiseitiges) *Operatorenideal* ist eine Klasse von Operatoren, die bezüglich der (Links-, Rechts-, zweiseitigen) Komposition mit beliebigen Operatoren invariant ist; in dem speziellen Fall, wo alle betrachteten Definitions- und Bildräume mit einem festen Banachraum E identisch sind, handelt es sich um gewöhnliche Ideale der Operatorenalgebra

[illegible]

1.1 Hilfsbegriffe

Die geläufigsten Banachverbände der Analysis sind die Räume $L^p(X, \Sigma, \mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, wobei unter (X, Σ, μ) ein σ-endlicher oder wenigstens lokalisierbarer Maßraum im Sinne von [38] verstanden werden soll; hierzu gesellen sich noch $C(K)$ (stetige Funktionen auf einem kompakten Raum K) sowie dessen Dualraum $M(K)$ (Radonsche Maße auf K). Abstrakt versteht man unter einem *Banachverband* E einen Banachraum, der gleichzeitig Vektorverband ist und in dem die „Betragsfunktion" $x \to |x|$ mit der Norm durch die Forderung „$|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$" verknüpft ist. In diesem Abschnitt genügt es, reelle Skalare zu betrachten.

Abstrakt sind die Räume $E = C(K)$ dadurch charakterisiert, daß ihre abgeschlossene Einheitskugel U von der Gestalt $\{z\colon |z| \leqslant e\}$ ist; das durch $e = \sup U$ eindeutig bestimmte Element heißt *(Ordnungs-)Einheit* von E, und E selbst ein AM-*Raum mit Einheit* (Kakutani-Krein 1940/41). Die Räume $L^1(\mu)$ sind als Banachverbände durch die Forderung „$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \Rightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$" vollständig charakterisiert (AL-*Räume*, Kakutani 1941); etwas allgemeiner lassen sich die Banachverbände $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ durch die Implikation „$x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x+y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$" bis auf isometrische Isomorphie beschreiben. Ein Banachverband E heißt *ordnungsvollständig (o-vollständig oder Dede-*

gegeben ist; die Operatornorm von $|T|$ definiert nun eine neue (größere) Norm $\|T\|_r$, bezüglich deren die ordnungsbeschränkten Operatoren $E \to F$ einen o-vollständigen Banachverband $\mathscr{L}^r(E, F)$ bilden. Der angedeutete Ausnahmefall (jeder Operator $E \to F$ ist ordnungsbeschränkt) wird nun durch folgenden Satz beschrieben (vgl. [38], IV.1.5 und IV.1.8):

Satz 1.A *Seien* E, F *Banachverbände,* F *genüge* (P). *Ist* E *ein* AL-*Raum oder* F *ein* AM-*Raum, so gilt* $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}^r(E, F)$ *mit Identität der Normen. Der Raum der kompakten Operatoren* $E \to F$ *bildet jeweils einen abgeschlossenen Unterverband.*

Die Bedeutung dieses Satzes liegt wesentlich darin, daß er optimal ist; in der Tat lassen sich AL-Räume E und o-vollständige AM-Räume (mit Einheit) F durch die Aussage von Satz 1.A charakterisieren [14], [18].

Andererseits sind Operatoren endlichen Ranges $E \to F$ stets ordnungsbeschränkt, aber schon im Falle $E = F = \ell^2$ gibt es kompakte Operatoren, die diese Eigenschaft nicht mehr besitzen (für ein illustratives Beispiel vgl. [38], p. 231). Es stellt sich also die Aufgabe, gewissermaßen den Minimalumfang von $\mathscr{L}^r(E, F)$ in $\mathscr{L}(E, F)$ zu klären; auf welche Weise dies geschehen kann, ist Gegenstand des nächsten Unterabschnitts.

1.3 Kegelabsolutsummierende und majorisierende Operatoren

Wir erinnern an zwei klassische Begriffe: Eine Folge (x_n) in einem Banachraum E heißt *summierbar,* falls die Familie der (endlichen) Summen $x_\sigma = \sum_{n \in \sigma} x_n$ längs des durch Inklusion gerichteten Systems aller endlichen Teilmengen $\sigma \subset \mathbf{N}$ konvergiert (man sagt auch, die Reihe $\Sigma_n x_n$ sei *unbedingt konvergent* in E); (x_n) heißt *absolut summierbar,* falls $\Sigma_n \|x_n\|$ konvergiert. So ist eine orthogonale Folge (x_n) eines Hilbertraumes summierbar, genau wenn $\Sigma_n \|x_n\|^2$ konvergiert; daraus erhellt, daß es in jedem unendlichdimensionalen Hilbertraum summierbare Folgen gibt, die nicht absolut summierbar sind, und allgemeiner trifft dies für jeden unendlichdimensionalen Banachraum zu (Theorem von Dvoretzky-Rogers, vgl. [11], p. 16).

U. Schlotterbeck [41] konnte nun zeigen, daß die AL-Räume (also nach dem Kakutanischen Satz die Räume $L^1(\mu)$) unter den Banachverbänden bis auf Normäquivalenz schon dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen jede positive summierbare Folge absolutsummierbar ist. Als duales Resultat ergibt sich eine Charakterisierung der AM-Räume (nicht notwendig mit Einheit) unter den Banachverbänden durch die Eigenschaft, daß in ihnen jede Nullfolge ordnungsbeschränkt ist. Diese neuartige Charakterisierung der AL- und AM-Räume ermöglichte es ihm, interessante (und in gewissem Sinne maximale) Ideale ordnungsbeschränkter Operatoren zu entdecken (s. auch [38]).

Die genannte Charakterisierung der AL-Räume E läßt sich wegen Satz 1.A nämlich auch dadurch ausdrücken, daß jeder Operator $T: E \to E$ positive summierbare Folgen in absolut summierbare transformiert: T ist *kegelabsolutsummierend* (k.a.s.). Macht man dies nun zur definierenden Eigenschaft einer Operatorenklasse zwischen beliebigen Banachverbänden E, F, so erhält man offenbar ein Operatorenlinksideal. Die Operatoren dieses Ideals lassen sich durch Faktorisierungseigenschaften charakterisieren: $T: E \to F$ ist k.a.s., genau wenn T eine Zerlegung $T = T_2 \circ T_1 : E \to L \to F$ gestattet, wo L ein geeigneter AL-Raum und $T_1 \geqslant 0$ sind. Besitzt F die Eigenschaft (P), so ist der Raum $\mathscr{L}^1(E, F)$ aller k.a.s. Operatoren $T: E \to F$, versehen mit einer geeigneten Norm[1]) und der natürlichen Ordnung der Operatoren, ein o-vollständiger Banachverband. Für einen AL-Raum E ist nun in der Tat $\mathscr{L}^1(E, F) = \mathscr{L}^r(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$, während man für Banachverbände E, F vom Typ $L^2(\mu)$ gerade die Hilbert-Schmidt-Operatoren mit der zugehörigen Norm erhält.

Der andere Teil der Aussage von Satz 1.A wird durch einen dualen Ansatz ausgeschöpft: Seien wieder E, F Banachverbände. Diejenigen Operatoren $T: E \to F$, welche jede Nullfolge auf eine ordnungsbeschränkte (d. h. absolut majorisierte) Nullfolge abbilden, heißen *majorisierend*; sie sind durch Zerlegungen $T = T_2 \circ T_1$ gekennzeichnet: $E \to M \to F$, wo jetzt M ein geeigneter AM-Raum und $T_2 \geqslant 0$ sind. Man erhält so ein Operatorenrechtsideal; bei festen E, F (F mit Eigenschaft (P)) bilden die majorisierenden Operatoren, mit einer geeigneten Norm[1]) versehen, wieder einen o-vollständigen Banachverband $\mathscr{L}^m(E, F)$. Für einen AM-Raum F mit Eigenschaft (P) (oder gleichwertig: für $F = C(K)$, K Stonesch) ergibt sich analog zum Obigen $\mathscr{L}^m(E, F) = \mathscr{L}^r(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$ bei beliebigem E; für E, F vom Typ $L^2(\mu)$ ergeben sich erneut die Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Verschiedenartige Charakterisierungen der k.a.s. und der majorisierenden Operatoren finden sich bereits in [41] (vgl. [38], IV.3); insbesondere sind diese Klassen bezüglich der Adjungiertenbildung zueinander dual. Ihre Hauptbedeutung für die allgemeine Operatorentheorie liegt jedoch in der engen Beziehung zu den integralen Operatoren, die seit Grothendiecks Memoire [7] eine wichtige Rolle spielen.

1.4 Integrale Operatoren

Die Bedeutung der von Grothendieck [7] eingeführten integralen Operatoren beruht auf deren Zusammenhang mit der Theorie topologischer Tensorprodukte, der nuklearen Abbildungen und Räume, sowie allgemein dem Umstand, daß ihre Definition und Eigenschaften sie maßtheoretischen Methoden zugänglich machen. (Eine knappe, unabhängig lesbare Einführung in die Theorie der integralen Operatoren findet sich in [38], Kap. IV.) Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die integralen Operatoren Grothendiecks mit den durch meßbare Kerne definierten sog. *Kernoperatoren* zwischen Funktionenräumen (etwa den „Integraloperatoren“ im Sinne von Jörgens [8]) nur sehr mittelbar zu tun haben und nicht mit diesen verwechselt werden dürfen.

Vielmehr enthält die Definition Grothendiecks keinerlei ordnungstheoretischen Ansatz. Eine äquivalente, für unsere Zwecke bequemere Definition ist diese: Seien G, H Banachräume, $q: H \to H''$ die Auswertungsabbildung. Ein Operator $T: G \to H$ heißt *integral*, wenn $q \circ T$ eine Faktorisierung

$$G \to L^\infty(\mu) \xrightarrow{i} L^1(\mu) \to H''$$

---

[1]) Das Infimum von $\|T_2\| \, \|T_1\|$ über alle Zerlegungen der genannten Art.

gestattet, wo μ ein endliches Maß und i die kanonische Einbettung bezeichnen. (Ist $q(H)$ Wertebereich einer kontraktiven Projektion von H'', so können in dieser Definition $q \circ T$ durch T und H'' durch H ersetzt werden.) Mit einer geeigneten Norm ist der Raum der integralen Operatoren $G \to H$ ein Banachraum $\mathscr{L}^i(G, H)$. Die Einbettung $L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)$ (μ endlich) ist also der Prototyp aller integralen Operatoren. In der Tat sind unter den Operatoren $L^\infty(\mu) \to L^1(\nu)$ (jetzt brauchen μ, ν nicht mehr endlich zu sein) genau die ordnungsbeschränkten integral, und in der obigen Definition kann i durch einen beliebigen ordnungsbeschränkten Operator ersetzt werden; es gilt $\mathscr{L}^i(L^\infty, L^1) = \mathscr{L}^r(L^\infty, L^1)$ mit Identität der Normen.

Im Falle allgemeiner Banachverbände E, F wird der Zusammenhang zwischen ordnungsbeschränkten und integralen Operatoren durch ein Theorem gegeben, das ebenfalls auf [41] zurückgeht und das sich folgende Konstruktionen zunutze macht. Das von einem beliebigen $x \in E$, $x \geqslant 0$, erzeugte Verbandshauptideal $E_x = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} n[-x, x]$, mit dem Ordnungsintervall $[-x, x]$ als abgeschlossener Einheitskugel, ist nach Kakutani-Krein ein AM-Raum mit Einheit x; ist andererseits $y' \in F'$, $y' \geqslant 0$, so definiert $p(y) = \langle |y|, y' \rangle$ eine Halbnorm auf F, für welche der assoziierte, komplettierte Hausdorffraum (F, y') ein AL-Raum wird. Für jeden Operator $T: E \to F$ kann man nun bei beliebigen $x \geqslant 0$, $y' \geqslant 0$ die drei Kompositionen $T_x: E_x \to E \to F$, $T_{y'}: E \to F \to (F, y')$ und $T_{x,y'}: E_x \to E \to F \to (F, y')$ bilden; hierbei bezeichnen $E_x \to E$ und $F \to (F, y')$ die natürlichen Verbandshomomorphismen. (Es sei angemerkt, daß man jeden Banachverband E als Vereinigung

Hierbei sind die übereinanderstehenden Begriffe hinsichtlich der Adjungiertenbildung zueinander dual.

Die oben erwähnten Kernoperatoren (vgl. [38], IV.9) lassen sich für $E = L^p(\mu)$, $F = L^q(\nu)$ $(1 \leqslant p, q \leqslant +\infty)$ durch die Eigenschaft kennzeichnen, dem von $E'_{os} \times F$ in $\mathscr{L}^r(E, F)$ erzeugten Band (=supremumsabgeschlossenem Verbandsideal) anzugehören. (E'_{os} bezeichnet das Band der ordnungsstetigen Linearformen.) Für allgemeine Banachverbände E, F (F o-vollständig) bezeichnet man daher die diesem Band zugehörigen Operatoren als (abstrakte) *Kernoperatoren*; sie lassen sich durch folgendes Theorem [19] charakterisieren, das wegen Theorem 1.B ihre Beziehung zu beliebigen ordnungsbeschränkten Operatoren deutlich macht.

Theorem 1.C *Es seien* E, F *Banachverbände*; F *sei* o-*vollständig und werde von seinen ordnungsstetigen Linearformen separiert. Ein Operator* $T \in \mathscr{L}^r(E, F)$ *ist Kernoperator, genau wenn* T *ordnungsstetig und sämtliche Bikompositionen* $T_{x,y'}$ $(x \geqslant 0,\ y' \geqslant 0$ *ordnungsstetig*) *nuklear sind.*

So sind die Kernoperatoren $L^\infty(\mu) \to L^1(\nu)$ genau die ordnungsstetigen nuklearen, während jeder Operator $L^1(\mu) \to L^\infty(\nu)$ bereits ein Kernoperator ist. Im Falle $E = L^2(\mu)$, $F = L^2(\nu)$ sind, wie oben bemerkt, die k.a.s., absolutsummierenden und majorisierenden Operatoren unter Einschluß der entsprechenden Normen mit den Hilbert-Schmidt-Operatoren identisch, während (wegen der Reflexivität von $L^2(\mu)$) die integralen Operatoren mit den nuklearen zusammenfallen; Kernoperatoren sind hingegen nicht notwendig vom Hilbert-Schmidtschen Typ und bei rein atomaren Maßen μ, ν sogar mit den ordnungsbeschränkten identisch.

Zum Schluß sei bemerkt, daß sich AL-Räume, AM-Räume und Hilberträume (die letzteren aufgefaßt als Banachverbände $L^2(\mu)$) durch das Zusammenfallen gewisser der im obigen Diagramm aufgeführten Operatorenklassen charakterisieren lassen, wenn geeignete Typen von Banachräumen oder -verbänden als Definitionsbzw. Bildräume zugelassen werden (vgl. [38], Kap. IV, Exerc. 15–17).

2 Spektraltheorie

Wir wenden uns nun der Spektraltheorie positiver Operatoren auf Banachverbänden zu. Die verwendete Terminologie (Spektrum, Spektralradius, Resolvente usf.) ist die übliche, wie sie etwa in Dunford-Schwarz [2] für lineare Operatoren auf komplexen Banachräumen erklärt und gebraucht wird.

2.1 Hilfsbegriffe

Für eine vernünftige Spektraltheorie ist es erforderlich, Banachräume über dem komplexen Skalarkörper zu betrachten. Für Operatoren auf (reellen) Banachverbänden E genügt es hierbei im Prinzip, die Komplexifizierung E + iE, versehen mit einer geeigneten Norm (d. h. einer Norm, für deren Topologie E + iE zu E x E reell-isomorph ist), zugrundezulegen. Jedoch hat es sich aus mehreren Gründen

(Dualbildung, Operatoren, u. a.) als vorteilhaft erwiesen, die Betragsfunktion $x \to |x|$ von E vermöge des Ansatzes

$$|x + iy| = \sup_{\vartheta \in \mathbf{R}} |\cos \vartheta \cdot x + \sin \vartheta \cdot y|$$

auf E + iE fortzusetzen, wobei wesentliche Eigenschaften der Betragsfunktion (z. B. Dreiecksungleichung, absolute Homogenität) erhalten bleiben; die kanonische Norm von $x + iy$ $(x, y \in E)$ ist sodann die Norm von $|x + iy| \in E$. Die so definierte *Verbandskomplexifizierung* stimmt beispielsweise für die komplexen Räume C(K), M(K), $L^p(\mu)$ mit den natürlichen Norm- und Betragsdefinitionen überein. Eine ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge findet sich in [38], II. 11; im folgenden werden wir stets komplexe Banachverbände im Sinne dieser Definition betrachten.

Des weiteren benötigen wir unten den Begriff des *Zentrums* Z(E) eines Banachverbandes E. Hierunter versteht man die Menge aller Operatoren $T \in \mathscr{L}(E)$, die für alle $x \in E$ einer Beziehung $|Tx| \leqslant c|x|$ (mit von T abhängiger Konstanten c) genügen. Z(E) ist ein linearer Teilraum von $\mathscr{L}(E)$ mit den wesentlichen Eigenschaften:

(a) Z(E) *ist eine volle (d. h. Inverse enthaltende), kommutative Teilalgebra von* $\mathscr{L}(E)$, *die in der starken Operatortopologie abgeschlossen ist.*

(b) *In der von* $\mathscr{L}(E)$ *induzierten Norm, Ordnung und algebraischen Struktur ist* Z(E) *isometrisch isomorph zu* $C(K_E)$ *für einen geeigneten kompakten Raum* K_E.

Insbesondere ist jedes $T \in Z(E)$ ordnungsbeschränkt und der Betrag $|T|$ ein Verbandshomomorphismus mit reellem Spektrum. Für $E = C(K)$ ist K_E zu K, für $E = L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty$, μ σ-endlich) ist K_E zum Stoneraum der Maßalgebra von μ homöomorph. Von den zahlreichen Untersuchungen über das Zentrum reeller Vektorverbände sei hier auf [3], [17] verwiesen.

2.2 Symmetrie des Randspektrums

Unter dem *Randspektrum* (*peripheren Spektrum*) eines Operators T auf dem (komplexen) Banachraum E verstehen wir die Menge $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| = r(T)\}$, wobei wie üblich $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ den *Spektralradius* von T bezeichnet. Schon für positive Operatoren auf wesentlich allgemeiner geordneten Banachräumen als Banachverbänden (z. B. nichtkommutativen C*-Algebren) kann man der vektoriellen Form [30] des funktionentheoretischen Satzes von Pringsheim entnehmen, daß r(T) zu $\sigma(T)$ gehört. Für Banachverbände indes ist diese Aussage eine unmittelbare Folge der Abschätzung

$$|(\lambda - T)^{-1} x| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-(n+1)} T^n |x| = (|\lambda| - T)^{-1} |x|,$$

die auf der C. Neumannschen Reihe der Resolvente (gültig für $|\lambda| > r(T)$) beruht und besagt, daß für wenigstens ein $x \in E$ die Familie $(\lambda - T)^{-1}|x|$ $(\lambda > r(T))$ unbeschränkt sein muß; hieraus folgt bekanntlich $r(T) \in \sigma(T)$.

Wesentlich an die Verbandsstruktur gebunden sind hingegen die Symmetrieaussagen für das Randspektrum positiver Operatoren (vgl. [32]), wie sie für nicht negative Matrizen sich leicht aus den bekannten Sätzen von Perron und Frobenius ergeben: *Für eine* n x n-*Matrix* $A \geqslant 0$, $r(A) = 1$, *ist das Randspektrum eine Vereinigung von Gruppen komplexer Einheitswurzeln.* Einer angemessenen Verallgemeinerung dieser Aussage stellt sich eine Reihe von Schwierigkeiten entgegen. Nach längeren Vorarbeiten durch verschiedene Autoren (vgl. die bibliographischen Notizen in [38], Kap. V) gelang es Lotz [13], durch Benutzung von Ultraprodukten den Fall beliebiger peripherer Spektralwerte auf den Fall peripherer Eigenwerte zurückzuführen und so den folgenden Satz zu beweisen.

Theorem 2.A *Es sei* T *ein positiver,* (W)*-auflösbarer Operator auf einem beliebigen Banachverband, und es werde* $r(T) = 1$ *vorausgesetzt. Dann ist das Randspektrum von* T *Vereinigung zyklischer Untergruppen der Kreisgruppe.*

Die Bedingung der (W)-*Auflösbarkeit* bedeutet folgendes: Ein (positiver) Operator T auf dem Banachverband E genügt der (Wachstums-) Bedingung (W), wenn $(\lambda - r(T))(\lambda - T)^{-1}$ für $\lambda \downarrow r(T)$ beschränkt bleibt. Allgemeiner heißt T (W)-*auflösbar,* wenn es eine endliche Kette $\{0\} = E_0 \subset \ldots \subset E_n = E$ abgeschlossener Verbandsideale von E gibt, die T-invariant sind und für welche jeder der auf den n Quotienten E_{k+1}/E_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ von T induzierten Operatoren der Bedingung (W) genügt. (W)-Auflösbarkeit liegt z. B. stets vor, wenn $\lambda = r(T)$

endlichdimensionale Banachverbände wesentliche Fassung des Begriffes *Unzerlegbarkeit* oder *Irreduzibilität* indessen scheint erstmalig in [32] gegeben zu werden: Ein Operator T auf einem Banachverband E heißt *irreduzibel*, wenn $\{0\}$ und E die einzigen abgeschlossenen, T-invarianten Verbandsideale sind. Interessante Beispiele irreduzibler Operatoren auf C(K) sind die Operatoren, die durch die ergodischen Flüsse der topologischen Dynamik induziert werden, und eine analoge Situation liegt für die Operatoren auf $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ vor, die ergodische Transformationen des Grundraumes beschreiben.

Eine inhaltsreiche Verallgemeinerung der Frobeniusschen Theorie wird notwendigerweise auf das periphere Punktspektrum Bezug nehmen müssen. In der Tat gilt folgender Satz, der vom Verfasser [32] zunächst für Operatoren auf C(K) bewiesen und sodann von Lotz [13] auf beliebige Banachverbände ausgedehnt werden konnte.

Theorem 2.C *Sei* T *ein positiver, irreduzibler Operator auf* E *mit* $r(T) = 1$; *das periphere Punktspektrum sei nicht leer, und es existiere eine Linearform* $\varphi = T'\varphi > 0$. *Es gilt:*

(i) *Der Fixraum von* T *ist eindimensional und wird von einer topologischen Ordnungseinheit von* E *aufgespannt.*

(ii) *Das periphere Punktspektrum ist Untergruppe der Kreisgruppe.*

(iii) *Jeder periphere Eigenwert* α *ist einfach, und man hat* $\sigma(T) = \alpha\,\sigma(T)$.

(iv) 1 *ist einziger Eigenwert mit einem positiven Eigenvektor.*

$0 \leqslant u \in E$ heißt *topologische Ordnungseinheit* von E, wenn das von u erzeugte Hauptideal E_u in E dicht ist. Hinsichtlich der „Normierung" $r(T) = 1$ sowie der Existenz der Linearform φ sei auf den Unterschied zum Fall $\dim E = n \in \mathbf{N}$ aufmerksam gemacht. Für $n \geqslant 2$ ist stets $r(T) > 0$, wenn T irreduzibel ist; dies gilt noch für beliebiges $E = C(K)$, aber schon nicht mehr für alle Räume $L^1(\mu)$ [37]. Die Existenz einer positiven, invarianten Linearform $\varphi = T'\varphi$ ist (bei $r(T) = 1$) im Fall $E = C(K)$ gewährleistet und folgt bei nichtleerem peripheren Punktspektrum allgemein aus der Bedingung (W) (s. o.) [32]; in allgemeineren Fällen muß sie postuliert werden.

Anscheinend gibt es nur wenige Ergebnisse über das allgemeine (d. h. nicht notwendig aus Eigenwerten bestehende) Randspektrum irreduzibler Operatoren; so konnte Verf. zeigen [36], daß für irreduzible Markov-Operatoren auf C(K) das periphere Spektrum stets eine Untergruppe der Kreisgruppe ist.

Andererseits sind Pole der Resolvente stets Eigenwerte, und es fragt sich, inwieweit für positive Operatoren das Verhalten der Resolvente an der Stelle $\lambda = r(T)$ schon ihr singuläres Verhalten auf dem gesamten Spektralkreis $|\lambda| = r(T)$ bestimmt. Nehmen wir wieder $r(T) = 1$ an, und sei $\lambda = 1$ ein Pol von $R(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}$. Es ist dann leicht einzusehen [30], daß 1 ein Pol maximaler Ordnung auf dem Spektralkreis sein muß, und für irreduzibles positives T kann es dort nur Pole 1. Ordnung geben. Aber können unimodulare Spektralwerte vorhanden sein, die nicht Pole sind? Diese Frage erwies sich als schwierig; sie konnte von Niiro [23] zunächst für die Folgenräume ℓ^p (und später für $L^p(\mu)$), $1 < p < +\infty$, negativ beantwortet werden. Dem Verfasser gelang dann der entsprechende Nachweis für beliebige Räume $C(K)$ und $L^1(\mu)$ [34], und schließlich lösten Niiro und Sawashima [24] das Problem allgemein.

Theorem 2.D *Sei* T *ein positiver, irreduzibler Operator auf einem beliebigen Banachverband. Ist der Spektralradius* $r(T)$ *ein Pol der Resolvente* $R(\lambda)$, *so besteht das periphere Spektrum nur aus Polen* 1. *Ordnung von* $R(\lambda)$.

Es kann hinzugefügt werden, daß (für $\dim E \geqslant 2$) stets $r(T) > 0$ ist und folglich $r(T) = 1$ angenommen werden kann; das periphere Spektrum von T besteht dann nach Theorem 2.C aus einer Gruppe von Einheitswurzeln, die sämtlich einfache Eigenwerte sind (insbesondere ist T quasi-kompakt). Ein relativ einfacher Beweis von 2.D, der auf Lotz und den Verfasser [16] zurückgeht, ist in [38], V.5 reproduziert. Das gleiche gilt für die folgende Verallgemeinerung von 2.D.

Korollar 2.E *Sei* T *positiver Operator auf einem beliebigen Banachverband. Ist* $r(T)$ *Pol der Ordnung* k *der Resolvente* $R(\lambda)$, *und ist das zugehörige Residuum von endlichem Rang, so besteht das periphere Spektrum nur aus Polen der Ordnung* $\leqslant$ k.

Anhand einfacher Gegenbeispiele läßt sich zeigen [38], daß die Voraussetzungen nicht weiter abgeschwächt werden können.

2.4 Gruppen positiver Operatoren

Eine durch die Anwendungen gegebene Motivation zum Studium von Gruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden entstammt der Ergodentheorie und topologischen Dynamik. Seien etwa (X, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum, Φ eine [illegible]

Durch den Ansatz $T f = f \circ \varphi$ $(\varphi \in \Phi)$ entspricht Φ jeweils eine Gruppe $G_p(\Phi)$ positiver Isometrien auf $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. Welche Gruppen positiver Operatoren auf einem Banachverband sind nun von dieser oder ähnlicher Gestalt, und was läßt sich allgemeiner über solche Gruppen aussagen? Wir wollen nachfolgend nur zwei Resultate darstellen, die auf Nagel-Wolff [20] bzw. Schaefer-Wolff-Arendt [39] zurückgehen und einen Eindruck von den bislang erzielten Ergebnissen vermitteln können.

Eine Gruppe G (allgemeiner: eine Halbgruppe S) positiver Operatoren auf einem Banachverband E nennt man *irreduzibel,* wenn $\{0\}$ und E die einzigen abgeschlossenen, G- (bzw. S-) invarianten Verbandsideale sind. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß die Gruppeneins die identische Abbildung I von E ist; der allgemeine Fall läßt sich hierauf zurückführen. Für irreduzible Gruppen G, die in der starken Operatortopologie kompakt sind, haben Nagel-Wolff [20] eine vollständige Charakterisierung gegeben (vgl. [38], III. 10.4), die im abelschen Fall eine besonders einfache Form annimmt; m bezeichne das Haarsche Maß auf der kompakten Gruppe G.

daß j_1 *und* j_2 *injektive Verbandshomomorphismen sind und (vermöge* j_2*) die Operatorengruppe* G *auf* E *von der Gruppe aller Translationsoperatoren auf* $L^1(G, m)$ *induziert wird.*

Ein spezieller Fall liegt vor, wenn $T \geqslant 0$ ein irreduzibler Operator mit gleichmäßig beschränkten Potenzen auf E ist, dessen zu unimodularen Eigenwerten gehörige Eigenvektoren in E total sind; hier ist die Abschließung der Halbgruppe $(T^n)_{n \geqslant 1}$ eine (monothetische) kompakte irreduzible Gruppe G. (Für den Fall eines ergodischen dynamischen Systems ist das Resultat als *Satz von Halmos-von Neumann* bekannt; vgl. [38], III. 10.5 Cor.) Ein bekanntes, aber illustratives Beispiel wird durch den Operator $T_\alpha f(z) = f(\alpha z)$ gegeben ($\alpha, z \in \Gamma$), wo Γ die Kreisgruppe bezeichnet und α/π irrational ist; hier kann E beispielsweise ein beliebiger der Banachverbände $C(\Gamma)$ oder $L^p(\Gamma, m)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ sein.

Das zweite der oben erwähnten Resultate bezieht sich auf beliebige Gruppen positiver Operatoren und ergab sich in Verfolgung der Frage, ob ein Verbandshomomorphismus T von E mit $\sigma(T) = \{1\}$ notwendig die identische Abbildung I sein muß. Für Automorphismen von C*-Algebren oder von kommutativen halbeinfachen Banachalgebren trifft dies zu (vgl. die in [20] zitierte Literatur), nicht jedoch für Kontraktionen eines Hilbertschen Raumes. Die Antwort für Verbandshomomorphismen ist positiv und in dem folgenden Satz enthalten [39].

Theorem 2.G *Für einen Verbandsisomorphismus* T *eines Banachverbandes* E *sind äquivalent:*

(a) T *ist im Zentrum* Z(E) *enthalten.*

(b) $\sigma(T) \subset (0, +\infty)$.

Da ein invertierbarer Verbandshomomorphismus T, wie man leicht sieht, ein Verbandsisomorphismus sein muß, folgt nun in der Tat aus $\sigma(T) = \{1\}$ die Beziehung $T \in Z(E) \cong C(K_E)$; wegen der oben in 2.1 genannten Eigenschaften von wesentlich sind; hierin liegt das Hauptinteresse der Theorie bei den Anwendungen. Bei aller Analogie der berichteten Ergebnisse, die noch durchweg unveröffentlicht sind, mit den Resultaten von Abschnitt 2 kann von einer routinehaften Übertragung keine Rede sein.

3.1 Hilfsbegriffe

Für die Grundlagen der Theorie stark stetiger Halbgruppen auf Banachräumen verweisen wir auf Hille [6] (oder die spätere Fassung von Hille-Phillips). Wie üblich verstehen wir unter einer *einparametrigen Operatorenhalbgruppe* einen stetigen Homomorphismus $H: \ t \to T(t)$ der additiven Halbgruppe $\mathbf{R}_+$ in die multiplikative Halbgruppe $\mathscr{L}_s(E)$, wo E einen Banachraum und „s" die starke Operatortopologie bezeichnen; es wird ferner stets $T(0) = I$ (= id E) angenommen. Die durch den Ansatz

$$Ax = \lim_{t \to 0} t^{-1}(T(t) - I)x$$

gegebene lineare Abbildung $D(A) \to E$, deren Definitionsbereich $D(A)$ der Existenzbereich des Limes in E und stets ein dichter linearer Teilraum von E ist, ist abgeschlossen und heißt *Erzeugende* (oder *Generator*) von H. A ist beschränkt (und folglich $D(A) = E$), genau wenn H normstetig ist; in diesem Falle hat man notwendig $T(t) = \exp tA \ \ (t \in \mathbf{R}_+)$. Eine stark stetige Halbgruppe H nennen wir *positiv* (bzw. *Verbandshalbgruppe*), wenn E ein (komplexer, s. 2.1) Banachverband und alle $T(t)$ positive Operatoren auf E (bzw. Verbandshomomorphismen von E) sind.

3.2 Die Resolvente der Erzeugenden A

Jede stark stetige Halbgruppe H genügt Abschätzungen der Gestalt

$$\| T(t) \| \leqslant M e^{\omega t} \qquad (t \in \mathbf{R}_+)$$

für gewisse $\omega \in \mathbf{R}$ und $M = M(\omega)$. Aus der Definition der Erzeugenden A ergibt sich nach einiger Rechnung, daß die Resolvente $R(\lambda) = R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ jedenfalls für $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ existiert und die Darstellung

$$(*) \qquad R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)\, x\, dt \quad (x \in E)$$

gestattet, wobei das Integral im Bochnerschen Sinne zu verstehen (also insbesondere absolut konvergent) ist. Das Infimum ω_0 der in der obigen Abschätzung von $\| T(t) \|$ zulässigen Werte ω kann daher auch als *Abszisse absoluter Konvergenz* der Darstellung (*) bezeichnet werden. (Diese Darstellung verhält sich zur C. Neumannschen Reihe der Operatorentheorie ähnlich wie gewöhnliche Dirichletreihen zu Potenzreihen.) Aus der Darstellung (*) entnimmt man sofort, daß das (möglicherweise leere) Spektrum $\sigma(A)$ jedenfalls in der Halbebene $\{\lambda \in \mathbf{C} \colon \operatorname{Re} \lambda \leqslant \omega_0\}$ liegt. Die Zahl $s(A) = \sup \{\operatorname{Re} \lambda \colon \lambda \in \sigma(A)\}$ nennt man *Spektralschranke* von A; im allgemeinen ist (wie bei Dirichletreihen) $s(A) < \omega_0$.

Wie verhält es sich bei positiven Halbgruppen? Ist $E = C(K)$ oder $E = L^1(\mu)$, so gilt stets $s(A) = \omega_0$; hingegen hat M. Wolff kürzlich an einem Beispiel gezeigt, daß selbst für positive Halbgruppen auf reflexiven Banachverbänden $s(A) < \omega_0$ sein kann. Greiner [4] konnte jedoch zeigen:

Lemma 3.A *Sei* H *eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband* E. *Für alle* $x \in E$ *und alle* $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > s(A)$ *gilt*

$$R(\lambda)x = \lim_{s \to +\infty} \int_0^s e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt$$

in der Normtopologie von E.

Man kann also bei positiven Halbgruppen für alle λ, $\operatorname{Re}\lambda > s(A)$, über die Darstellung (*) im Sinne eines „uneigentlichen Riemannschen Integrals" verfügen, das freilich i. allg. nicht absolut konvergiert.

3.3 Das Spektrum von A

Für allgemeine Halbgruppen ist das Spektrum der Erzeugenden, wie man an einfachen Beispielen sieht, so gut wie keiner Beschränkung unterworfen: Jede abgeschlossene, in einer linken Halbebene enthaltene Teilmenge von $\mathbf{C}$ ist gleich $\sigma(A)$ für die Erzeugende A einer geeignet gewählten, stark stetigen Halbgruppe. Für positive Halbgruppen hingegen hat $\sigma(A)$ sehr viel weitergehende Eigenschaften, als sich zunächst vermuten läßt. Es ist hier anzumerken, daß die für beschränktes A gültige Relation $\exp t\sigma(A) = \sigma(T(t))$ $(t \in \mathbf{R}_+)$ sowie die stets gültige Beziehung

$$e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t)) \qquad (t \in \mathbf{R}_+)$$

außer der Tatsache, daß $\sigma(A)$ in einer linken Halbebene enthalten sein muß, weder für allgemeine noch für positive Halbgruppen nützliche Informationen enthalten.

Hingegen gestattet Lemma 3.A für positives H die Abschätzung

$$|R(\lambda)\, x| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t}\, T(t)|x|\, dt$$

der Resolvente, sobald $\operatorname{Re}\lambda > s(A)$ ist; hieraus ergibt sich sofort, *daß im Falle* $\sigma(A) \neq \phi$ *die Spektralschranke* $s(A)$ *stets zu* σ *gehört.* Aufgrund der Resultate von Abschnitt 2 und der Abbildungseigenschaften der komplexen Exponentialfunktion kann man nun hoffen, daß – unter geeigneten Voraussetzungen – das Spektrum $\sigma(A)$ Periodizitätseigenschaften in Richtung der imaginären Achse aufweist. Eine Teilmenge $B \subset \mathbf{C}$ werde daher imaginär additiv zyklisch genannt, wenn aus $\alpha + i\beta \in B$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ für alle $k \in \mathbf{Z}$ die Relation $\alpha + ik\beta \in B$ folgt. In Analogie zu Theorem 2.B konnte Derndinger [1] den folgenden Satz beweisen.

Theorem 3.B *Sei* H *eine Verbandshalbgruppe, mit Erzeugender* A, *auf einem beliebigen Banachverband. Dann sind* $\sigma(A)$ *sowie das Punktspektrum von* A *imaginär additiv zyklisch.*

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich, daß die (beschränkte) Erzeugende A einer normstetigen Verbandshalbgruppe nur reelles Spektrum besitzen kann. Ferner konnte Derndinger zeigen (l.c.), daß unter Voraussetzung einer Wachstumsbedingung (W) für die Resolvente von A auch das periphere Punktspektrum von A imaginär additiv zyklisch ist. Hier versteht man unter dem peripheren Spektrum (Randspektrum) von A natürlich das auf der Spektralgeraden $\{\lambda \in \mathbf{C}: \operatorname{Re} \lambda = s(A)\}$ gelegene Spektrum von A; entsprechend wird unter (W) jetzt eine Bedingung

$$\|R(\lambda,A)\| \leqslant \text{const}\,(\lambda - s(A))^{-1} \qquad (\lambda > s(A))$$

verstanden. Auch der Begriff der (W)-Auflösbarkeit überträgt sich unmittelbar auf Halbgruppen (vgl. 2.2); so konnte Greiner [4] die volle Analogie zu Theorem 2.A herstellen.

Theorem 3.C *Sei* H *eine positive,* (W)*-auflösbare Halbgruppe mit Erzeugender* A, *und es werde (o.B.d.A.)* $s(A) = 0$ *vorausgesetzt. Dann ist das Randspektrum von* A *Vereinigung additiver Untergruppen der imaginären Achse.*

Neben der Verwendung von Ultraprodukten, wie dies in [38], Kap. V.I, näher beschrieben ist, spielen beim Beweis ordnungstheoretische Abschätzungen der Resolvente eine Rolle, die sich wesentlich auf Lemma 3.A stützen. Mit Hilfe dieser Methoden gelang es Greiner [4] nun auch, die Aussagen 2.C bis 2.E vollständig auf positive Halbgruppen auszudehnen; wir fassen das Ergebnis in folgendem Theorem zusammen.

Theorem 3.D *Sei* H *eine positive, irreduzible Halbgruppe, deren Erzeugende* A *(o.B.d.A.) der Bedingung* $s(A) = 0$ *genüge und für welche eine positive Linearform* $\varphi \in \ker A^*$ *existiert. Dann gelten für* A *sinngemäß die Sätze* 2.C *und* 2.D, *in denen* T *durch* A, r(T) *durch* s(A) *und die Kreisgruppe durch die additive Gruppe der Spektralgeraden* $\{\lambda \in \mathbf{C}: \operatorname{Re} \lambda = s(A) = 0\}$ *zu ersetzen sind.*

Es sei angemerkt, daß – im Gegensatz zu zyklischen Halbgruppen $(T^n)_{n \in \mathbf{N}}$ – eine kontinuierliche Halbgruppe irreduzibel sein kann, ohne daß ein einziger der Operatoren T(t) es ist. Wie im Fall von Satz 2.C kann im vorstehenden Theorem die Existenz einer Linearform $0 < \varphi \in \ker A^*$ durch die hier stärkere Bedingung (W) ersetzt werden, und auch Korollar 2.E gilt sinngemäß für positive Halbgruppen.

Beispiele für irreduzible positive Halbgruppen, die den Voraussetzungen von Theorem 3.D genügen, sind solche mit kompakter Resolvente wie etwa die vom Laplaceschen Operator Δ erzeugte Halbgruppe auf $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < +\infty, \Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränkt).

3.4 Charakterisierung von A

Die erstaunlichen Spektraleigenschaften der Erzeugenden positiver Halbgruppen rücken die Frage nach einer Charakterisierung dieser Abbildungen (unabhängig von ihrer definierenden Eigenschaft) in ein neues Licht. Vor längerer Zeit gaben Phillips [26] sowie später Sato [27], [28] Charakterisierungen der Erzeugenden positiver Kontraktionshalbgruppen mit Hilfe des Begriffes der Dispersivität. Ohne die Kontraktionsbedingung sind voll befriedigende Ergebnisse zunächst nur für Verbandshalbgruppen auf Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm (z.B. den Räumen

$L^p(\mu)$ $1 \leq p < +\infty$) erzielt worden. Nach einem etwas spezielleren Ergebnis von

R. Nagel konnte Wolff [48] zeigen, daß für solche Halbgruppen der Definitionsbereich D(A) der Erzeugenden stets ein Unterverband von E ist. Ein typisches Beispiel liefert die Translationsgruppe $(T(t))_{t \in \mathbf{R}}$ auf $L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$, die durch

$$T(t)\, f(s) = f(s + t)$$

gegeben ist; hier ist $A = d/dt$ und D(A) der Sobolevraum $W_{1,p}$. Einen Hinweis auf eine mögliche Charakterisierung der Erzeugenden positiver Halbgruppen gibt das folgende, den Laplace-Operator betreffende Resultat von Kato [10]:

Ist Ω eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und f eine komplexwertige Funktion auf Ω derart, daß f und Δf lokal integrierbar sind, so gilt

$$\Delta |f| \geq \mathrm{Re}\,[\mathrm{sgn}\,\overline{f} \cdot \Delta f].$$

[5] G r o h , U.: Das Spektrum positiver Operatoren auf C*-Algebren. Diss. Univ. Tübingen 1979
[6] H i l l e , E.: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI. Providence, R.I. 1948
[7] G r o t h e n d i e c k , A.: Produits tensoriels et espaces nucleaires. Mem. Amer. Math. Soc. Soc. 16, Providence, R.I. 1955
[8] J ö r g e n s , K.: Lineare Integraloperatoren. Stuttgart: Teubner 1970
[9] K a r l i n , S.: Positive Operators. J. Math. Mech. 8 (1959) 907–937

[redacted]

[10] K a t o , T.: Schrödinger Operators With Singular Potentials. Israel J. Math. **13** (1973) 135–148
[11] L i n d e n s t r a u s s , J.; T z a f r i r i , L.: Classical Banach Spaces I. Berlin – Heidelberg – New York 1977: Springer. = Ergebn. der Math. 92
[12] L i n d e n s t r a u s s , J.; T z a f r i r i , L.: Classical Banach Spaces II. Berlin – Heidelberg – New York 1979: Springer. = Ergebn. der Math. 97
[13] L o t z , H. P.: Über das Spektrum positiver Operatoren. Math. Z. **108** (1968) 15–32
[14] L o t z , H. P.; C a r t w r i g h t , D.: Some Characterizations of AM- and AL-Spaces. Math. Z. **142** (1975) 97–103
[15] L o t z , H. P.: Grothendieck Ideals of Operators in Banach Spaces. Prepr. 1975
[16] L o t z , H. P.; S c h a e f e r , H. H.: Über einen Satz von F. Niiro und I. Sawashima. Math. Z. **108** (1968) 33–36
[17] L u x e m b u r g , W. A. J.; S c h e p , A.: A Radon-Nikodym Type Theorem for Positive Operators and a Dual Form. Indag. Math. **81** (1978) 357–375

[redacted]

[19] N a g e l , R.; S c h l o t t e r b e c k , U.: Integraldarstellung regulärer Operatoren auf Banachverbänden. Math. Z. **127** (1972) 293–300
[20] N a g e l , R.; W o l f f , M.: Abstract Dynamical Systems With an Application to Operators With Discrete Spectrum. Arch. d. Math. **23** (1972) 170–176

[38] S c h a e f e r , H. H.: Banach Lattices and Positive Operators. Berlin – Heidelberg – New York 1974: Springer. = Grundl. Math. Wiss. 215
[39] S c h a e f e r , H. H.; W o l f f , M.; A r e n d t , W.: On Lattice Isomorphisms With Positive Real Spectrum and Groups of Positive Operators. Math. Z. **164** (1978) 115–123
[40] S c h e f f o l d , E.: Das Spektrum von Verbandsoperatoren in Banachverbänden. Math. Z. **123** (1971) 177–190
[41] S c h l o t t e r b e c k , U.: Über Klassen majorisierbarer Operatoren auf Banachverbänden. Diss. Univ. Tübingen 1969
[42] S c h l o t t e r b e c k , U.: Order-theoretic Characterization of Hilbert-Schmidt Operators. Arch. d. Math. **24** (1973) 67–70
[43] U h l i g , H.: Derivationen und Verbandshalbgruppen. Diss. Univ. Tübingen 1979
[44] W i e l a n d t , H.: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math. Z. **52** (1950) 642–648
[45] W o l f f , M.: Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in C(X). Math. Ann. **182** (1969) 161–169
[46] W o l f f , M.: Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in Banachverbänden. Math. Ann. **184** (1969) 49–55
[47] W o l f f , M.: Über das Randspektrum komplexer ordnungsbeschränkter Operatoren in Banachverbänden. Math. Z. **13** (1974) 293–302
[48] W o l f f , M.: On C_0-Semigroups of Lattice Homomorphisms on a Banach Lattice. Math. Z. **164** (1978) 69–80

Prof. Dr. H. H. Schaefer
Mathematische Fakultät der
Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
7400 Tübingen

(*Eingegangen: 28. 9. 1979*)

Buchbesprechungen

Chern, S.-s., Selected Papers, New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1978, XXXI + 476 pp., cloth, DM 52,–

Anläßlich seiner Emeritierung wurde diese Auswahl der Schriften des bedeutenden Geometers S.-s. Chern herausgegeben. Eine ähnliche Auszeichnung wurde vor einigen Jahren H. Hopf zuteil, und wie A. Weil in seinem sehr lesenswerten Beitrag „S.-s. Chern as Geometer and as Friend" schreibt, steht Chern in einer Linie mit den anderen großen Geometern unseres Jahrhunderts, wie E. Cartan und H. Hopf. Ich zitiere:

"The psychological aspects of true geometric intuition will perhaps never be cleared up. At one time it implied primarily the power of visualization in three-dimensional space. Now that higher-dimensional spaces have mostly driven out the more elementary problems, visualization can at best be partial or symbolic. Some degree of tactile imagination seems also to be involved. Whatever the truth of the matter, mathematics in our century would not have made such impressive progress without the geometric sense of Elie Cartan, Heinz Hopf, Chern and a very few more. It seems safe to predict that such men will always be needed if mathematics is to go on as before."

Hinzufügen zu dieser Umschreibung dessen was geometrische Intuition ausmacht, möchte ich noch ihre Fähigkeit, apriori gegebene Strukturen aus Anschauung und Empirie herauszuschälen. Hier wird nicht in erster Linie ein vorgegebener mathematischer Apparat genutzt, sondern – wie es die Theoretischen Physiker oft tun müssen – es werden Zusammenhänge aufgezeigt, für deren Beschreibung die geeignete mathematische Maschinerie oft noch gar nicht vorliegt. Die Mathematik erfährt dann fruchtbare neue Anregungen aus der Forderung, einen geeigneten mathematischen Überbau zu schaffen.

Bei der Auswahl wurden die kürzeren und schwerer zugänglichen Arbeiten bevorzugt. Wie jeder Mathematiker weiß, beruht die Wirkung von Cherns Schaffen auch auf seiner Lehrtätigkeit

Courant's outlook was formed in the Göttingen of Runge, Hilbert and Klein (Reid quotes K. O. Friedrichs to the effect that Courant always considered himself the son of Hilbert, but in [illegible]

Details zu verstricken, die oft von der Lektüre einführender Logiklehrbücher abschrecken. Es werden dann die grundlegenden Sätze wie Vollständigkeits- und Kompaktheitssatz bewiesen und ein Ausblick auf höhere Sprachen gegeben. Nach der Lektüre dieses Artikels sollte auch der Nichtlogiker in der Lage sein, eine Reihe weiterer Artikel mit Gewinn zu lesen. Der Appetit dazu wird sich sicher beim Durchblättern des Buches ganz von selbst einstellen. Da hier natürlich nicht

Gebietes, die aus der Chemie erwachsen, anzuregen. Dabei entfällt das Schwergewicht allerdings auf die erste Aufgabe: Während die Graphentheorie mehr von ihren Grundlagen her entwickelt wird, werden aus der Chemie sehr viel mehr Kenntnisse vorausgesetzt. Insgesamt bildet das Buch ein beeindruckendes Beispiel interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Wissenschaftlern sehr verschiedener Fachrichtungen.

Die Artikel seien noch im einzelnen aufgeführt (die Namen der Verfasser stehen in Klammern): Early history of the interplay between graph theory and chemistry (Balaban, Harary). An exposition of graph theory (Harary). Pólya's contributions to chemical theory (Harary, Palmer, Robinson, Read). The enumeration of acyclic chemical compounds (Read). Enumeration of cyclic graphs (Balaban). Metric spaces and graphs representing the logical structure of chemistry (Dugundji, Gillespie, Marquarding, Ugi, Ramirez). The topological matrix in quantum chemistry (Rouvray). Some aspects of graph theory for intermolecular interactions in chemical physics (Brocas). Applications of graph theory to organometallic chemistry (Gielen). The graph-like state of matter and polymer science (Gordon, Temple). Ordered chromatic graph and limited environment concepts (Dubois).

Hamburg R. Halin

Noltemeier, H., Graphentheorie mit Algorithmen und Anwendungen, (de Gruyter Lehrbuch), Berlin – New York: Walter de Gruyter 1976, 239 S., gebd., DM 48,–

Das Buch gibt eine Einführung in die Graphentheorie, die hauptsächlich für Praktiker gedacht ist. Theoretische Überlegungen und Beweise treten in den Hintergrund; dafür werden ausführliche Programme für die jeweils behandelten Probleme angegeben, was beim Leser eine gewisse Vertrautheit mit formalen Sprachen voraussetzt. Im übrigen sind die geforderten mathematischen Vorkenntnisse bescheiden. Die Darstellung ist im allgemeinen gut lesbar und klar, wenn auch der Leser gelegentlich undefinierte Begriffe „erraten" muß (so z. B. auf S. 19 die Begriffe „Zentrum", „Durchmesser", „bipartit") und manchmal die klare Linie durch eine Fülle eingestreuter Hinweise ein wenig leidet.

In den ersten Kapiteln werden einige der wichtigsten Grundbegriffe aus der Theorie der (gerichteten bzw. bewerteten) Graphen definiert und an Beispielen aus der Praxis, hauptsächlich an ökonomischen Problemen, diskutiert. Hier sind u. a. behandelt das Problem der Speicherung von Graphen, Erreichbarkeit und Zusammenhang, Bäume und Gerüste mit dem Kruskal-Algorithmus zur Gewinnung eines Minimalgerüstes, Labyrinthe sowie Ränge, Kreise, Zyklen. Sodann nehmen Algorithmen zur Auffindung kürzester Entfernungen und Wege einen breiten Raum ein. Das Kapitel über Strömungen (in Netzwerken) bringt u. a. das Min Cut – Max Flow Theorem von Ford-Fulkerson (mit zugehörigem Algorithmus). Es folgt ein Kapitel über „matching"-Probleme mit dem Heiratssatz und verwandten Fragestellungen, sodann werden Rundreiseprobleme (traveling salesman problem, Eulersche Linien) behandelt. Den Beschluß bildet ein Kapitel über Netzplantechnik (Planung von Projekten).

Es ist gewiß ein verdienstvolles Unterfangen, die Lücke zwischen Theorie und Praxis schließen zu wollen, die auch in einem so wirklichkeitsnahen Gebiet wie der Graphentheorie schmerzlich tief ist. Jedoch bietet das vorliegende Buch an reiner Graphentheorie zu wenig, um den theoretisch Interessierten für die Anwendungen wirklich begeistern zu können. Viele grundlegende Sätze und Probleme werden gar nicht erwähnt (wie die Sätze von Menger und Petersen, Extremalprobleme, Fragen höheren Zusammenhangs, Ramseyprobleme) bzw. nur ganz kurz angesprochen (wie Hamiltonkreise, Färbungsprobleme, der Satz von Kuratowski, der dem Leser unverständlich bleiben muß, weil in der Formulierung der Begriff „kontrahierbar" ohne Definition benutzt wird). So hinterläßt das Buch beim Referenten einen zwiespältigen Eindruck: Einerseits ist es wichtig und wertvoll, daß auf die umfangreiche Anwendbarkeit der Graphentheorie hingewiesen wird, andererseits ist es bedauerlich, daß die tieferen Sätze der Theorie und fast alle in den letzten Jahren erreichten bedeutenden Fortschritte in dem Buche nicht zur Sprache kommen.

Hamburg R. Halin

Marcus, D. A., Number fields (Universitext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1977, VIII + 279 S., kart., DM 26,10

Der Autor gibt eine Einführung in die klassischen Methoden und Sätze der algebraischen Zahlentheorie. Die Vorkenntnisse für das Verständnis des Buches werden möglichst gering gehalten; im wesentlichen werden nur die Anfangsgründe der Algebra benötigt. Lediglich in den beiden letzten Kapiteln wird von den Grundbegriffen der Funktionentheorie Gebrauch gemacht. Auf die Einführung lokaler Methoden verzichtet der Autor völlig.

Das Buch beginnt mit dem Kummerschen Ansatz für die Behandlung der Fermatschen Vermutung, um damit die Einführung der algebraischen Zahlen zu motivieren. Auch an späteren Stellen wird dieser Faden wieder aufgenommen. Das zweite Kapitel bringt die Sätze über die additive Struktur des Ringes der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers, d. h. es behandelt Ganzheitsbasen und die Diskriminante. Das dritte Kapitel entwickelt die Idealstruktur dieser Ringe. Die Hilbertsche Theorie von Zerlegungsgruppen, Trägheitsgruppen und höheren Verzweigungsgruppen wird im vierten Kapitel abgehandelt. Es folgen dann die Sätze über Diskriminanten-Abschätzungen, Endlichkeit der Klassenzahl und Struktur der Einheitengruppe mittels der Minkowskischen geometrischen Methode. In den Kapiteln 6 und 7 wird die Dedekindsche Zetafunktion eingeführt und zur Herleitung der analytischen Klassenzahlformel herangezogen. Ausgehend von der Verteilung der Primideale gibt das letzte Kapitel einen Ausblick auf einige Aspekte der Klassenkörpertheorie.

Das Buch ist sehr klar geschrieben und besonders für einen Anfänger für die Einarbeitung in das Gebiet der algebraischen Zahlen bestens zu empfehlen. Zu über einem Drittel besteht der Text aus Übungsaufgaben. In diesen werden teils numerische Beispiele behandelt (z. B. quadratische, kubische und biquadratische Zahlkörper, Bestimmung ihrer Diskriminanten, Einheitengruppen, Klassenzahlen usw.), teils auch Ergänzungen der Theorie, wie etwa der Satz von Kronecker und Weber in einer Folge von Aufgaben zum Kapitel 4.

Durch diese zahlreichen Übungsaufgaben ist eine wirkliche Erarbeitung des Stoffes möglich. Der Autor verzichtet bewußt auf viele Abstraktionen und legt Wert auf eine gute Begründung der eingeführten Begriffe.

Erlangen J. Köhn

Moishezon, B., Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes (Lecture Notes in Mathematics 603), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, 10 Figs. III + 234 pp, DM 25,–

Für die topologische Untersuchung singularitätenfreier einfach zusammenhängender kompakter komplexer Flächen X stehen ein Homotopie- und ein h-Kobordismus-Klassifikationssatz zur Verfügung: Zwei solche Flächen X und X′ sind genau dann vom gleichen orientierten Homotopietyp, wenn die durch die Schnittformen S(X) bzw. S(X′) auf der zweiten ganzzahligen Homologie $H_2(X, \mathbf{Z})$ bzw. $H_2(X', \mathbf{Z})$ definierten Strukturen von inneren Produkträumen isomorph sind (Milnor-Whitehead); dies ist genau dann der Fall, wenn X und X′ h-kobordant sind (Wall). Da für die reelle Dimension vier das h-Kobordismus Theorem von Smale nicht bewiesen ist, kann man damit nicht weiterschließen, daß X und X′ dann bereits bezüglich der zugrunde liegenden $\mathscr{C}^\infty$-Strukturen diffeomorph sind. Immerhin hat Wall gezeigt, daß X und X′ in folgendem Sinne „stabil" diffeomorph sind (dabei bezeichnet # die zusammenhängende Summe und $kS := S \# \ldots \# S$): „Für hinreichend große k sind $X \# k(\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1)$ und $X' \# k(\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1)$ diffeomorph." Daraus folgt die Existenz eines Diffeomorphismus

$$(*) \qquad X \# k\mathbf{P}_2 \# \ell\overline{\mathbf{P}}_2 \cong m\mathbf{P}_2 \# n\overline{\mathbf{P}}_2$$

mit geeignet gewählten $k, \ell, m, n \in \mathbf{N}_0$ (dabei bezeichnet $\overline{\mathbf{P}}_2$ die komplex projektive Ebene mit der nicht kanonischen Orientierung).

Wesentliches Ziel der vorliegenden Lecture Notes ist es, eine Diffeomorphie (*) mit möglichst kleinen k und ℓ zu finden. Dazu wird folgendes allgemeine Resultat gezeigt (Theorem A): Ist b_+ bzw. b_- die Zahl der (mit Vielfachheiten gezählten) positiven bzw. negativen Eigenwerte der symmetrischen Bilinearform S(X), so existieren Polynome $P_1, P_2 \in \mathbf{Z}[T]$, so daß (*) für $k = P_1(b_+)$ und $\ell = \max(0, P_2(b_+) - b_-)$ gilt. Dieses Ergebnis wird folgendermaßen verschärft: Aus der Kodaira Klassifikation der Bimeromorphieklassen von Flächen folgt, daß X zu einer rationalen, einer elliptischen oder einer algebraischen Fläche von allgemeinem Typ diffeomorph ist. Rationale Flächen sind diffeomorph zu $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ oder zu $\mathbf{P}_2 \# m\overline{\mathbf{P}}_2$ (d. h. zu einer in m Punkten aufgeblasenen projektiven Ebene). Für elliptisches X ist $k = 1$ und $\ell = 0$ wählbar (dann gilt $m = b_+(X) + 1$ und $n = b_-(X)$). Für projektiv algebraisches $X \to \mathbf{P}_j$ mit $j \geqslant 5$, das nicht in einem $\mathbf{P}_4$ enthalten ist, sind ebenfalls $k = 1$ und $\ell = 0$ wählbar (dann gilt $m = \frac{d}{3}(d^2 - 6d + 11) - b_+(X)$ und $n = \frac{d-1}{3}(2d^2 - 4d + 3) - b_-(X)$). – Das letzte Resultat wird allgemeiner für den Fall bewiesen, daß X als Singularitäten höchstens rationale Doppelpunkte hat. – Der umfangreiche Beweis beruht wesentlich auf einer subtilen Anwendung differentialtopologischer Schneide- und Klebetechniken sowie auf einer genauen Analyse von Faserungen. Für die Untersuchung von Projektionen projektiv algebraischer Flächen in den $\mathbf{P}_3$ wird ein klassischer Satz von Severi auf irreduzible Flächen im $\mathbf{P}_5$ mit isolierten Singularitäten übertragen. – Der Text schließt mit einem algebraischen Anhang von R. Livne, der sich aus der Untersuchung der globalen Monodromie motiviert.

Konstanz L. Kaup

Anderson, F. W., Fuller, K. R., Rings and Categories of Modules (Graduate Texts in Mathematics 13), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1974, VIII + 339 pp., DM 46,–

Faith, C., Algebra II Ring Theory (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 191), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1976, XVI + 302 pp., cloth, DM 98,–

Lehrbücher über Ringe und Moduln erscheinen in jüngster Zeit zahlreich, und das ist gut so. Homologische und kategorielle Methoden haben das Bild der Algebra verändert. Der Springer-Verlag legt zu dem Thema zwei Werke vor, die sich entsprechend der unterschiedlichen Zielsetzung der beiden Reihen (s. o.) unterscheiden.

Anderson und Fuller geben eine moderne Einführung in die Grundbegriffe der Ringe und Moduln. Kategorien werden gerade so weit benutzt, wie sie zu einer durchsichtigen Beschreibung förderlich sind. Mit Gewinn bedienen sich die Verfasser des Dualitätsprinzips und erhalten eine große Symmetrie in der Darstellung vieler fundamentaler Begriffspaare: direkte Summe – direktes Produkt, Generator – Cogenerator, Sockel – Radikal, projektiver Modul – injektiver Modul usw. Der Leser versteht bei so viel Symmetrie am Ende nicht, warum es zwar stets eine injektive Hülle, aber nur manchmal eine projektive cover gibt. Metaphysik aber ist verpönt.

Faith liefert in dem 2. Band seiner Algebra: „Ring Theory“ eine zum Teil sehr ins einzelne gehende Beschreibung einiger Klassen von Ringen, meist „kleiner“ Ringe wie semilokale, perfekte, Quasi-Frobenius, uniserielle Ringe. Die Kategorien, die in Bd. I eine so beherrschende Rolle spielen, sind nahezu wieder verschwunden. Triumphierend wird der Kategoriengegner feststellen: „Wenn es um konkrete Ringe geht, braucht man die Kategorien nicht.“ Das berührt den entscheidenden Punkt: Trägt das Buch den Titel „Ring Theory“ mit Recht oder müßte es nicht „Theories of some types of rings“ heißen? Man vergleiche unter diesem Gesichtspunkt N. Jacobsons Buch „Structure of Rings“. Ist es ein Zufall, daß Jacobsons Buch da anfängt, wo Faith aufhört? Es ist nämlich grundsätzlich fraglich, ob man mit der Methode: beschreibe alle Ringe mit der Eigenschaft E! eine Theorie der Ringe erhält; schon deshalb, weil es vermutlich unendlich viele Eigenschaften E gibt. Die „Symbiose zwischen Ringen und Moduln“, auf die der Autor völlig zu Recht hinweist, ist tiefgründiger als es in dem Buch sichtbar wird, zumindest geböte die Partnerschaft dieser Symbiose, das Problem auch so zu stellen: Kennzeichne die Klasse derjenigen Ringe, die Endomorphismenringe eines Moduls der Eigenschaft E sind! Ein Beispiel: Einen relativ breiten Raum nehmen in beiden Büchern die semiperfekten Ringe sowie direkte Zerlegungen von Moduln ein, insbesondere von Azumaya-Moduln M, (d. h. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ und End M_i ist lokaler Ring für jedes $i \in I$). Ein Ring ist semiperfekt genau dann, wenn er Endomorphismenring eines Azumayamoduls mit endlichem I ist – ein schönes Beispiel für die oben zitierte Symbiose, das auch gebührend gewürdigt wird (S. 38). Aber es ist der Stand der Dinge, bevor Azumaya sie untersucht hat; die Ehrung (Faith sagt „M hat ein Azumaya-Diagramm“ statt „Azumaya-Modul“) wird zur Blasphemie, wenn Azumayas Theorie seiner „semiprimären Ringe“.

Heyer, H., Probability Measures on Locally Compact Groups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 94), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, X + 531 pp., cloth, DM 120,–

Als 1963 das Pionierwerk „Probabilities on Algebraic structures“ von Ulf Grenander er-

[illegible]

ster mathematischer Disziplinen Freunde gewinnen würde, und daß die Entwicklung sehr rasch fortschreiten würde. Grenander zählt am Schluß des Buches eine Reihe offener Probleme auf, die zum größten Teil den Fall nichtabelscher lokalkompakter topologischer Gruppen betreffen. Dabei wurde klar, daß man in der Folge sehr viele Typen von algebraischen Strukturen untersuchen mußte, um Erfahrungen im Umgang damit zu sammeln, und um insbesondere Theorien zu entwickeln, die auch praktisch anwendbar sind. Hatte Grenander den Maßen auf lokalkompakten Gruppen drei Kapitel gewidmet, so behandelt das vorliegende Buch von H. Heyer nur diesen einen Punkt und beschränkt sich dabei auf Untersuchungen, die noch nicht in Lehrbuchform publiziert sind.

Ein Blick in das Literaturverzeichnis zeigt die Vielzahl von Arbeiten, die in den letzten Jahren auf diesem Gebiet erschienen sind, und zeigt, daß ein Lehrbuch, das den heutigen Stand der Entwicklung systematisch darstellt, geschrieben werden mußte.

Das Buch beginnt mit einem Vorspann über lokalkompakte und insbesondere maximal fast-periodische Gruppen und deren Struktur-Theorie: Eine übersichtliche Darstellung ohne Be-

Das Hauptgewicht liegt (3.4, 3.5) auf dem Problem der stetigen Einbettung. Dazu faßt man die Halbgruppe der Wahrscheinlichkeitsmaße $M^1(G)$ (versehen mit der schwachen Topologie) als eine topologische Halbgruppe auf und studiert allgemein die Existenz einparametriger Unterhalbgruppen in topologischen Halbgruppen. Genauer: Gegeben ist eine topologische Halbgruppe und darin ein teilbares Element. Wann gibt es eine stetige einparametrige Unterhalbgruppe, die dieses Element trifft? Der entscheidende Satz (Theorem 3.5.1), der sonst nur dem Spezialisten für topologische Halbgruppen zugänglich ist, wird hier in Abschnitt 3.4 in allen Details

und aller Klarheit bewiesen und dann in Theorem 3.1, Abschnitt 3.5 auf die vorhin geschilderte spezielle Halbgruppe $M^1(G)$ angewandt: Es wird die Struktur jener Gruppen untersucht, die das Einbettungsprinzip erfüllen, d. h. bei denen jedes unendlich teilbare Maß in $M^1(G)$ stetig einbettbar ist.

Es soll besonders hervorgehoben werden, daß das Buch sowohl als Lehrbuch als auch Nachschlagewerk geeignet ist: Es bietet dem interessierten Leser einen Einstieg in eine Theorie, die gewöhnlich durch die Vielfalt der verwendeten Hilfsmittel abschreckt, es bietet aber auch dem Spezialisten eine Fülle von Informationen. Nicht zuletzt deshalb, da das Buch im Anschluß an jedes Kapitel einen Abschnitt mit Kommentaren und Literaturhinweisen enthält, wobei vor allem auch Hinweise auf Arbeiten gegeben werden, die im Text nicht ausführlich behandelt werden konnten und daher dem Leser beim weiteren Studium insbesondere bei der Suche nach Anwendung der Theorie hilfreich sind (das Literaturverzeichnis umfaßt 515 Titel!).

Dortmund W. Hazod

Jörgens, K., Rellich, F., Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, bearbeitet von J. Weidmann (Hochschultext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1976, IX + 227 pp., DM 31,–

Magnus, K., Schwingungen (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Bd. 3 – Teubner Studienbücher), Stuttgart: B. G. Teubner 1976 (3. Auflage), 197 Abb., 251 S., kart., DM 24,80

Die in der dritten Auflage vorliegende Einführung in die theoretische Schwingungslehre wendet sich an Ingenieure, Physiker und Mathematiker (in dieser Reihenfolge), und ist daher auch induktiv (problemorientiert) aufgebaut. Viele Aufgaben ermöglichen die Selbstkontrolle und erweitern das Blickfeld für weitere Anwendungen.

In mathematischer Hinsicht liefern die Differentialgleichungen der Schwingungslehre ein besonders interessantes Anwendungsgebiet mit vielfältigen Strukturen. Während sich im akademischen Unterricht der Mathematiker vielfach eine Neigung feststellen läßt, die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf einen Hauptsatz zu reduzieren, der zur Rechtfertigung der Funktionalanalysis dient, vermittelt diese Einführung dem Mathematiker einen Einblick in die Vielfalt der mathematischen Methoden und Verfahren auf dem Gebiet der Differentialgleichungen.

Da alle hier vorgetragenen Probleme einen direkten technischen Ursprung haben, kann das Buch jedem Mathematiker bestens empfohlen werden, der eine Einführung in die Begriffs- [illegible]

Die Grundtendenz der Darstellung kommt dem Mathematiker sehr entgegen und liefert ihm auch viele Beispiele, die das Lesen reizvoll machen.

Aachen C. Müller

Eisenack, G., Fenske, C., Fixpunkttheorie, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1978, 258 S., kart., DM 38,–

In dem vorliegenden Lehrbuch werden die topologischen Ergebnisse über das Auflösen von Gleichungen, oder wenn man es so sehen will, über Fixpunkte von Abbildungen dargestellt, welche aus den Eigenschaften des Abbildungsgrades und der Fixpunktformel von Lefschetz folgen.

Das Buch beginnt mit einer ausführlichen Diskussion des Kontraktionslemmas („Banachscher Fixpunktsatz"), und es folgen Kapitel über:

[illegible]

satz von Lefschetz, den Abbildungsgrad, Verzweigungstheorie, den Fixpunktindex (was einer genaueren Deutung der Lefschetzschen Formel durch Abbildungsgrade lokal um die Fixpunkte dient), Fixpunktsätze für die Iterierten einer Abbildung und etwas über Fixpunkte mengenwertiger Abbildungen.

Es handelt sich hier um ein überaus fleißig und bemüht zusammengetragenes Lehrbuch

[illegible]

zum Gebrauch für Studenten, die auf dem Gebiet der topologischen Linearen Algebra („Funktionalanalysis") geschult sind und Vorkenntnisse besitzen, die durch ein diesbezügliches deutschsprachiges Lehrbuch genau beschrieben werden. Auch gehen die Autoren davon aus, daß ihre Leser von den topologischen Methoden, um die es geht, weder Kenntnisse besitzen, noch mehr davon lernen mögen, als für den eben angestrebten Zweck unmittelbar notwendig ist.

Diese vielleicht allzu realistische Einschätzung führt dazu, daß der Leser im dritten Kapitel eine klassische Version der Lefschetzschen Fixpunktformel erlernen soll, und dazu erst einmal die Definition der Homologie (singulär und simplizial) zur Kenntnis nehmen muß. Allerdings wird der Unterricht in Homologietheorie erst im Anhang zum Abschluß gebracht, mit einem Beweis

Autors zitiert wird. Das Schulmäßig-Technische überwuchert auch bei der Erklärung der zentralen Begriffe. Der schöne und fast möchte man sagen naive geometrische Gehalt des Abbildungsgrades geht verloren, wenn man aufnehmen soll, daß „df(x) zu der im Anhang A.1.10 beschriebenen Menge F(X) von stetigen linearen Operatoren" gehört.

Jedoch ist es verdienstlich, mit welcher Mühe und Sorgfalt die Autoren eine wichtige Technik der Analysis dargestellt haben, die nicht einfach zu gewinnen ist, und das etwas Schwerfällige kommt auch aus dem redlichen Bestreben, alles genau zu beweisen.

Das eigentliche Ziel in dem Buch ist die Anwendung der starken topologischen Methoden auf Probleme der Analysis. Eine Fülle von Beispielen, vornehmlich aus der Theorie der Differential- und Integralgleichungen, dient diesem Ziele. Das reiche Literaturverzeichnis von 248 Titeln ist nicht etwa zur Verzierung angehängt, sondern es legt Zeugnis für die Arbeit der Autoren ab, eine nützliche Arbeit, der wir einen fruchtbaren Boden bei den angesprochenen Lesern wünschen.

Regensburg Th. Bröcker

Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1977, XIII + 188 pp., cloth, DM 54,60

Das vorliegende Buch, erster Teil eines auf vier Bände konzipierten Gesamtwerkes, ist auf dem Gebiet der Banachräume – vor allem ihrer „geometrischen" Theorie – ohne Frage die wichtigste Neuerscheinung seit langer Zeit. Es enthält eine Fülle neuer und neuester Resultate in ausgezeichneter (wenngleich anspruchsvoller) Darstellung und macht so den immensen Fortschritt deutlich, der in Ergebnissen und Methoden seit dem Erscheinen der berühmten Banachschen Monographie (Théorie des Opérations Linéaires, Warschau 1932) erzielt worden ist. Dieser Fortschritt besteht vor allem in der Beantwortung von Strukturfragen, etwa: Einbettbarkeit, Charakterisierung komplementierter Teilräume, Existenz und Eindeutigkeit verschiedener Typen von (Schauder-)Basen. (Die Theorie der sogenannten lokalen Struktur ist Band IV vorbehalten.) Das Buch enthält überdies zahlreiche zur Zeit der Drucklegung noch offene Probleme.

Als Verdeutlichung für Stil und Anspruch des Buches kann bereits das 1. Kapitel dienen. Neben allen wichtigen Ergebnissen über (Schauder-)Basen und unbedingte Basen samt zugehörigen Beispielen finden sich hier der Satz von Dvoretzky-Rogers (in seiner starken Form mit vollständigem Beweis), eine ausführliche Diskussion der Approximationseigenschaft und ihrer metrischen Varianten (das Enflosche Gegenbeispiel, vereinfacht nach Davie, folgt in Kap. 2), sowie das klassische Jamessche Beispiel eines Banachraumes J, der zu seinem Bidual J^{**} isometrisch-isomorph ist, aber in J^{**} ein kanonisches Bild der Kodimension 1 besitzt. Das 2. Kapitel beschäftigt sich näher mit dem zentralen Thema, den Räumen c_0 und l_p ($1 \leqq p \leqq \infty$). Als Beispiel eines tiefliegenden Resultates sei erwähnt, daß diese Banachräume prim sind; sie sind z. Z. die einzigen bekannten Beispiele solcher Räume. (Ein B-Raum X heißt prim, wenn jeder seiner unendlichdimensionalen komplementierten Teilräume zu X isomorph ist). Des weiteren sind die Räume c_0, l_1, l_2 durch die Eindeutigkeit (bis auf Äquivalenz) von unbedingten Basen charakterisiert. Die Theorie der Operatorenideale in allgemeinen Banachräumen wird soweit entwickelt, daß sie zum Strukturstudium der klassischen Folgenräume herangezogen werden kann. Das 3. Kapitel beschäftigt sich mit symmetrischen Basen und deren Zusammenhang mit unbedingten Basen (erstere bilden eine Unterklasse der letzteren), während das 4. Kapitel die Orliczschen Folgenräume eingehend behandelt; es zeigt sich, daß diese Räume im allgemeinen eine wesentlich kompliziertere Struktur besitzen als die Spezialfälle c_0 und l_p.

Den Autoren, die neben anderen (etwa W. B. Johnson, A. Pelczynski, H. P. Rosenthal, um nur einige wenige zu nennen) entscheidend zu Fortschritt und Reife dieser Theorie beigetragen haben, darf und muß man zu dem wohlgelungenen Werk gratulieren. Es verbindet die Vollständigkeit eines Ergebnisberichtes mit der Eleganz eines anspruchsvollen Lehrbuches und dürfte für jeden fortgeschrittenen Studenten der Funktionalanalysis, erst recht aber für jeden Funktionalanalytiker, unentbehrlich sein.

Tübingen H. H. Schaefer

Bergh, J., Löfström, J., Interpolation Spaces, An Introduction. (Grundlehren der math. Wiss., Bd. 223), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1976, 5 figs. X, 207 p., DM 60,–; US $ 24.60.

Die Theorie der Interpolation in abstrakten Banach-Räumen, quasi Banach-Räumen und allgemeineren Strukturen hat in der Funktionalanalysis und ihren Anwendungen während der chene Monographie nicht zuletzt wegen ihrer klaren Gliederung und vielleicht gerade wegen ihrer etwas gestrafften Darstellungsweise hervorragend geeignet, sich in kurzer Zeit einen umfassenden Einblick in abstrakte Interpolationsmethoden zu verschaffen.

Aachen P. L. Butzer und G. Wilmes

Weidmann, J., Lineare Operatoren in Hilberträumen (Mathematische Leitfäden), Stuttgart: B. G. Teubner 1976, 364 pp., kart., DM 58,–

Ein modernes Buch über den Hilbert-Raum sollte sich heute nicht mehr mit dem bloßen Hinweis begnügen, daß diese Theorie auch für die moderne Physik von ganz hervorragender Bedeutung ist, um dann vielleicht noch den Koordinaten- oder Impulsoperator als Beleg dafür heranzuziehen.

Dieses Gebiet ist so stark durch die Bedürfnisse der Physik befruchtet worden, daß der Leser Einblick gewinnen sollte in dieses faszinierende Wechselspiel, indem ihm gezeigt wird, daß die Sätze der Theorie auch das zu leisten vermögen, was zur Naturbeschreibung nötig ist.

Herr Weidmann hat diesen Gesichtspunkten in hervorragender Weise Rechnung getragen.

Am Anfang stellt er die Begriffe „orthogonal" und „selbstadjungiert" in den Mittelpunkt, die von gleich großer Bedeutung für den Mathematiker wie für den Physiker sind und jegliches Abschweifen zu allgemeineren Räumen – wie man es oft in der Lehrbuchliteratur findet – verhindern. Dabei werden konsequent von Beginn an auch unbeschränkte Operatoren zugelassen, die für die Anwendungen schädliche Zerlegung der Theorie in beschränkte und unbeschränkte Operatoren wird vermieden. Die Spektralzerlegungen für selbstadjungierte und normale Operatoren sowie der Darstellungssatz von Stone über die unitären Operatoren sind nach ca. 200 Seiten erreicht. Es folgen dann Ergänzungen, wie die Theorie der Defektzahlen, die Konstruktion selbstadjungierter Fortsetzungen symmetrischer Operatoren, die Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren, Fouriertransformation u. a.

Anschließend wird tief eingedrungen in die Theorie der Schrödinger-Operatoren bis hin zu genauen Aussagen über ihr Spektrum. Hier findet auch der Fachmann zahlreiche neue Beweisvarianten. Der Autor läßt dabei auch Magnetfelder zu und begnügt sich nicht mit den schon recht scharfen Aussagen über das kontinuierliche Spektrum und der Aussage, daß der negative Teil des Spektrums aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht, die nach unten beschränkt sind und sich höchstens bei Null häufen können, sondern gibt weitreichende Bedingungen an (Satz 10.31), unter denen solche Eigenwerte tatsächlich vorhanden sind. Eine Übertragung auf Dirac-Operatoren schließt sich an. Ein Kapitel über die moderne Streutheorie bildet den Abschluß.

Ein solches Buch, welches den Leser bis zu den neuesten Resultaten führt, fordert selbstverständlich auch eine harte Mitarbeit von dem Leser. Die Darstellung ist aber so gewählt, daß die erste Hälfte schon vor dem Vorexamen gut zugänglich ist (zumal ein vollständiger Abriß der Lebesgueschen Integration mit Beweisen im Anhang beigegeben ist), die sehr weitreichenden Anwendungen auf die Quantenmechanik dagegen werden sich schon von der Fragestellung her erst nach dem Vorexamen stellen.

Aachen G. Hellwig

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Hinweise für Autoren

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig satzfertiger Form (einseitig beschriebenes Manuskript, Schreibmaschinenschrift 1 1/2-zeilig) und entsprechend den nachstehenden Richtlinien ausgezeichnet einzureichen.

Der Beginn von Absätzen oder neuen Abschnitten sollte deutlich durch Einrücken gekennzeichnet sein. In jedem Fall sollte ein Hinweis für den Setzer, in dem alle Besonderheiten aufgeführt sind, beigefügt werden.

Ferner sollten die Manuskripte entsprechend dem Subject Classification Schemes der Mathematical Reviews (AMS/MOS) klassifiziert sein. Am Ende der Manuskripte sollte die genaue Anschrift des oder der Verfasser angegeben werden. Zuschriften sowie die Versendung der Korrekturabzüge erfolgen, sofern nicht anders vermerkt, immer an den erstgenannten Autor.

Zeichnungen sollten fortlaufend numeriert werden und auf gesonderten Blättern in Form von klaren Bleistiftzeichnungen im richtigen maßstäblichen Verhältnis möglichst in doppelter Größe dem Manuskript beigefügt werden. Am linken Rand des Textes sollte ein Hinweis auf die jeweils einzufügende Figur angebracht werden.

Fußnoten sollten auf der jeweiligen Seite, auf die sie Bezug nehmen, angebracht werden (nicht am Ende des Textes). Literatur sollte in folgender Weise zitiert [1] und dann am Ende des Textes in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt werden. Verweise sollten in folgender Form vorgenommen werden:

[1] Neven, J.: Martingale Problems. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **79** (1957) 175–180

[2] Wittenburg, J.: Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner 1977. = Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 33.

Um eine rasche Veröffentlichung zu erreichen, erhalten die Autoren nur einen Korrekturabzug. Die Autoren werden gebeten, nur Druckfehler zu korrigieren. Sollten weitere Korrekturen wie Einfügungen oder Streichungen vorgenommen werden, müssen diese dem Autor berechnet werden. Die von den Autoren durchgesehenen Korrekturabzüge sind umgehend an den Herausgeber zurückzusenden.

Die Autoren erhalten von ihren Arbeiten nach Veröffentlichung 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich. Zusätzliche Sonderdrucke können gegen entsprechende Berechnung zum Zeitpunkt der Rückgabe der Korrekturen bestellt werden.

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Auszeichnungen für den Satz

Die im Manuskript enthaltenen Formelbuchstaben werden generell steil gesetzt. Besondere Schriftarten sind entsprechend den folgenden Richtlinien farblich auszuzeichnen.

gestrichelte schwarze Unterstreichung	– S p e r r u n g
doppelte schwarze Unterstreichung	– **halbfett** (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in Formeln)
grüne Unterstreichung	– *kursiv* (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in den Formeln)
doppelte grüne Unterstreichung	– **halbfette lateinische Buchstaben** (in Formeln)
rote Unterstreichung	– griechische Buchstaben
lila Unterstreichung	– Groteskbuchstaben
doppelte lila Unterstreichung	– halbfette Groteskbuchstaben z. B. für **R**, **N**, **C** usw.
blaue Unterstreichung*)	– Fraktur
gelbe Unterstreichung	– Großbuchstabe O (zur Unterscheidung von der Ziffer Null)
gelb eingekastelt*)	– Skript
lila eingekastelt	– logische und mengentheoretische Symbole wie z. B. $\exists$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, sowie Malkreuz x und Verknüpfungszeichen $\circ$
grün eingekastelt	– Kleinbuchstabe ℓ (zur Unterscheidung zur Ziffer eins (1))

Die Bezeichnungen Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Definition usw. werden üblicherweise halbfett gesetzt. Der danach folgende Text (bis auf Formelbuchstaben) wird kursiv gesetzt. Die Bezeichnungen Beweis, Bemerkung, Hinweis usw. werden normal gesetzt, jedoch gesperrt. Der nachfolgende Text wird in normaler Schrift gesetzt.

Mathematische Formeln sollten so deutlich geschrieben werden, daß kein Mißverständnis möglich ist. Die Autoren werden gebeten, insbesondere deutlich zu unterscheiden zwischen Großbuchstaben und Kleinbuchstaben, Null sowie kleinem o und großem O, griechischen Buchstaben φ, Φ, κ, K, θ, Θ, Strich (z. B. Ableitungsstrich) und Apostroph. Ferner sollte darauf geachtet werden, daß keine Verwechslung zwischen k, K, r, u, v (lateinisch) und κ, μ, ν (griechisch) sowie $\in$ und ϵ (griechisch) möglich ist.

*) Von der Verwendung dieser Schriftarten ist beim Composersatz nach Möglichkeit abzusehen.

B. G. Teubner, Postfach 80 10 69, D-7000 Stuttgart 80