Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 112. Bd. 2010, Nr. 1

Vorwort

In seinem mathematisch und menschlich sehr bewegenden historischen Beitrag über die Lemberger Mathematikerschule beschreibt Roman Duda, wie sich dort zwischen 1920 und 1940 eine hinsichtlich ihrer Größe, Bedeutung und Wirksamkeit ganz außerordentliche Gruppe von Mathematikern gefunden hat. Insbesondere, aber nicht nur in der linearen wie nichtlinearen Funktionalanalysis sind viele Wurzeln in Lemberg (damals Polen, Lwów, heute Ukraine) zu finden. Namen wie Banach, Steinhaus und Schauder machen das exemplarisch deutlich, allerdings geht die Lemberger Schule ganz wesentlich über diese drei großen Vertreter hinaus. In Deutschland muss die Beschäftigung mit dieser Schule eine besondere Betroffenheit hervorrufen. Nicht so sehr deswegen, weil mit Steinhaus einer ihrer Kristallisationspunkte in Göttingen bei Hilbert promoviert hat, sondern vielmehr, weil mit dem zweiten Weltkrieg, dem deutschen Überfall auf Polen und die Sowjetunion und 1941 der Eroberung des zunächst sowjetisch besetzten Lemberg diese blühende Mathematikerschule ihr brutales Ende fand. Mehr als die Hälfte deren Mitglieder hat den zweiten Weltkrieg nicht überlebt; viele von ihnen wurden von Deutschen ermordet. Steinhaus konnte sich gerade noch rechtzeitig verbergen, hat den Krieg unter falschem Namen und mit falschen Papieren überlebt und war anschließend noch lange Zeit in Breslau aktiv.

Am 25. November 2008 verstarb in Zürich im Alter von 91 Jahren Beno Eckmann, ein großer Vertreter der Algebra und Topologie, dessen Schaffensperiode weit mehr als ein halbes Jahrhundert umfasst. In ihrem Nachruf stellen Max-Albert Knus, Guido Mislin und Urs Stammbach Eckmanns Wirken an der und für die ETH Zürich dar und beleuchten einige von Eckmanns Arbeitsschwerpunkten und wichtigsten Ergebnissen. Eckmanns Name ist in der ganzen Mathematik bekannt u.a. durch sein Wirken in der Internationalen Mathematischen Union und seine langjährigen Herausgebertätigkeiten für die „Grundlehren"-Reihe und – mitbegründend – für die Springer Lecture Notes in Mathematics.

Berichte aus der Forschung sollen, so wünscht es sich das Herausgebergremium, künftig ein stärkeres Gewicht im Jahresbericht erhalten. Stefan Müller-Stach berichtet aus der erfolgreichen Arbeit des SFB/Transregio „Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten", der in Bonn, Essen und Mainz (Sprecherhochschule) beheimatet ist. Seine Reise durch die Mathematik dieses Forschungsverbundes bettet er ein in eine Darstellung des Förderinstruments SFB/Transregio, das sich offenbar bewährt hat und daher kürzlich von der DFG dauerhaft etabliert worden ist. Während der Drucklegung dieses Heftes verstarb am 30. Januar Eckart Viehweg. Seine Verdienste um die Mathematik sollen in einem späteren Heft ausführlich gewürdigt werden.

Buchbesprechungen runden in bewährter Weise dieses Heft ab.

Hans-Christoph Grunau

Die Lemberger Mathematikerschule

Roman Duda

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 01A60, 01A72
- Keywords and Phrases: Lvov school, Banach space, linear operators, measure theory, Scottish Book
  Schlagwörter: Lemberger Schule, Banachraum, lineare Operatoren, Maßtheorie, Schottisches Buch

The Lvov school of mathematics lasted from 1920 to1940 and the article tells its story in the light of historical events: Lvov university before 1918, the Polish-Ukrainian war 1918–1919 and the Polish-Soviet war 1919–1920, origins of the school and two decades of its full bloom, world war II (first Soviet occupation 1939–1941, German occupation 1941–1944, the return of the Soviets 1944). More than half of the active members of the school lost their lives during world war II and expelling 1945–1946 the Polish population by the Soviets brought the ultimate end of the school.

Dieser Beitrag berichtet über die Geschichte der Lemberger Schule auf dem Hintergrund historischer Ereignisse: Die Lemberger Universität vor 1918, der polnisch-ukrainische Krieg 1918–1919, der polnisch-sowjetische Krieg 1919–1920, die Ursprünge der Lemberger Mathematikerschule und zwei Jahrzehnte ihrer vollen Blüte, der zweite Weltkrieg (erste sowjetische Besetzung 1939–1941, deutsche Besetzung 1941–1944, Rückkehr der Sowjets 1944). Mehr als die Hälfte der aktiven Mitglieder der Schule hat ihr Leben während des zweiten Weltkriegs verloren. Die Vertreibung der polnischen Bevölkerung durch die Sowjets brachte 1945–1946 das endgültige Ende der Lemberger Schule.

Eingegangen: 13.09.2009

Roman Duda, Institute of Mathematics, University of Wrocław,
Grunwaldzki 2/4, Pl-50384 Wrocław, Poland, romanduda@poczta.onet.pl

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

1 Die Universität

Das Hauptgebäude der Lemberger Universität

Plac Halicki mit der Bernhardiner Kirche im Hintergrund

Als König Jan Kasimir 1661 in Lemberg (polnisch Lwów) eine Universität gründete, war das bereits die dritte auf dem Territorium des polnisch-litauischen Königreichs, nach der Krakauer (1364) und Wilnaer (1578). Österreich annektierte im Jahre 1772 Lemberg mit ganz Galizien (1. polnische Teilung) und herrschte dort bis 1918. Die Lemberger Universität führte als Provinzuniversität lange ein untergeordnetes Dasein, erst nach Erlangung der Autonomie durch Galizien (mit der Hauptstadt Lemberg) und nach Einführung von Polnisch als Unterrichtssprache begann ihre erfolgreiche Entwicklung. In den Jahren 1872–1889 war dort Wawrzyniec Żmurko (1824–1889) Professor für Mathematik und nach ihm Józef Puzyna (1856–1919). Ersterer hatte in Wien studiert, sein Nachfolger war auch sein Schüler, beendete sein Studium aber in Berlin, u.a. bei Karl Weierstraß. Im Jahre 1908 kam Wacław Sierpiński°[1] nach Lemberg, habilitierte sich und wurde außerordentlicher Professor. Er versammelte junge Mathematiker um sich wie Zygmunt Janiszewski°, Stefan Mazurkiewicz° und Stanisław Ruziewicz°. Alle drei erzielten in der damals neuen Mengentheorie und mengentheoretischen Topologie originelle Ergebnisse, die sie in polnischen (aber in französischer Sprache) und französischen Zeitschriften publizierten. Für die Lemberger Universität war das im wesentlichen eine gute Zeit. Als Professoren lehrten dort damals u. a. auch der bedeutende Physiker Zygmunt Smoluchowski (1872–1917), der Begründer der Lemberger philosophischen Schule Kazimierz Twardowski (1866–1938)[2] und der bekannte Sibirienforscher Benedykt Dybowski (1833–1930). Es war also eine gute Universität, und dort arbeitete eine ehrgeizige Gruppe junger Mathematiker.

Der Ausbruch des 1. Weltkrieges 1914 hatte jedoch den Zerfall der Mathematikergruppe zur Folge. Sierpiński°, der bei Kriegsausbruch in Russland weilte, wurde dort

[1] Das Zeichen ° weist darauf hin, dass die betreffenden Personen in der am Ende des Beitrages beigefügten Aufstellung einiger Vertreter der Lemberger Mathematikerschule aufgeführt sind. Beim ersten Auftreten des Namens ist auch der Vorname angegeben.

[2] J. Woleński, *Die philosophische Lemberg-Warschauer Schule,* Warszawa: PWN, 1985 [Polnisch]; J. Woleński, *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School,* Synthèse Library, Dordrecht: Kluver, 1988.

interniert. Janiszewski° meldete sich freiwillig zu den polnischen, gegen Russland kämpfenden Legionen, und Mazurkiewicz° kehrte in seine Heimatstadt Warschau zurück. Darüber hinaus brach unmittelbar nach Beendigung des 1. Weltkrieges zunächst der polnisch-ukrainische Krieg um Lemberg und Westgalizien aus, und nach seiner für Polen erfolgreichen Beendigung folgte der polnisch-sowjetische Krieg um Polen, der mit der für Polen erfolgreichen Unterbrechung des Marsches der Roten Armee auf Polen und Westeuropa sein Ende fand[3]. Nach dem Friedensvertrag mit Sowjetrussland (Riga, 1921) gehörte ganz Galizien einschließlich Lemberg zu Polen, wo die alte Universität seit 1919 den Namen Jan-Kasimir-Universität trug (im Folgenden kurz JKU).

2 Das Programm

Dies war der Hintergrund, auf den sich das Phänomen der Lemberger Mathematikerschule der Jahre 1919–1939 gründete. Diese Schule war das Werk junger, zu ihrer Zeit noch unbekannter Menschen. Um das zu verstehen, müssen wir uns für eine Weile nach Warschau begeben. Bedenken wir, dass sich seit dem Wiener Kongress 1815 der größte Teil des Territoriums des ehemaligen Polens innerhalb der Grenzen des russischen Imperiums befand. Das um Warschau herum gelegene Gebiet erfreute sich anfangs einer gewissen Autonomie (unter dem Zepter des Zaren), die ihm jedoch bald wieder entzogen wurde, nämlich bereits nach der Niederlage im Novemberaufstand des Jahres 1830 gegen Russland. Nun begann eine lange Zeit der schonungslosen Russifizierung; in diesem Zusammenhang wurde 1869 die russischsprachige Kaiserliche Universität in Warschau gegründet. Sie erreichte nicht das Niveau der anderen russischen Universitäten, und für polnische Studenten war es leichter, an jene Universitäten zu gelangen als an die in Warschau. Von 1906 an wurde diese Universität von der polnischen Jugend bereits offen boykottiert. Nach Ausbruch des 1. Weltkrieges wurde die kaiserliche Universität mit dem gesamten Personal und der Ausstattung nach Rostow am Don evakuiert. Die Besetzung durch Deutschland führte im Herbst 1915 zur Eröffnung einer polnischen Universität, auf deren mathematische Lehrstühle die uns bereits aus Lemberg bekannten Mathematiker Janiszewski° und Mazurkiewicz° berufen wurden. Die gleichzeitig entstandene Zeitschrift „Nauka Polska" schrieb einen Wettbewerb über die Bedürfnisse der polnischen Wissenschaft aus, an dem sich u.a. auch die beiden genannten Leiter der Warschauer mathematischen Lehrstühle beteiligten. Besonders großen Einfluss erlangte der Beitrag von Janiszewski°, der sich bald zu einem Programm der polnischen Mathematikerschule entwickelte[4].

[3] Vgl. N. Davies, *White Eagle and Red Star. The Polish-Soviet War, 1919–1920*, London 1972.
[4] Z. Janiszewski, *Stand und Bedürfnisse der Mathematik in Polen*, Nauka Polska. Jej potrzeby, organizacja i rozwój 1 (1917), S. 11–18 [Polnisch]; Nachdruck: Wiadom. Mat. 7 (1963), S. 3–8. Über die Bedeutung von Janiszewskis Ideen haben geschrieben: Sister M.G. Kuzawa, *Polish Mathematics. The Genesis of a School in Poland*, New Haven 1968; K. Kuratowski, *A Half Century of Polish Mathematics. Remembrances and Recollections*, Warsaw 1980; K. Kuratowski, *The Past and the Present of the Polish School of Mathematics*, in: I. Stasiewicz-Jasiukowa (Hrsg.), *The Founders of Polish Schools and Scientific Models Write about Their Works*, Wrocław-Warszawa 1989.

Noch heute überrascht die Tiefe und Originalität dieses Programms. Ausgehend von einer Analyse der bestehenden Situation erkannte Janiszewski die Möglichkeit zur „Erringung einer eigenständigen Position für die polnische Mathematik" darin, dass ein bestimmtes, am besten ein neues Gebiet der Mathematik ausgewählt wird (der natürliche Kandidat dafür war die Mengenlehre mit den Bereichen, in denen mengentheoretische Methoden eine bedeutsame Rolle spielen, wie die Theorie reeller Funktionen und die Topologie – das Interessensgebiet der schon nicht mehr existierenden Lemberger Gruppe), dass sich die Arbeit der Mehrzahl der schöpferischen polnischen Mathematiker darauf konzentriert, dass sich eine Atmosphäre der gemeinschaftlichen Arbeit und der Obhut für junge Mitglieder ausbildet und schließlich, dass eine Zeitschrift gegründet wird, die sich ausschließlich dem gewählten Bereich widmet und die ausnahmslos in den internationalen Kongresssprachen publiziert.

Ein solches Programm musste schockieren. Die Auswahl eines einzigen, neuen Bereichs der Mathematik und die Konzentration der Mehrzahl der schöpferischen Mathematiker darauf trug die Gefahr der Vernachlässigung anderer Bereiche in sich, darunter solcher klassischer Bereiche, die von grundlegender Bedeutung waren, wie der Geometrie, der Algebra und der Analysis. Eine nur auf ein und dazu auf ein neues Gebiet der Mathematik eingegrenzte Zeitschrift erschien von Anfang an auf der Verliererseite zu stehen, denn solche thematisch eingegrenzten mathematischen Zeitschriften gab es damals noch nicht. Es gab schwerwiegende Argumente sowohl aus dem Inland wie auch aus dem Ausland[5], und hinzu kam der beleidigte Nationalstolz wegen der Nichtzulassung der polnischen Sprache.

Die Bedingungen gestalteten sich jedoch günstig. Eine Stütze war die wiederentstandene Warschauer Universität, an der die Mathematiker der jungen Generation (Janiszewski°, Mazurkiewicz°) und Studenten (Bronisław Knaster°, Kazimierz Kuratowski° und andere) eine enthusiastische Einstellung hatten, voller Glauben an sich und an die Zukunft. Diese Vision nahm Sierpiński auf, der damals eben aus Russland zurückgekehrt war und 1918 an der Warschauer Universität den dritten Lehrstuhl für Mathematik übernahm:

> Als 1919 wir drei, Janiszewski, Mazurkiewicz und ich, uns als Professoren für Mathematik der wiederentstandenen Warschauer Universität trafen, beschlossen wir, die von Janiszewski entworfene Idee der fremdsprachigen Herausgabe einer der Mengenlehre, der Topologie, der Theorie der reellen Funktionen und der mathematischen Logik gewidmeten Zeitschrift zu realisieren. Auf diese Weise entstanden die „Fundamenta Mathematicae"[6].

[5] Vgl. H. Lebesgue, *À propos d'une nouvelle revue mathématique „Fundamenta Mathematicae"*, Bull. Soc. Math. France 46 (1922), S. 35–46; P. Dugac, *N. Lusin: Lettres à Arnaud Denjoy avec introduction et notes*, Arch. Intern. de l'Histoire des Sciences 27 (1977), S. 179–206 (übersetzte Ausschnitte in: Wiadom. Mat. 25.1 (1983), S. 65–68 [Polnisch]).

[6] W. Sierpiński, *Über die polnische mathematische Schule*, in: J. Hurwic (Hrsg.), *Der Beitrag der Polen zur Wissenschaft. Die exakten Wissenschaften*, Biblioteka Problemów 101, Warszawa 1967, S. 413–434 [Polnisch]. Zur Rolle der Zeitschrift s. auch: Sister M.G. Kuzawa, *„Fundamenta Mathematicae' – an examination of its founding and significance*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), S. 485–492; R. Duda, *„Fundamenta Mathematicae" and the Warsaw School of Mathematics*, in: C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter (Hrsg.), *L'Europe mathématique – Mythes, histories, identités / Mathematical Europe – Myths, History, Identity*, Paris 1996, S. 479–498.

So bildete sich die Warschauer Mathematikerschule, konzentriert auf die „Mengentheorie und ihre Anwendungen“ (Zitat vom Umschlag der Zeitschrift), das heißt auf die reine Mengenlehre, die mengentheoretische Topologie, die Theorie der reellen Funktionen und die mathematische Logik. Die Schule konnte schon bald Erfolge verzeichnen, und nach dem frühen Tod von Janiszewski° (er verstarb im Januar 1920) wurden Sierpiński und Mazurkiewicz ihre Leiter, zu denen sich Jüngere hinzu gesellten, wie Alfred Tarski (1901–1983), Kuratowski°, Stanisław Saks (1897–1942), Karol Borsuk (1905–1982) und weitere.

3 Steinhaus und Banach

In der Zeit des Entstehens der Warschauer Mathematikerschule erwachte auch das mathematische Lemberg wieder zum Leben. Von den aktiven Mathematikern der Vorkriegszeit waren lediglich Ruziewicz° und Antoni Łomnicki° geblieben, doch die Wiedergeburt der Lemberger Mathematik wurde das Werk neuer Leute. Der erste war Hugo Steinhaus°, der in Göttingen studiert hatte, wo er 1911 das Doktorat mit dem Prädikat *summa cum laude* und den Unterschriften von David Hilbert, Carl Runge und P. Hartmann erwarb. 1917 habilitierte er sich an der Lemberger Universität, und als er dort 1920 einen mathematischen Lehrstuhl übernahm, zog er Stefan Banach°[7] nach. Banach, der einige Jahre davor an der Lemberger Technischen Hochschule studiert hatte und dort ein sogenanntes Halbdiplom errang, weilte während des Krieges im heimatlichen Krakau und beschäftigte sich dort als Amateur mit Mathematik.

Als Steinhaus° einmal durch die Krakauer Grünanlagen spazierte, hörte er die Worte „Lebesguesches Integral“, was ihn derart überraschte, dass er herantrat, sich vorstellte und auf diese Weise einige junge Leute kennenlernte, unter denen sich auch Banach° befand, den er später gern scherzhaft als seine „größte wissenschaftliche Entdeckung“ bezeichnete. Bald fanden sie zu gemeinsamer Arbeit[8]. In Lemberg unterstützte er Banach 1920 bei der Erringung des Doktorats (was wegen dessen nicht abgeschlossenen Studiums nicht einfach war), wonach dieser seine Karriere selbstständig erfolgreich fortsetzte: Nach der Habilition 1922 wurde er fast sofort zum außerordentlichen Professor ernannt, und 1927 war er bereits ordentlicher Professor an der JKU.

[7] R. Kałuża, *The Life of Stefan Banach*, Transl. and ed. by A. Kostant and W. Woyczyński, Boston 1996. S. auch E. Jakimowicz, A. Miranowicz (Hrsg.), *Stefan Banach. Remarkable Life, Brilliant Mathematics,* II Aufl., Gdańsk-Poznań 2009; R. Duda, *Facts and Myths about Stefan Banach*, Newsletter of the EMS, Issue 71 (March 2009).

[8] S. Banach, H. Steinhaus, *Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier*, Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, Année 1918, Série A: Sci. Math., S. 87–96; Nachdrucke: S. Banach, *Œuvres I*, Warszawa: PWN, 1967, S. 31–39; H. Steinhaus, *Collected Papers*, Warszawa: PWN, 1985, S. 215–222.

Noch in Krakau, jedoch bereits in der Zeit der Bekanntschaft mit Banach°, schrieb Steinhaus° eine Arbeit über Funktionalanalysis[9]. Er erkannte die Bedeutung des damals neu entstehenden Zweiges der Mathematik und regte Banach° zur Beschäftigung damit an.

Erinnern wir uns, dass in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts und zu Beginn des 20. Jahrhunderts in der Mathematik Mengen betrachtet wurden, deren Elemente Folgen, Reihen, Funktionen und diesen ähnliche Objekte waren, z. B. die Menge l_2 der Folgen, deren Elemente zum Quadrat erhoben eine konvergente Reihe bildeten, die Menge C der im Bereich [0,1] definierten und stetigen reellen Funktionen, die Menge L^2 der reellen Funktionen, die im Bereich [0,1] definiert und Quadrat-integrierbar sind u. Ä. In solchen Mengen können algebraische (z. B. Addition), geometrische (z. B. Abstand) und topologische (z. B. ermöglichte monotone Konvergenz, Grenzwerte zu definieren) Eigenschaften betrachten werden. Solche Mengen mit ausgezeichneten Strukturen hatten interessante Eigenschaften und man nannte sie „Funktionenräume". Erforscht wurden sie von Vito Volterra, David Hilbert, Friedrich Riesz und anderen, aber sie erforschten jeden dieser „Räume" für sich. Es fehlte eine allgemeine Definition, die es ermöglichte, alle diese „Funktionenräume" mit einem Begriff zu erfassen und diesen einen „Raum" anstelle der bisherigen vielen zu erforschen. Und eben diese Aufgabe übernahm Banach°, indem er in seiner Doktorarbeit[10] den später von ihm so bezeichneten „Raum vom Typ B" untersuchte, der alle bekannten Funktionenräume umfasste. Fréchet (1928) und Steinhaus° (1929) machten den Vorschlag für den Terminus „Banachraum", und bis heute wird diese Bezeichnung allgemein verwendet.

Banachs Zugang war geometrisch motiviert. Er suchte eine Definition für einen allgemeinen Funktionenraum, die als Verallgemeinerung für den euklidischen Raum gelten könnte und die Anwendung geometrischer Methoden und ihre Erweiterung auf einen solchen Funktionenraum der klassischen Analysis gestatten würde. Er erzielte einen Erfolg und verdankte diesen der richtigen Verknüpfung der Algebra, Analysis und Topologie, wobei deren Richtung von der Geometrie gewiesen wurde.

Die Definition eines Raumes des *Typs B* (d. h. des *Banachraumes*) war axiomatisch. Die Axiome teilten sich in drei Gruppen, die den Eigenschaften der Linearität, der Metrik undVollständigkeit entsprechen. Kurz gesagt ist der Banachraum ein vollständiger normierter Vektorraum. Bei dieser Definition fehlt das Axiom über die Existenz eines Skalarproduktes, das die Definition des wichtigen Begriffs der Orthogonalität und, allgemeiner, des Winkels gestatten würde. Dies war jedoch eine beabsichtigte Auslassung.

[9] H. Steinhaus, *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Z. 5 (1919), S. 186–221; Nachdruck: H. Steinhaus, *Selected Papers*, Warszawa: PWN, 1985, S. 252–288. An die Arbeit erinnert J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Amsterdam: North-Holland, 1981, S. 128. Der Name „Funktionalanalysis" erschien erst im Jahre 1922, vgl. das Buch P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctonnelle*, Paris: Gauthier-Villars, 1922.

[10] S. Banach. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), S. 133–181; Nachdruck: S. Banach, *Œuvres II*, Warszawa: PWN, 1979, S. 305–343.

Sie machte zwar die Geometrie des „Raumes vom Typ B“ ärmer, sicherte ihr jedoch eine größere Allgemeinheit.

Banachs° Beitrag beschränkte sich nicht auf die Definition und den Hinweis, dass alle bisher bekannten Funktionenräume darin enthalten sind (d. h. Banachräume sind), sondern zeigte ebenfalls, dass diese interessante mathematische Objekte sind. Banach° bewies hierzu mehrere Lehrsätze, darunter den Satz über kontrahierende Abbildungen, der als Banachscher Fixpunktsatz bekannt ist.

5 Priorität

In den Jahren 1920–1922 verfolgten Norbert Wiener und Hans Hahn ähnliche Konzeptionen. Bei Wiener war das allerdings ein kompliziertes logisches System, ohne Motivation und Beispiele[11], bei Hahn ein verbal formuliertes System von Folgenräumen mit dem Gedanken der Lösung unendlicher linearer Gleichungssysteme mit unendlich vielen Variablen[12]. Die Ansätze waren also grundsätzlich verschieden, am durchsichtigsten und am besten begründet war Banachs° Konzeption, und sie trug schließlich auch den Sieg davon[13]. Wiener selbst erkannte Banachs Priorität[14] an. Banachs und Hahns Arbeiten kreuzten sich jedoch noch mehrmals, z. B. im Satz von Hahn-Banach über die Fortsetzung linearer Funktionale[15].

6 Die Anfänge der Lemberger Schule

Banach° war der Typ eines Wissenschaftlers, der die Gruppenarbeit liebte. Im Milieu eines Cafés versammelten sich alsbald um ihn herum, zum Teil auch um Steinhaus°, ehrgeizige und erfolgshungrige junge Menschen. So begann sich die Lemberger mathematische Schule zu bilden.

[11] N. Wiener, *On the theory of sets of points in terms of continuous transformations*, C.R. du Congrès International des Mathématiciens (Strasbourg, 1920), Toulouse 1921, S. 312–315.
[12] H. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), S. 3–88.
[13] R. Duda, *The discovery of Banach spaces*, in: W. Więsław (Hrsg.), *European Mathematics in the Last Centuries*, Proc. Conference Będlewo (April 2004), Stefan Banach International Mathematical Center and Institute of Mathematics of Wrocław University, 2005, S. 37–46.
[14] N. Wiener, *A note on a paper of S. Banach*, Fund. Math. 4 (1923), S. 136–143; siehe auch seine Anmerkungen: N. Wiener, *I am a Mathematician*, New York: Doubleday, 1958.
[15] H. Hahn, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, J. reine angew. Math. 157 (1927); S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires*, Studia Math. 1 (1929), S. 211–216 und 223–239, Nachdruck in: S. Banach, *Œuvres II*, Warszawa: PWN, 1979, S. 375–395. Siehe auch: H. Hochstadt, *E. Helly. Father of the Hahn-Banach Theorem*, Math. Intellig. 2 (1980).

Einer ihrer hervorragenden Vertreter und zugleich einer der nächsten Mitarbeiter Banachs° wurde Stanisław Mazur°[16], der nach Jahren die Doktorarbeit seines Meisters folgendermaßen einschätzte:

> Die Entstehung der Funktionalanalysis war wie die Entstehung jeder neuen wissenschaftlichen Disziplin die Schlussetappe eines langen historischen Prozesses. Umfangreich ist die Liste der Mathematiker, deren Forschungen zur Entstehung der Funktionalanalysis beitrugen. Sie enthält solche berühmten Namen wie Vito Volterra, David Hilbert, Jacques Hadamard, Maurice Fréchet und Friedrich Riesz. Doch das Jahr 1922, in dem Stefan Banach in der polnischen Zeitschrift „Fundamenta Mathematicae" seine Doktorarbeit unter dem Titel *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales* publizierte, gilt als das Jahr des Durchbruchs in der Geschichte der Mathematik des 20. Jahrhunderts. Dieser zahlreiche Seiten umfassende Beitrag festigte endgültig die Grundlagen der Funktionalanalysis. [...]
> Die Funktionalanalysis ersetzte den für die Analysis grundlegenden Begriff der Zahl durch einen allgemeineren Begriff, den man heute in tausenden mathematischen Beiträgen mit dem Begriff „Punkt des Banachraumes" bezeichnet. Die damit erreichte Verallgemeinerung der mathematischen Analysis, die als Funktionalanalysis bezeichnet wird, gestattete es, scheinbar unterschiedliche Probleme der mathematischen Analysis auf einfache und einheitliche Weise zu behandeln und unter ihnen viele solche Probleme zu lösen, mit denen sich die Mathematiker zuvor vergeblich herumschlugen[17].

7 „Studia Mathematica"

Im Jahre 1927 kam Steinhaus° auf die Idee, in Lemberg eine sich auf die „Theorie der Operatoren", d. h. auf die Thematik der Schule konzentrierende Zeitschrift zu gründen und überredete dazu Banach° zur Mitarbeit. Zwei Jahre später erschien unter ihrer gemeinsamen Redaktion der erste Band der „Studia Mathematica". In jener Zeit war das nach den „Fundamenta Mathematicae" die zweite mathematische Zeitschrift mit eingegrenzter Thematik. Die Zeitschrift entwickelte sich gut und wurde zur wichtigsten Stütze der jungen Schule. In den Jahren 1929–1940 erschienen 9 Bände und in ihnen 161 Arbeiten, davon 111 aus Lemberg. Zu den am häufigsten publizierenden Autoren gehörten (in der Reihenfolge der Anzahl der Arbeiten; wenn an der Arbeit mehrere Autoren beteiligt waren, wird jeder gezählt): Władysław Orlicz° (21), Mazur° (17), Banach° (16), Stefan Kaczmarz° (12), Steinhaus° (9), Herman Auerbach° (9), Mark Kac° (9), Józef Marcinkiewicz (8), Meier Eidelheit° (7), Juliusz Schauder° (7), Józef Schreier° (6), Antoni Zygmund (6), Władysław Nikliborc (5), Zygmunt Wilhelm Birnbaum° (4). Von diesen 14 Autoren kamen nur Marcinkiewicz und Zygmund von außerhalb Lembergs. Die übrigen bildeten den aktivsten Kern der Schule.

[16] G. Köthe, *Stanisław Mazur's contributions to functional analysis*, Math. Ann. 277 (1987), S. 489–528; polnische Übersetzung: Wiadom. Mat. 30.2 (1994), S. 199–250.
[17] S. Mazur, *Rede in der Feierstunde zum Gedenken Stefan Banachs*, Wiadom. Mat. 4.3 (1961), S. 249–250 [Polnisch].

8 Banachs Monographie

Im Jahre 1932 wurde das reiche Ergebnis des ersten Jahrzehnts der Schule in Banachs Monographie[18] zusammengestellt, die ihm internationale Anerkennung einbrachte.

> Das Erscheinen von Banachs Abhandlung über „lineare Operatoren“ bedeutet [...] den Beginn des Erwachsenenalters der Theorie normierter Räume. Alle Ergebnisse [...] werden von zahlreichen frappierenden Beispielen aus unterschiedlichen Bereichen der Analysis begleitet [...]. Die Arbeit erfreute sich eines bemerkenswerten Erfolgs, und eine ihrer unmittelbaren Auswirkungen war die nahezu allgemeine Annahme der Nomenklatur und der von Banach verwendeten Bezeichnungen[19].

> Es fällt schwer, den Einfluss zu überschätzen, den Banachs Buch auf die Entwicklung der Funktionalanalysis hatte. Indem es einen wesentlich größeren mathematischen Fragenbereich umfasst als den, den die Hilbertraumtheorie liefert, stimulierte es wahrscheinlich mehr Arbeiten als die Bücher Stones und von Neumanns zusammengenommen[20]. Mehr noch, wegen ihrer größeren Allgemeinheit behielt die Banachraumtheorie bedeutend mehr vom ursprünglichen Reiz der Funktionalanalysis [...] als die Theorie der linearen Operatoren in Hilberträumen[21].

> Es ist zweifellos eines der Bücher, die den größten Einfluss auf die Entwicklung der modernen Mathematik ausgeübt haben. Obgleich die in ihm entwickelte Theorie [...] die vorher für speziellere Ziele entwickelten Methoden nutzen konnte [...], war sie doch fast in ihrer Gesamtheit von Banach und seinen Mitarbeitern geschaffen worden. Friedrich Riesz drückte sich über den Wert dieses Buches immer mit größter Hochachtung aus[22].

> Banach stellte seine Ideen in der berühmten Monographie in reifer und geschlossener Form mit außergewöhnlicher Klarheit dar und unterstrich die subtile Wechselbeziehung zwischen algebraischen und topologischen Überlegungen, indem er die abstrakten und allgemeinen Begriffe, mit denen es die moderne Funktionalanalysis zu tun hatte, wahrhaft ertragreich machte. Was dazu beitrug, dass der Einfluss von Banachs Arbeit so groß wurde, war seine Vereinigung einer Anzahl unterschiedlicher, vorher entdeckter fragmentarischer und unvollständiger Ergebnisse aus dem Bereich der Analysis[23].

Im Jahre 1936 wurde Banach zu einem Plenarvortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Oslo eingeladen[24]. (Es war dies seine zweite und letzte Auslandsreise.)

[18] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Warszawa 1932.

[19] N. Bourbaki, *Elements d'histoire des mathématiques*, Paris: Hermann, 1969.

[20] Der Autor denkt sicher an die Bücher: J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin: Springer, 1932; M. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Spaces and Their Application to Analysis*, New York 1932 – mit denen die schnelle Entwicklung der Theorie der Hilberträume begann.

[21] G. Birkhoff, E. Kreyszig, *The establishment of Functional Analysis*, Hist. Math. 11 (1984), S. 258–321; Zitat von S. 315.

[22] B. Szökefalvi-Nagy, *Rede in der Feierstunde zum Gedenken Stefan Banachs*, Wiadom. Mat. 4.3 (1961), S. 265–268 [Polnisch].

[23] M.H. Stone, *Unsere Schuld gegenüber Stefan Banach*, Wiadom. Mat. 4.3 (1961), S. 252–259 [Polnisch].

[24] S. Banach, *Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis*, C.R. du Congrès International des Mathématiciens (Oslo, 1936), S. 261–268; Nachdruck: S. Banach, *Œuvres II*, Warszawa: PWN, 1979, S. 434–441.

9 Die Interessen von Steinhaus

Die Lemberger mathematische Schule ist mehr als nur Banach° und seine „Theorie der Operatoren“ bzw. die Funktionalanalysis. Ihr Mitbegründer war Steinhaus°, ein anderer Typ des Wissenschaftlers als Banach°. Nach Ostwalds Klassifikation war Steinhaus° eher der Typ eines „Schmetterlings“, der immer wieder von neuen „Blumen“ angezogen wurde, zu deren Erforschung er neue Ideen einbrachte, an deren späterer Entwicklung er aber gewöhnlich nicht weiter teilnahm. So wandte er sich nach anfänglicher Faszination von der Theorie der trigonometrischen Reihen und der Funktionalanalysis[25] der Maßtheorie zu und bewies den später oft zitierten Satz, dass für eine Menge positiven Maßes die Menge der Abstände zwischen ihren Punkten das Intervall $[0,c]$ für ein bestimmtes $c > 0$ enthält[26]. In Folge dessen interessierte man sich in Lemberg für die Maßtheorie, und einige Jahre später erschienen gleichzeitig zwei Pionierarbeiten[27], in denen der Versuch unternommen wurde, die Wahrscheinlichkeitstheorie auf maßtheoretischer Basis zu behandeln[28]. Steinhaus° erreichte die vollkommene Mathematisierung des Spiels um Kopf oder Zahl beim Werfen einer Münze, eines nichtklassischen probabilistischen Systems. Er fasste nämlich die unendlichen Folgen der Münzwürfe als Folgen von Nullen und Einsen und damit als Zahlen des Intervalls [0,1] auf. Weiter betrachtete er die (im Sinne von Lebesgue) messbaren Teilmengen dieses Intervalls als Zufallserscheinungen und das Lebesguesche Maß als ihre Wahrscheinlichkeit. Er fasste also das unendlich oft wiederholte Spiel um Kopf oder Zahl als Tripel $([0,1], L, \lambda)$ auf, worin L die Familie der messbaren Untermengen des Intervalls [0,1] und λ das Lebesguesche Maß bedeutet. Man könnte dieses als das „Halbfinale der Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie“ [29] ansehen. In der späteren Fassung von Kolmogorov war der Wahrscheinlichkeitsraum ein Tripel (Ω, F, p), wobei Ω der Raum der Elementar-

[25] Im Bereich der Funktionalanalysis hatte er noch eine gemeinsame und wichtige Arbeit mit S. Banach, in der sie das allgemeine Prinzip der Verdichtung der Singularitäten formulierten und bewiesen: S. Banach, H. Steinhaus, *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fund. Math. 9 (1927), S. 50–61; Nachdrucke: S. Banach, *Œuvres II*, Warszawa: PWN, 1979, S. 365–374; H. Steinhaus, *Collected Papers*, Warszawa: PWN, 1985, S. 363–372. Auch diese Arbeit ging in die Geschichte der Funktionalanalysis ein, vgl. J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Amsterdam 1981, S. 141–142.

[26] H. Steinhaus, *Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive*, Fund. Math. 1 (1920), S. 93–103; Nachdruck: H. Steinhaus, *Selected Papers*, Warszawa: PWN, 1985, S. 296–405.

[27] Vgl. H.-J. Girlich, *Łomnicki-Steinhaus-Kolmogorov: steps to a modern probability theory*, in: W. Więsław (Hrsg.), *European Mathematics in the Last Centuries*, Proc. Conference Będlewo (April 2004), Stefan Banach International Mathematical Center and Institute of Mathematics of Wrocław University, 2005, S. 47–56.

[28] A. Łomnicki, *Nouveaux fondements du calcul de probabilités*, Fund. Math. 4 (1923), S. 34–71; H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de mesure*, Fund. Math. 4 (1923), S. 286–310, Nachdruck der zweiten: H. Steinhaus, *Selected Papers*, Warszawa: PWN, 1985, S. 322–331.

[29] K. Urbanik, *Die Ideen von Hugo Steinhaus in der Warscheinlichkeitstheorie*, Wiadom. Mat. 17 (1973), S. 39–50 [Polnisch].

ereignisse, F eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω und p ein normiertes Maß[30] ist. Das bahnbrechende Denken von Łomnicki°, Steinhaus° und ihren Schülern über die Wahrscheinlichkeitstheorie wurde später, dank William Feller, allgemein anerkannt. Es sei hinzugefügt, dass Steinhaus° über die Sichtweise Kolmogorovs nicht erfreut war. Er glaubte nämlich, dass in ihr die Idee des Zufalls verlorenging, und so entwickelte er gemeinsam mit seinem Schüler Kac° die Theorie der „unabhängigen Funktionen" mit dem Ziel, auf ihr eine zufriedenstellendere Theorie der Wahrscheinlichkeit[31] zu begründen. Aber Kac ist früh emigriert, und der Gedanke wurde nicht verwirklicht. Steinhaus war auch der Initiator der nichtkommutativen Theorie der Wahrscheinlichkeit[32].

Eine andere Richtung, für die sich Steinhaus° interessierte, war die Spieltheorie. In einer akademischen Broschüre publizierte er eine kurze Arbeit[33], deren Bedeutung er selbst mit Sicherheit nicht erkannte.

> Es ist dies eine Arbeit geringen Umfangs ohne den Charakter einer mathematischen Publikation, es sind gewissermaßen einige Bemerkungen, aber von einer Art, dass sie zu jener Zeit einer Offenbarung gleichkamen. Es waren Bemerkungen, die die Grundlage der heutigen Spieltheorie bilden. Erstens wurde dort auf exakte Weise der Begriff der *Strategie* eingeführt (allerdings unter anderer Bezeichnung – Spielweise, aber um den Namen geht es hier nicht). Der zweite wesentliche Faktor ist die sogenannte *Normalisierung der Spiele*, und schließlich: der Begriff der Auszahlung, die jedes Spiel charakterisiert, sowie das Prinzip der Wahl einer Minimaxstrategie[34].

Obgleich die Arbeit von Steinhaus°, nachdem sie nach dem Krieg aufgefunden und ins Englische übersetzt wurde, sich als Offenbarung erwies, war sie jedoch nur noch von historischer Bedeutung.

Ein Ergebnis der langjährigen Beschäftigung von Steinhaus° mit trigonometrischen Reihen und, allgemeiner, mit orthogonalen Reihen (darüber schrieb er 20 Arbeiten, darunter eine gemeinsam mit Kaczmarz°) war die gemeinsame Monographie von Kaczmarz und Steinhaus[35]. Bis in die sechziger Jahre des 20. Jahrhunderts hinein war sie eine Standardreferenz auf dem Gebiet der Orthogonalreihen. (Nebenbei gesagt lässt sich jedoch feststellen, dass die am häufigsten zitierte Arbeit von S. Kaczmarz nicht jene große Monographie ist, sondern eine kurze Notiz, in der er eine bestimmte Methode der

[30] A. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin: Springer, 1933.

[31] Por. P. Holgate, *Independent functions: probability and analysis in Poland between the wars*, Biometrika 84 (1980), S. 161–173; M. Kac, *Hugo Steinhaus – a reminiscence and tribute*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), S. 572–581; M. Kac, *Enigmas of Chance. An Autobiography*, New York 1985.

[32] H. Steinhaus, *La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique*, in: *Les fonctions aléatoires*, Colloque consacré à la théorie des probabilités, Paris: Hermann, 1938, S. 57–73; Nachdruck: H. Steinhaus, *Selected Papers*, Warszawa: PWN, 1985, S. 493–507.

[33] H. Steinhaus, *Die notwendigen Definitionen zur Spiel- und Verfolgungstheorie*, Myśl Akademicka 1 (1925), S. 13–14 [Polnisch]; Englische Übersetzung: Naval Res. Logist. Quater. 7 (1960), S. 105–107.

[34] C. Ryll-Nardzewski, *Die Arbeiten von Hugo Steinhaus über Konfliktsituationen*, Wiadom. Mat. 17 (1973), S. 29–38 [Polnisch].

[35] S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne 6, Warszawa 1936; übersetzt ins Englische (1951) und Russische (1959).

näherungsweisen Lösung linearer Gleichungen mit einer großen Zahl von Variablen vorstellt[36].)

In den dreißiger Jahren zog es Steinhaus immer mehr in den Bereich der Anwendungen der Mathematik. Eine zusätzliche Frucht seines scharfsinnigen Geistes, der überall mathematische Probleme erkannte, war ein Buch, das 1938 gleichzeitig in Polnisch und Englisch erschien und bis zur Gegenwart vier Auflagen in jeder dieser Sprachen und dazu Übersetzungen in mehr als zehn andere Weltsprachen[37] hatte. Dieses Buch ist eines der bekanntesten Mathematikbücher in der Welt.

10 Banach und die Maßtheorie

Die heutige Maßtheorie geht zurück auf Camille Jordan und Henri Lebesgue, die die ersten Beispiele für Maße konstruierten: das endlich additive Maß (Jordan) und das abzählbar additive Maß (Lebesgue). Allgemein formulierte Felix Hausdorff in seiner Monographie[38] das Existenzproblem für Maße und bewies darin zur allgemeinen Verwunderung, dass in R^n für $n > 2$ ein bewegungsinvariantes Maß auf der gesamten Potenzmenge nicht existieren kann, das gilt sogar für nur endlich additive Maße. Das Problem der übrigen Dimensionen $n = 1, 2$ nahm Banach auf und wies nach, ebenfalls zur großen Verwunderung, dass hier das Maßproblem eine positive Lösung hat[39]. Beide, Hausdorff und Banach, stützten sich in ihren Überlegungen auf das damals kontroverse Auswahlaxiom, aber keinen von beiden hat das gestört.

Ein häufiger Gast in Lemberg war Tarski aus Warschau. Er kannte sich in der Mengentheorie gut aus. Banach wiederum hatte eine herrliche geometrische Intuitionen und wandte mutig nichtkonstruktive Methoden an. Zwischen beiden entwickelte sich eine Zusammenarbeit, deren erstes Ergebnis das sogenannte *Banach-Tarskische Paradoxon*[40] war, das gewöhnlich als *die paradoxe Zerlegung einer Kugel* formuliert wird: Eine dreidimensionale Kugel mit dem Radius 1 lässt sich in endlich viele Teile zerlegen, aus denen man zwei Kugeln mit dem Radius 1 zusammensetzen kann. Das ist eine der bekanntesten paradoxen Konsequenzen des Auswahlaxioms.

---

[36] S. Kaczmarz, *Angenäherte Lösung von Systemen linearer Gleichungen*, Bull. Intern. Acad. Polon. Sci. Let., cl. sci. math. nat. A (1937), S. 355–357; englische Übersetzung: *Approximate solution of systems of linear equations*, Intern. J. Control 57.6 (1993), S. 1269–1271.

[37] H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, Lwów: Książnica-Atlas, 1938; englische Übersetzung: *Mathematical Snapshots*, 1938; deutsche Übersetzung: *Kaleidoskop der Mathematik*, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

[38] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914. Nachdrucke: Chelsea sowie F. Hausdorff, *Gesammelte Werke*, Band 2, Springer, 2002.

[39] S. Banach, *Sur le problème de mesure*, Fund. Math. 4 (1923), S. 7–33; Nachdruck: S. Banach, *Œuvres I*, Warszawa: PWN, 1967, S. 66–89.

[40] S. Banach, A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en partie respectivement congruentes*, Fund. Math. 6 (1924), S. 244–277; Nachdrucke: A. Banach, *Œuvres I*, Warszawa: PWN, 1967, S. 118–148, A. Tarski, *Collected Papers*, Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser, 1986, Bd. I, S. 119–154. Vgl. ebenfalls S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge Univ. Press, 1985.

Später wurde die Maßproblematik, entsprechend umformuliert, in Lemberg stärker in mengentheoretischer Richtung für Mengen verschiedener Mächtigkeit entwickelt (Banach°, Kuratowski°, Tarski, Ulam°). Gegenstand der Untersuchungen waren unter anderem „nichtmessbare Kardinalitäten".

11 Schauder und andere

Einer der talentiertesten jungen Vertreter der Lemberger Mathematik war Schauder°, der interessante Ergebnisse im Grenzbereich der Theorie der Banachräume, der Topologie und der Theorie der Differentialgleichungen erzielte. Er setzte sich mit der Problematik auseinander, dass für injektive stetige Transformationen des Hilbertschen Raumes ein Offenheitssatz im Allgemeinen nicht mehr gültig ist. Das bedeutet, dass sich die Topologie des linearen Raumes unendlicher Dimension so wesentlich von der Topologie des Euklidischen Raumes unterscheiden muss, dass sogar am Sinn ihrer Berechtigung zu zweifeln ist. Schauder° wies jedoch nach, dass bei gewissen zusätzlichen Annahmen gesichert werden kann, dass (nicht einmal unbedingt lineare) injektive stetige Transformationen eines solchen Raumes in sich die Offenheit von Mengen erhalten[41]. Auf diese Weise „rettete" er Banachs Topologie des Raumes[42], und zugleich war dies das erste bedeutsame Ergebnis der nichtlinearen Funktionalanalysis (der Banach° den zweiten Band seiner Monographie widmen wollte, der jedoch niemals geschrieben wurde). Eine schöne Anwendung dieses Ergebnisses fand Schauder° in der Theorie der Differentialgleichungen[43]. Das war der Beginn seiner Beschäftigung mit nichtlinearer Funktionalanalysis, die ihren Reiz aus der Kraft topologischer Methoden gewinnt. Kurz danach begann seine Zusammenarbeit mit Jean Leray, der diese Arbeit von Schauder° schon kannte. Gemeinsam haben sie diese Methoden verallgemeinert und den Leray-Schauderschen Abbildungsgrad entwickelt. Die Stärke dieser Methoden in den Anwendungen haben sie gezeigt, indem sie die Existenz der Lösung des Dirichletschen Problems für elliptische Gleichungen eines bestimmten Typs nachwiesen[44]. Diese im Jahre 1938 mit dem Metaxaspreis ausgezeichnete Arbeit war zugleich der Beginn der algebraischen Topologie in Banachräumen. Im Folgenden widmete Schauder° eine Reihe Arbeiten dem linearen Problem, was Leray nach Jahren so einschätzte:

[41] J. Schauder, *Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen*, Studia Math. 1 (1929), S. 123–139; –, *Über die Umkehrung linearer stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. 2 (1930), S. 1–6; Nachdruck beider Beiträge: J. Schauder, *Œuvres*, Warszawa: PWN, 1978, S. 147–162 u. 128–139.
[42] Vgl. C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1975.
[43] J. Schauder, *Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus*, Math. Ann. 106 (1932), S. 661–772; Nachdruck: J. Schauder, *Œuvres*, Warszawa: PWN, 1978, S. 235–297.
[44] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. de l'École Norm. Sup. 51 (1934), S. 45–78; Nachdruck: J. Schauder, *Œuvres*, Warszawa: PWN, 1978, S. 320–348.

> Dann publiziert Schauder [...] die erste Version seiner Methode, nach einem Jahr liefert er [...] die zweite – ungemein elegant und kurz. Neun Seiten [...] und sechs Seiten des IV. Kapitels [...] bilden die volle Theorie des linearen Dirichletschen Problems. Die Bemerkung [...] gibt ihr eine wichtige Verallgemeinerung. Die Theorie zeichnet sich durch eine bewundernswürdige Einfachheit und Eindringlichkeit aus[45].

Nach Leray[46] beruhten die größten Verdienste Schauders° darauf, dass es ihm gelang „die algebraische Topologie in Banachräumen zu begründen und die klassischen Probleme in der Theorie partieller Differentialgleichungen auf den Beweis zu reduzieren, dass gewisse lineare Abbildungen von Funktionenräumen eine endliche Norm haben".

Fast gleichzeitig mit den Arbeiten von Alan Turing erschien die Konzeption der rekursiven Funktion auch in Lemberg.

> Aber das war in Polen vor dem Weltkrieg, [wo] Banach und Mazur diese Idee in konsequentester Weise entwickelten. Der zweite Weltkrieg verhinderte die Publikation ihrer Arbeiten aus dieser Zeit und hinterließ nur die Zusammenfassung[47, 48].

> In Lemberg nahmen in den Arbeiten von Eidelheit und Mazur auch die Banachalgebren ihren Anfang, obgleich sie erst I. M. Gelfand im Jahre 1941 formal einführte[49].

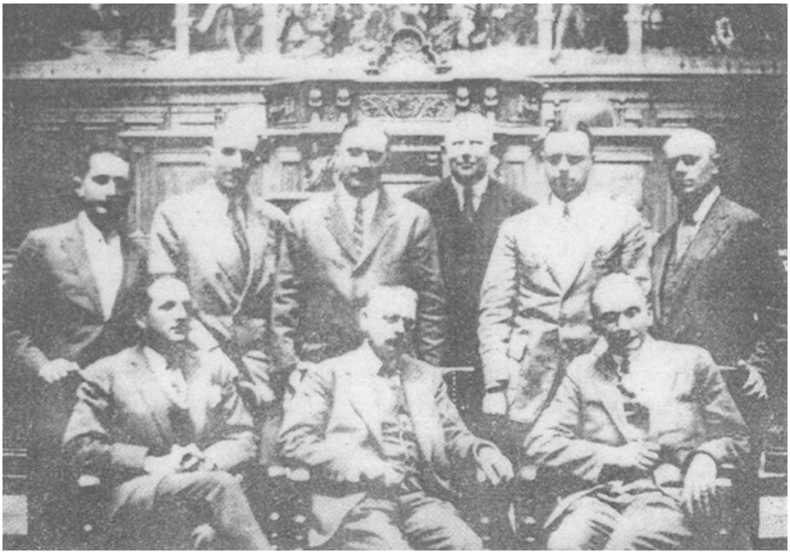
Eine breite Popularität gewann Kazimierz Bartels Monographie über die Perspektive in der Malerei[50], der langjährige Studien des Autors über die italienische Malerei vorausgingen.

Es ist unmöglich, in einem kurzen Artikel den ganzen Reichtum der Lemberger mathematischen Schule wiederzugeben[51]. Die angeführten Informationen zeugen jedoch von ihrer großen Lebendigkeit, thematischen Vielfalt und der Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse. Zur Illustration der Bedeutung der Schule nenne ich zwei Beispiele. Im Buch von Jean-Paul Pier[52] versuchten einige Mathematiker, „guidelines" der Mathematik für den Zeitraum 1900–1950 zu zeichnen. In den Jahren 1922–1938 hoben sie 19 Leistungen folgender Lemberger Mathematiker hervor: Banach°, Steinhaus°, Schauder°, Kuratowski°, Mazur°, Birnbaum°, Orlicz°, Kaczmarz°. Ein weiteres Beispiel sind die Beziehungen zu anderen Zentren, darunter häufige Besuche von Mathematikern aus

[45] J. Leray, *Über die Leistungen von Juliusz Paweł Schauder*, Wiadom. Mat. 23.1 (1959), S. 11–19 [Polnisch].
[46] Vgl. das Vorwort von J. Leray in: J. Schauder, *Œuvres*, Warszawa 1978.
[47] S. Banach, S. Mazur, *Sur les fonctions calculables*, Ann. de la Soc. Polon. de Math. 16 (1937), S. 223.
[48] M. Guillaume, *La logique mathématique dans sa jeunesse*, in: J.-P. Pier (Ed.), *Development of Mathematics 1900–1950* , Basel: Birkhäuser, 1994, S. 185–367, Zitat von S. 288. Die zitierte Zusammenfassung: S. Banach, S. Mazur, *Sur les fonctions calculables*, Ann. de la Soc. Polon. de Math. 16 (1937), S. 223.
[49] Vgl. A. Shields, *Banach Algebras 1939–1989*, Math. Intellig. 113 (1989), S. 15–17.
[50] K. Bartel, *Perspektywa malarska*, Bd. I, Lwów: Książnica-Atlas, 1928; deutsche Übersetzung: *Die Malerperspektive.* Grundsätze, geschichtlicher Überblick, Ästhetik, hrsg. von Wolfgang Haack, Band I, Leipzig-Berlin: Teubner, 1933.
[51] Umfassender behandelt das mein Buch: R. Duda, *Die Lemberger Mathematikerschule*, Wrocław 2007 [Polnisch].
[52] J.-P. Pier (Ed.), *Development of Mathematics 1900–1950*, Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser, 1994.

dem In- und Ausland, Unter ihnen waren Emil Borel, Henri Lebesgue, Jean Leray, Leon Lichtenstein, Paul Montel, John von Neumann, Gordon T. Whyburn und andere.

12 Die Atmosphäre



Zermelos Besuch in Lemberg 1929. Sitzend von links: Hugo Steinhaus, Ernst Zermelo, Stefan Mazurkiewicz. Stehend von links: Kazimierz Kuratowski, Bronisław Knaster, Stefan Banach, Włodzimierz Stożek (im schwarzen Anzug), Eustachy Żyliński, Stanisław Ruziewicz

Ein charakteristisches Merkmal des Lemberger mathematischen Lebens waren häufige wissenschaftliche Sitzungen der Lemberger Sektion der Polnischen Mathematischen Gesellschaft, auf denen die neuesten Ergebnisse vorgestellt und erörtert wurden. Diese Sitzungen spielten die Rolle der späteren Spezialseminare (die es damals fast noch nicht gab) und förderten die Zusammenarbeit des gesamten Milieus. In den Jahren 1928–1938, als die Berichte von diesen Sitzungen in den „Annales de la Société Polonaise de Mathématiques" veröffentlicht wurden, gab es davon 180, und es wurden auf ihnen 360 Berichte erstattet. Oft geschah es, dass ein solcher Bericht die einzige Spur eines Ergebnisses darstellte, denn manche Teilnehmer bemühten sich chronisch nicht um eine spätere Publikation. Zu den „widerspenstigsten" gehörte Mazur°, worüber folgende Anekdote berichtet.

Eines Tages im Jahre 1938 hörte man, wie Mazur, nachdem er die Zusammenfassungen der Arbeiten deutscher Mathematiker über konvexe Funktionen im „Zentralblatt für Mathematik" durchgeblättert hatte, den Kommentar abgab:

> „Hm, meine Ergebnisse sind gar nicht so schlecht, alles wissen sie noch nicht."

Turowicz berichtete auch, dass ihm, als er 1938 nach Lemberg kam, Mazur° eine gemeinsame Beschäftigung mit Ringtheorie vorschlug. In kurzer Zeit bewiesen sie mehr als zwanzig Lehrsätze über Ringe, von denen einer als spezieller Fall eine Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß über die Approximation stetiger Funktionen durch Polynome (bei beliebiger Zahl von Variablen). Die Arbeit wurde im April 1939 beendet, aber Mazur° wollte sie nicht publizieren:

> „Ich liebe es nicht so unmittelbar. Vielleicht fällt uns noch etwas Besseres ein."

Es gab im Jahre 1940 noch eine Chance, aber Mazur° widersetzte sich weiterhin, und so ist die Arbeit niemals erschienen. Inzwischen hatte Marschall H. Stone diesen wichtigen Satz bewiesen, und er ist heute als Weierstraß-Stonescher Satz bekannt.

Nach der Sitzung der Gesellschaft, die traditionell am Samstagabend stattfand, begaben sich die Teilnehmer gewöhnlich noch zu einer weiteren Diskussionsrunde ins Café. Am beliebtesten war das „Schottische" Café, in dem man sich nahezu täglich traf. Banach° liebte Diskussionen und die Arbeit im Sprachgewirr. Diese Kaffeehaustreffen, die oftmals viele Stunden dauerten, bei denen über verschiedene Dinge gesprochen wurde, man Zigaretten rauchte (Banach° war ein leidenschaftlicher Raucher), Kaffee und Alkohol trank, wurden zur Legende[53]. Zu dieser Legende gehört auch das *Schottische Buch*, dessen Anfang ein von Banachs Frau gekauftes Heft machte, durch das sie die Tischplatten im Kaffeehaus vor den üblicherweise darauf vorgenommenen Notizen bewahren und wenigstens teilweise auch die dabei erzielten Ergebnisse retten wollte.

Im *Schottischen Buch* wurden Probleme und ihnen folgende Kommentare eingetragen. Über seine Bedeutung hat sich Gian-Carlo Rota folgendermaßen geäußert:

> „Für uns, die wir im goldenen Zeitalter der Funktionalanalysis aufgewachsen sind, war und bleibt das *Schottische Buch* die romantische Quelle unserer Mathematik. [...] Die erstaunlichen Probleme des Schottischen Buches verkündeten den Geist der modernen Mathematik".[54]

Ein Zeugnis der in Lemberg herrschenden Atmosphäre möge auch das Urteil von Kuratowski° sein, der dort die Jahre 1927–1933 verbrachte.

> Als ich den Lehrstuhl in Lemberg annahm, behielt ich meine Dozentur in Warschau (indem ich ein Jahr Urlaub als Dozent nahm), denn ich war mir nicht sicher, ob ich irgendwo außerhalb meiner Heimatstadt Warschau würde leben können.
> Doch es kam anders: Nach einem Jahr verzichtete ich auf die Dozentur in Warschau und hatte an Lemberg Gefallen gefunden.
> Was war der Grund dafür? Der ungewöhnliche Reiz dieser Stadt, an die ich mich noch jetzt mit Rührung erinnere, sowie die Art des Lebens seines wissenschaftlichen Milieus, das mich in blitzschnellem Tempo absorbiert hatte. Besonders der Teil des wissenschaftlichen Milieus, mit dem es mir gegeben war, enger zusammenzuarbeiten. Das ist das mathematische Zentrum, das sich ungewöhnlich attraktiv darstellte. Vor allem Banach und Steinhaus. [...]

[53] Vgl. K. Ciesielski, *Lost legends of Lvov, 1. The Scottish Café*, Math. Intelligencer 9.4 (1987), S. 36-37; S. Ulam, *Erinnerungen an das Schottische Café*, Wiadom. Mat. 12.1 (1969), S. 49–58 [Polnisch].

[54] R.D. Mauldin (Hrsg.), *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Boston: Birkhäuser, 1981. Das Zitat stammt vom Umschlag.

Stanisław Mazur and Stanisław Ulam in der Lemberger Straße

> Dieses Lemberger „Klima“ war auch für mein Schöpfertum förderlich. Es bewirkte, dass meine Lemberger Jahre die fruchtbarsten in meiner wissenschaftlichen Laufbahn waren[55].

Gegen Ende der dreißiger Jahre begannen sich über diesem blühenden Leben Wolken zusammenzuziehen, die ein aufkommendes Gewitter ankündigten, dessen katastrophale Dimensionen vorauszusehen niemand imstande war. Eine geringe Anzahl akademischer Arbeitsstellen und der zunehmende Antisemitismus bewirkten, dass sich einige eine bessere Stelle im Ausland suchten. Aus Lemberg emigrierten damals Birnbaum° (1937), Kac° (1938) und Ulam° (1935), aber der Letztere kam jedes Jahr während der drei Sommermonate nach Polen und verließ das Land erst im August 1939 endgültig. Seinen jüngeren Bruder Adam nahm er damals mit sich, und aus der großen Familie der Ulams haben nur sie beide überlebt.

13 Der Krieg

Am 1. September 1939 wurde Polen von Deutschland überfallen und es begann der 2. Weltkrieg. Die Deutschen erreichten das Vorfeld von Lemberg bereits am 12. September, aber die Stadt verteidigte sich. Am 17. September 1939, gemäß einem geheimen sowjetisch-deutschen Abkommen, überfiel auch die Sowjetunion das gegen Deutschland kämpfende Polen. Die sowjetische Armee übernahm von den Deutschen die Belagerung Lembergs, und am 22. September kapitulierte die Stadt. Auf der Grundlage des Ribbentrop-Molotow-Paktes wurde das Land in zwei nahezu gleichgroße Gebiete geteilt, und der östliche Teil einschließlich Lemberg fiel den Sowjets zu. Aus diesen Kämpfen im September kehrte Kaczmarz° nicht zurück (er war Offizier der Reserve und kam durch bis heute nicht geklärte Ursachen ums Leben). Zahlreiche Flüchtlinge aus dem von Deutschen besetzten Warschau kamen nach Lemberg, unter ihnen die Mathematiker Knaster°, Saks und Edward Szpilrajn (Marczewski). Steinhaus schrieb darüber:

[55] K. Kuratowski, *Notizen zur Autobiographie*, Warszawa: Czytelnik, 1981 [Polnisch]; Zitat von S. 86 u. 89.

> „Unter normalen Bedingungen hätten wir in einer solchen Zusammensetzung manches geschafft“[56].

Doch die Bedingungen waren nicht normal. Die polnischen Schulen und Lehranstalten wurden geschlossen, und obgleich nach einigen Monaten ukrainische Lehranstalten eröffnet wurden, an denen man auch Polen anstellte und Vorlesungen in Polnisch tolerierte, drängte man jedoch auf die Durchführung der Vorlesungen auf Russisch oder Ukrainisch. Es gelang noch, den vor dem Krieg vorbereiteten 9. Band der „Studia Mathematica“ herauszugeben, jedoch mit doppelter Nummerierung 9 (1) und mit einer Zusammenfassung jedes Beitrags in Ukrainisch. Die Zahl der polnischen Studenten verringerte sich von 3500 im Jahre 1939 auf 400 im Jahre 1941. Als belastend erwiesen sich die ständigen von Seiten der Besatzer erzwungenen Versammlungen und Umorganisationen, ständig gab es die Furcht vor unerwarteter Verhaftung und Deportation. Nach Kasachstan deportiert wurde Stanisław Leja (ein Neffe von Franciszek Leja), Władysław Hetper° steckte man in ein Lager, wo er nach kurzer Zeit starb. In sowjetischen Gefängnissen litten Bartel° und Szpilrajn (Marczewski).

> „Mich erfasste ein unwiderstehlicher physischer Ekel gegenüber aller Art sowjetischer Beamten, Politiker und Kommissare. Ich sah in ihnen stupide, verlogene, dumme Barbaren, denen wir in die Hände gefallen waren, so wie der Riesenaffe, der Gulliver auf das Dach entführt hatte“[57].

Am 22. Juni 1941 überfielen die Deutschen die Sowjetunion, und bereits eine Woche darauf marschierten sie in Lemberg ein. Die deutsche Besetzung dauerte 3 Jahre, vom 30. Juni 1941 bis zum 27. Juli 1944. Es war dieses die zweite Etappe der Ausrottung des Polnischen in Lemberg. Im Juni 1941 wurden nach einer im Voraus vorbereiteten Liste 23 Professoren der Universität, der Technischen Hochschule und anderer Lehranstalten der Vorkriegszeit verhaftet und alle (mit Ausnahme von Gröer, den man wegen seiner deutschen Herkunft freiließ), manche mitsamt den Familienangehörigen, auf den Wulecker Höhen erschossen[58]. Von den Lemberger Mathematikern starben damals Bartel°, Łomnicki°, Ruziewicz°, Stożek° (mit zwei Söhnen) und Kaspar Weigel. Die Umstände dieses Verbrechens sind bis heute nicht aufgeklärt. Es erscheint jedoch als unbezweifelbar, dass die Deutschen bei der Zusammenstellung der Listen von ukrainischen Nationalisten unterstützt wurden, die ebenfalls eine Ausrottung des Polnischen in Lemberg anstrebten.

Steinhaus ahnte die drohende Gefahr und verbrannte unverzüglich alle Familienfotos und persönlichen Unterlagen, wonach er am 4. Juli 1941 seine Wohnung verließ, um niemals mehr dorthin zurückzukehren. Die ersten Tage kam er mit seiner Frau bei Bekannten unter, dann wohnten sie bis zum November 1941 heimlich bei Prof. Fuliński am Rande Lembergs, und als es auch dort gefährlich wurde, zogen sie in ein kleines

[56] H. Steinhaus, *Erinnerungen und Notizen*, Zweite Auflage, Wrocław 2002 [Polnisch]; Zitat von S. 197.
[57] H. Steinhaus, *Erinnerungen* ..., op. cit., S. 191.
[58] D. Schenk, *Der Lemberger Professorenmord und der Holocaust in Ostgalizien*, Dietz-Verlag, 2007.

Dorf in der Nähe von Lemberg. Dort erhielt er von der Untergrundbewegung die authentische Geburtsurkunde eines verstorbenen Waldarbeiters, und im Juli 1942 begab er sich mit seiner Frau in ein abgelegenes Dorf im Gebirge, wo sie dann bis zum Juli 1945 wohnten, er unter dem Namen Grzegorz Krochmalny. Hier engagierte er sich auch im geheimen Unterricht für Jugendliche. Sie überlebten den Krieg und siedelten sich danach in Breslau an.

Die Lemberger Lehranstalten wurden von den Deutschen geschlossen, aber im Frühjahr 1942 eröffneten sie Staatliche Fachkurse, zu denen vierjährige polytechnische (5 Fachrichtungen), medizinische, tierärztliche und forstwirtschaftliche Lehrgänge gehörten. Die Lehrgänge wurden nach polnischen Lehrprogrammen aus der Vorkriegszeit durchgeführt, jedoch ohne Berechtigung für die Teilnehmer, an deutsche Lehranstalten zu wechseln. Einige Lemberger Mathematiker fanden dort eine Anstellung.

Eine Besonderheit der deutschen Besatzung war das Institut von Prof. Weigel, der für die Wehrmacht Impfstoffe gegen Typhus produzierte. Dieses Institut beschäftigte zahlreiche Vertreter der Lemberger Intelligenz, unter ihnen auch Banach°, Knaster°, Orlicz° und einige andere, als Fütterer von Läusen.

Noch im Juli 1941 begann Edmund Bulanda, der Vorgänger des auf den Wulecker Höhen erschossenen Rektors der JKU, Roman Longchamps de Bérier, mit den Vorbereitungen zur Reaktivierung der JKU in konspirativer Form. An dieser Untergrunduniversität unterrichteten Orlicz°, Żyliński° und andere, und einige Studenten schrieben sogar ihre Doktorarbeiten (u.a. Andrzej Alexiewicz° bei Orlicz°).

Gleichzeitig nahm die systematische Ausrottung von Juden und der Bevölkerung jüdischer Abstammung ihren Lauf. Folgende Lemberger Mathematiker fielen ihr zum Opfer: Auerbach° (erschossen bei der Auflösung des Rapoport-Krankenhauses 1942), Eidelheit (ermordet 1943), Schauder (ermordet 1943), Marian Jacob (kam unter unbekannten Umständen ums Leben, 1944), Schreier (nahm Gift, 1943), Ludwik Sternbach (kam 1942 ums Leben), Menachem Wojdysławski (kam nach 1942 ums Leben).

Im Juli 1944 war die Einwohnerzahl Lembergs auf 150 000 gefallen (vor dem Krieg zählte die Stadt 300 000 Einwohner und im Juni 1941 sogar über 400 000). Die Rote Armee eroberte die Stadt am 27. Juli 1944 mit starker Unterstützung seitens der Landesarmee (Armia Krajowa, eine polnische Untergrundarmee), aber nach einigen Tagen begannen die Sowjets, polnische Offiziere zu verhaften und zu deportieren und führten ihr Regime ein. Heute ist bekannt, dass bereits am 28. Juli 1944 ein Vertrag (damals geheim) mit dem PKWN[59] abgeschlossen worden war, auf dessen Grundlage die Hälfte Polens, die den Sowjets im Ergebnis der Vereinbarung von Ribbentrop und Molotow (mit Ausnahme von Podlasie, auf das sie verzichteten) zugefallen war, sowjetisch bleiben sollte. Danach wurde einen Monat später eine weitere Vereinbarung über die Umsiedlung der polnischen Bevölkerung nach Westen geschlossen. Die Konferenz von

[59] Das PKWN – Polnisches Komitee der Nationalen Befreiung – war eine von den Kommunisten gebildete polnische Ersatzregierung, die lange Zeit nur von der Sowjetunion anerkannt war. Nach der fingierten Vereinigung mit der polnischen Exilregierung in London und gefälschten Wahlen wurde sie auch von den Westmächten anerkannt.

Jalta (Januar 1945) bestätigte die vorherigen Festlegungen von Teheran über die Verschiebung „des Wohnsitzes des Staates und des polnischen Volkes“ nach Westen, aber die endgültige Festlegung der neuen Grenzen erfolgte erst auf der Potsdamer Konferenz im August 1945. Die Vorbereitungen für die Vertreibung der polnischen Bevölkerung begannen allerdings schon im Herbst 1944, und die ersten Transporte setzten sich im Frühjahr 1945 in Bewegung, noch vor Beendigung der Kriegshandlungen und vor der Festlegung der neuen Grenzen. Am 31. August 1945 verstarb Banach°, kurz darauf verließen die letzten polnischen Mathematiker Lemberg: Knaster (nach Breslau), Mazur (nach Łódż), Orlicz° (nach Posen), Nikliborc (nach Warschau), Żyliński° (nach Gleiwitz).

Die Lemberger mathematische Schule hörte auf zu existieren.

Einige Vertreter der Lemberger mathematischen Schule

Andrzej ALEXIEWICZ (1917–1995). Geboren in Lemberg, Studium der Physik und Mathematik an der JKU. Promotion 1944 an der JKU im Untergrund. Ab 1945 als Professor an der Universität in Posen.

Herman AUERBACH (1901–1942). Geboren in Tarnopol, Studium an der JKU Mathematik. Promotion 1930, Habilitation 1935. Ermordet in der Zeit der deutschen Besetzung.

Stefan BANACH (1892–1945). Geboren in Krakau. Studium an der Technischen Hochschule in Lemberg. Unterbrechung des Studiums infolge des 1. Weltkrieges. Promotion 1920 an der JKU, Habilitation ebenfalls dort 1922. Wurde danach sofort außerordentlicher Professor und 1927 ordentlicher Professor. Während der sowjetischen Okkupation war er Dekan an der ukrainischen Universität, während der deutschen Okkupation bestritt er seinen Unterhalt durch Füttern von Läusen. Verstarb kurz nach Kriegsende.

Kazimierz BARTEL (1882–1941). Geboren in Lemberg, Studium der Mechanik an der Technischen Hochschule und der Mathematik an der Universität. Promotion 1911 an der Technischen Hochschule, wurde dort 1912 außerordentlicher Professor. Nach der Habilitation 1914 mit Verzögerung durch Teilnahme am Krieg 1917 ordentlicher Professor. Einer der bekanntesten Politiker in der Zeit zwischen den Weltkriegen (mehrmals Regierungschef, Minister , Abgeordneter des Sejm, Senator). Rektor 1930/31 der Technischen Hochschule. Erschossen von den Deutschen am 26. Juli 1941.

Zygmunt Wilhelm BIRNBAUM (1903-2000). Geboren in Lemberg. Nach dem Jurastudium zog es ihn zur Mathematik, Promotion an der JKU 1929. Zusatzstudium 1929-1931 in Göttingen, wo er das Diplom als Aktuar erwarb. Ab 1937 in der Emigration in den USA, wo er Professor an der Universität in Seattle wurde.

Leon CHWISTEK (1884–1944). Geboren in Krakau. Daselbst Studium der Mathematik und Promotion 1906. Im 1. Weltkrieg Dienst in den Polnischen Legionen. Habilitation 1928 an der Universität in Krakau. 1930 Berufung auf den Lehrstuhl für Logik an der JKU als außerordentlicher Professor und 1938 als ordentlicher Professor. Nach Ausbruch des deutsch-sowjetischen Krieges emigrierte er nach Georgien. Verstarb 1944 in Moskau (nach Ablehnung eines Vorschlags zum Eintritt in das PKWN).

Meier EIDELHEIT (1910–1943). Geboren nahe Lemberg. Studium der Mathematik an der JKU. Promotion 1938. Ermordet durch die Deutschen.

Władysław HETPER (1909–1940 ?). Geboren in Krakau. Dort Studium der Mathematik, 1937 an der JKU. Kämpfte im September 1939 und gelangte in deutsche Kriegsgefangenschaft, aus der ihm die Flucht gelang. Auf dem Wege nach Lemberg von den Sowjets aufgegriffen, angeklagt wegen Spionage (hatte Manuskripte von Arbeiten zur Logik bei sich, die man für codierte Nachrichten hielt). Deportiert in ein Lager, wo er verstarb.

Zygmunt JANISZEWSKI (1888–1920). Geboren in Warschau. Studium in Zürich, Göttingen, München und Paris. Promotion 1911 an der Sorbonne, Habilitation 1913 in Lemberg. 1. Weltkrieg als Freiwilliger in den Polnischen Legionen. 1919 Berufung an die Warschauer Universität. Verstarb 1920 in Lemberg.

Mark KAC (1914–1984). Geboren in Krzemieniec. Studium der Mathematik an der JKU. Promotion 1937 an der JKU. Ab 1938 in den USA, Professor an der Cornell University in Ithaca, New York.

Stefan KACZMARZ (1895–1939). Geboren in Sambor. Studium der Mathematik an der Universität in Krakau mit einer Unterbrechung wegen seines Dienstes in den Polnischen Legionen während des 1. Weltkrieges. Ab 1923 an der Technischen Hochschule Lemberg. Promotion 1924 an der JKU, dort auch 1929 Habilitation. Als Offizier der Reserve Teilnahme am Krieg 1939, aus dem er nicht zurückkehrte.

Bronisław KNASTER (1893–1980). Geboren in Warschau. Studium der Medizin in Paris und danach der Mathematik in Warschau. Promotion 1923 und Habilitation 1926 in Warschau. Häufiger Gast in Lemberg. Verbrachte dort die Jahre 1939–1945. Während der sowjetischen Okkupation war er Professor an der ukrainischen Universität, während der deutschen Besatzungszeit fütterte er Läuse. Ab 1945 Professor an der Universität in Breslau.

Kazimierz KURATOWSKI (1896–1980). Geboren in Warschau. Studium der Mathematik begonnen in Glasgow, beendet an der Universität in Warschau. Promotion 1921 und gleich danach Habilitation. In den Jahren 1927–1933 Professor an der Technischen Hochschule in Lemberg, ab 1934 Professor an der Universität in Warschau.

Antoni Marian ŁOMNICKI (1881–1941). Geboren in Lemberg. Dort Studium der Mathematik mit Zusatzstudium in Göttingen. Habilitation 1919 an der Technischen Hochschule Lemberg, ab 1921 dort ordentlicher Professor. Erschossen von Deutschen am 4. Juli 1941.

Stanisław MAZUR (1905–1981). Geboren in Lemberg. Studium der Mathematik an der JKU. Obgleich ohne Studienabschluss, Promotion dort 1932. Habilitation 1936 an der Technischen Hochschule in Lemberg, wo er auch arbeitete. Verließ Lemberg 1946. Ab 1948 Professor an der Universität in Warschau.

Stefan MAZURKIEWICZ (1988–1946). Geboren in Warschau. Studium der Mathematik in Krakau, Lemberg, München und Göttingen. Promotion 1913 an der Universität in Lemberg, Habilitation 1919 an der Universität in Krakau. Ab 1919 Professor an der Universität in Warschau.

Władysław ORLICZ (1903–1990). Geboren in Okocim. Studium der Mechanik an der Technischen Hochschule und der Mathematik an der Universität in Lemberg. Promotion 1926 an der JKU, dort auch 1934 Habilitation. Ab 1937 Professor an der Universität in Posen. Den 2. Weltkrieg verbrachte er in Lemberg.

Stanisław RUZIEWICZ (1889–1941). Geboren bei Kołomyja. Studium der Mathematik an der Universität in Lemberg. Promotion dort 1912. Danach ein Jahr Aufenthalt in Göttingen. Habilitation 1918 an der Universität in Lemberg. Dort 1920 außerordentlicher Professor und 1924 ordentlicher Professor. Nach Entzug des Lehrstuhls an der JKU 1934 Umzug an die Akademie für Außenhandel in Lemberg. Erschossen von Deutschen am 12. Juli 1941.

Juliusz Paweł SCHAUDER (1899–1943). Geboren in Lemberg. Nach Abschluss des Gymnasiums Einberufung zur österreichischen Armee und mit ihr an die italienische Front. Nach dem Krieg Rückkehr mit der polnischen Armee nach Polen. Studium der Mathematik an der JKU, dort auch 1924 Promotion und 1927 Habilitation. Nach dem Einmarsch der Deutschen verbarg er sich in Borysław, kehrte aber 1943 nach Lemberg zurück. Er konnte das Verstecken schwer ertragen. Bei einem Ausgang wurde er von Deutschen aufgegriffen und erschossen.

Józef SCHREIER (1908–1943). Geboren in Drohobycz. Studium der Mathematik an der JKU. Promotion in Göttingen. Nach dem Einmarsch der Deutschen musste er sich verbergen. Als das Versteck entdeckt wurde, nahm er Gift.

Wacław SIERPIŃSKI (1882–1969). Geboren in Warschau. Dort Beginn des Studiums der Mathematik. Beendigung in Krakau. Dort 1906 Promotion. Nach der Promotion Reise nach Göttingen. Habilitation 1908 an der Universität in Lemberg, dort 1910 außerordentlicher

Professor. Während des 1. Weltkrieges in Russland interniert. Ab 1918 ordentlicher Professor an der Universität in Warschau.

Hugo Dionizy STEINHAUS (1887–1972). Geboren in Jasło. Begann das Studium der Mathematik in Lemberg, nach einem Jahr Wechsel nach Göttingen. Dort 1911 Promotion mit dem Prädikat *summa cum laude*. Teilnahme an den Kämpfen um Wolhynien in den Polnischen Legionen. Habilitation 1917 an der Universität in Lemberg, dort ab 1920 außerordentlicher Professor und ab 1923 ordentlicher Professor. Während der deutschen Besatzungszeit Versteck in einem Dorf bei Lemberg, danach in den Karpaten. Nach Lemberg kehrte er nicht mehr zurück. Ab 1945 Professor an der Universität in Breslau.

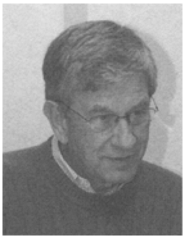
Ludwik STERNBACH (1905–1942). Geboren in Sambor. Studium der Mathematik und Physik an der JKU. Zusammenarbeit mit Mazur° (gemeinsame Arbeiten), arbeitete aber weiter als Lehrer und Aktuar. Nach dem Einmarsch der Deutschen musste er sich verstecken. Die Umstände seines Todes sind nicht bekannt.

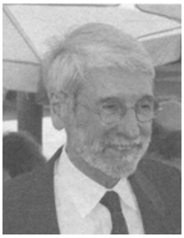
Włodzimierz STOŻEK (1883–1941). Geboren bei Krakau. Studium der Mathematik an der Universität in Krakau, danach zwei Jahre in Göttingen. Promotion 1922 in Krakau. Im selben Jahr außerordentlicher Professor und ab 1926 ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule in Lemberg. Erschossen von Deutschen (mit beiden Söhnen) am 4. Juli 1941.

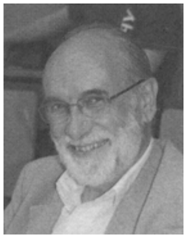
Stanisław Marcin ULAM (1909–1984). Geboren in Lemberg. Studium der Mathematik an der Technischen Hochschule in Lemberg. Dort 1933 Promotion. Ab 1935 Aufenthalt in Princeton, aber jedes Jahr während der drei Sommermonate in Lemberg. Während des 2. Weltkrieges Mitarbeiter am Atomprogramm Manhattan, dann Professor an der Universität in Boulder, Colorado.

Eustachy ŻYLIŃSKI (1889–1954). Geboren bei Winnica in der Ukraine. Studium der Mathematik an der Universität in Kiew und Ergänzung des Studiums in Göttingen, Marburg und Cambridge. Nach der Rückkehr nach Kiew Erlangung des Titels Magister (im russischen System verlieh er das Recht, an einer Universität zu unterrichten). Während des 1 .Weltkrieges Dienst in der russischen Armee, danach in der polnischen Armee. 1919 Berufung als Professor an die JKU, dort ordentlicher Professor. Nach dem 2. Weltkrieg Wechsel nach Łódź.

Danksagung: Ich möchte Herrn Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau für den Vorschlag, diesen Artikel zu schreiben, und Herrn Alfred Müßiggang aus Cottbus für die Übersetzung herzlich danken.







Max-Albert Knus **Guido Mislin** **Urs Stammbach**

Beno Eckmann 1917 – 2008

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 01A60
- Keywords and Phrases: History of mathematics, homological algebra, algebraic topology, Eckmann-Hilton duality, group theory

Am 25. November 2008 verstarb Beno Eckmann in seinem 92. Lebensjahr. Dieser Nachruf beleuchtet Leben und Werk dieses bedeutenden Vertreters der Algebra und der Topologie.

Eingegangen: 27. 10. 2009

Max-Albert Knus, Guido Mislin, Urs Stammbach
Mathematik, ETH-Zentrum, CH-8092 Zürich
max-albert.knus@math.ethz.ch; guido.mislin@math.ethz.ch;
urs.stammbach@math.ethz.ch;

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Lebenslauf

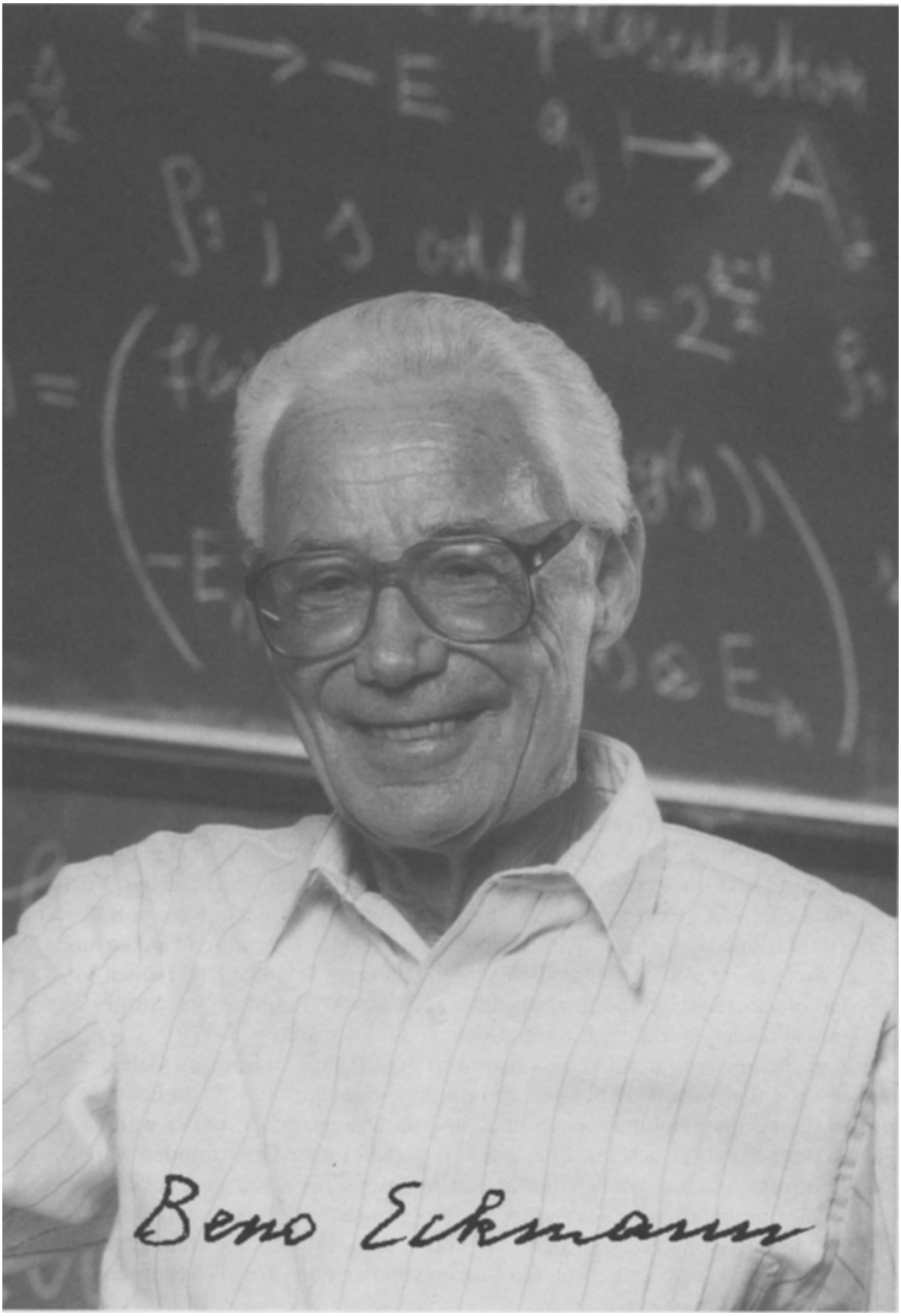
Beno Eckmann wurde am 31. März 1917 in Bern als Sohn eines Chemikers und einer Ärztin geboren.[1] Er besuchte die Schulen in Bern – die hervorragenden Schulzeugnisse aus jener Zeit sind noch vorhanden – und erhielt 1935 die Matur humanistischer Richtung, also mit Griechisch und Latein. Entgegen dem Wunsch seines Vaters entschloss sich Beno Eckmann zum Studium der Mathematik, und zwar an der ETH in Zürich. In der kleinen damaligen Studentengruppe an der Abteilung für Mathematik und Physik der ETH hatte er von Anfang an guten Kontakt mit Heinz Hopf. Er diplomierte 1939. Nur zwei Jahre später, 1941, schloss er das Doktorat mit der Dissertation *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume* ab; Referent war Heinz Hopf und Korreferent Ferdinand Gonseth. Unmittelbar danach, 1942, habilitierte er sich an der ETH in Zürich.

Während der Zeit seines Studiums geschahen zwei für seinen persönlichen Lebenskreis wichtige Dinge: 1937 wurde er Schweizer Bürger – als solcher hatte er im Zweiten Weltkrieg viele Wochen Militärdienst zu leisten – und 1942 heiratete er Doris Wolf. Der Ehe entsprossen drei Kinder. In seinen späten Jahren wies er gerne darauf hin, dass er schon mehr als 60 Jahre mit Doris verheiratet sei. Seine Familie mit den Großkindern und Urgroßkindern war ihm immer eine große Freude.

Ab 1942 war Beno Eckmann als Dozent an der Universität Lausanne tätig, 1944 wurde er dort Professeur extraordinaire. Während dieser Zeit behielt er seine Privatdozententätigkeit an der ETH in Zürich bei. Im Jahre 1947 – also kurz nach Ende des Zweiten Weltkrieges, während dem fast alle wissenschaftlichen Kontakte mit dem Ausland unmöglich waren – folgte ein längerer Aufenthalt in den USA. Die Reise führte im Januar über Paris, wo er mehrere Vorträge hielt. Die Zeit von Februar bis Mitte April verbrachte er als Mitglied am Institute for Advanced Study in Princeton und von Mitte April bis Anfang Mai schloss sich eine ausgedehnte Vortragsreise an, während der er zahlreiche der wichtigen Universitäten im Mittleren Westen und an der Ostküste der USA besuchte. Von Juni bis September war er dann wieder am Institute for Advanced Study in Princeton. Beno Eckmann erhielt in jener Zeit und auch später aus den USA mehrere Angebote, die er aber alle ablehnte. Kurz nach seiner Rückkehr in die Schweiz erreichte ihn dann der Ruf zum ordentlichen Professor an der ETH in Zürich. Diese Stelle trat er im Herbst 1948 an.

Bereits aus der Beschreibung dieses ersten Amerika-Aufenthaltes wird deutlich, dass sich Beno Eckmann schon früh in seiner Laufbahn bemühte, ein weltweites Netzwerk von wissenschaftlichen Kontakten aufzubauen. Davon konnten in der Folge die ETH und vor allem auch seine vielen Schüler und Schülerinnen in hohem Maße profitieren. Wie intensiv sich diese Bemühungen gestalteten, geht aus der nachfolgenden kurzen Aufzählung von Gastaufenthalten hervor, die in den ersten Jahren seiner Professur an der ETH stattfanden.

[1] Sein Vater Aron und seine Mutter stammten aus Osteuropa; sie waren beide vor dem Ersten Weltkrieg in die Schweiz gekommen, um an der Universität Bern zu studieren. In der Zeit vor dem Ersten Weltkrieg war die Universität Bern ein beliebter Studienort für osteuropäische und insbesondere russische Studierende.



© Foto: Freundlicherweise von Heiner H. Schmitt zur Verfügung gestellt.

Im Herbst 1950 schloss sich ein zweiter Amerikaaufenhalt an. In Cambridge (MA) fand in jenem Herbst der Internationale Kongress für Mathematiker statt. Die Teilnahme am Kongress, bei dem Eckmann als Sprecher eingeladen war, kombinierte er mit einem Gastaufenthalt an der University of Michigan und mit einer Vortragsreise. Ein Jahr später führte eine dritte Amerikareise an die University of Illinois at Urbana-Champaign und zu einer Vortragsreise quer durch den ganzen Kontinent, sie dauerte von August 1951 bis März 1952. Nur wenige Jahre später reiste er zum vierten Mal in die USA; von Juli bis August 1955 besuchte er diesmal vor allem die Universitäten an der Westküste, darunter für einen ausgedehnten Gastaufenthalt die University of California in Berkeley. Einladungen aus ganz Europa zu Vorträgen und längeren Vorlesungszyklen führten ihn 1956 und 1957 nach Deutschland, England, Belgien und Italien.

In späteren Jahren folgten viele weitere wissenschaftliche Reisen und Gastprofessuren, auf die wir nicht in detaillierter Weise eingehen können. Einzig die engen Kontakte mit dem Technion in Haifa und der Ben Gurion University in Beer-Sheva seien hier speziell noch erwähnt.

Beno Eckmann widmete sich während der Tätigkeit an der ETH in Zürich neben seiner Forschung in ganz besonderem Maße dem Unterricht, und zwar auf allen Stufen. Dazu gehörten in seinen ersten Jahren nach 1948 auch mathematischer Unterricht für Ingenieurstudierende im Fach Darstellende Geometrie. Später waren es dann vor allem Vorlesungen in Algebra und Topologie, die er betreute. Den einführenden Zyklus der Algebra-Vorlesungen hat er während mehrerer Jahrzehnte regelmäßig gelesen. Dazu kamen fortgeschrittene Vorlesungen wechselnden Inhalts, die ein weites Feld in den Gebieten Algebra, Topologie und Differentialgeometrie abdeckten. Die Vorlesungen rückten jeweils die wesentlichen Linien und die Zusammenhänge in den Mittelpunkt. Glasklar und bis ins Detail nachvollziehbar war die Darstellung des Stoffes. Und die fortgeschrittenen Vorlesungen führten die Zuhörer in aller Regel bis an die Grenzen der aktuellen Forschung.

Ganz besonders am Herzen lagen ihm auch die Seminare, in denen die Studierenden über fortgeschrittene Themen vorzutragen hatten. Wohl alle seine nachmaligen Doktoranden und Doktorandinnen erinnern sich an die Vorbereitungen zu diesen Vorträgen: Ungefähr eine Woche vor dem Termin hatten die Vortragenden im Büro von Beno Eckmann auf Grund des Vortragsmanuskriptes zu referieren. Da wurden Lücken angesprochen, es wurde auf Fehler hingewiesen, es gab Hinweise zu einem effektvollen Vortragsstil, und oft hörten dann die Vortragenden auch von Weiterungen des Stoffes und von Zusammenhängen, die in der Literatur nicht zu finden waren.

Es ist nicht verwunderlich, dass sich nach derartigen Erfahrungen viele der Studierenden entschlossen, eine Diplomarbeit und eine Dissertation bei Beno Eckmann zu beginnen. Unzählige Diplomarbeiten und rund 60 Dissertationen hat er während seiner Tätigkeit an der ETH betreut. Eine größere Anzahl seiner Doktoranden waren später als Professoren an Hochschulen des In- und Auslandes tätig. Ein eindrucksvoller „Doktorandenstammbaum", der aus Anlass des 80. Geburtstages Beno Eckmanns von seinen Schülern in Barcelona zusammengestellt wurde, erstreckt sich über fünf Doktorandengenerationen und seine Äste enthalten Namen von Personen aus allen fünf Kontinenten.

Neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit stellte sich Beno Eckmann immer wieder für administrative und wissenschaftspolitische Arbeiten zur Verfügung: Von 1954 bis 1956 war er Vorsteher der Abteilung für Mathematik und Physik an der ETH Zürich, von 1956 bis 1960 Sekretär der Internationalen Mathematischen Union, von 1961 bis 1962 Präsident der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft und von 1973 bis 1984 Mitglied des Forschungsrates des Schweizerischen Nationalfonds.

Auch um die Publikation mathematischer Texte hat sich Beno Eckmann verdient gemacht: Er war während vieler Jahre Mitherausgeber der berühmten *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* des Springer-Verlags. Ferner war er Mitbegründer der *Lecture Notes in Mathematics*, welche zu einer Zeit, als es noch kein Internet gab, eine rasche Verbreitung von neuen Forschungsresultaten in zusammenfassender Form zum Ziele hatten.

Eckmanns größte Leistung nichtwissenschaftlicher Art ist aber zweifellos die 1964 erfolgte Gründung des Forschungsinstitutes für Mathematik an der ETH, dem Beno Eckmann bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1984 auch als Direktor vorstand. Das Institut diente in den ersten Jahren dazu, den für die Mathematik so wichtigen Gästeaustausch zu erleichtern und die internationale Zusammenarbeit der Mitglieder des Departementes zu fördern. Aus kleinen Anfängen hat sich das Institut im Laufe der Jahre zu einem weltweit bekannten Zentrum mathematischer Forschung entwickelt. Es konnte im Sommer 2004 mit einem glanzvollen, hervorragend besetzten Kolloquium sein 40-jähriges Bestehen feiern.

Viele Ehrungen zeugen von der hohen nationalen und internationalen Wertschätzung Beno Eckmanns, darunter sind Ehrendoktorate der Universität Fribourg, der École Polytechnique Fédérale in Lausanne sowie des Technion in Haifa und der Ben Gurion University in Beer-Sheva. Anlässlich des Internationalen Mathematiker-Kongresses 1994 in Zürich wurde er zu dessen Ehrenpräsidenten ernannt. Weitere Ehrungen erhielt er von der Université de Genève und der Albert Einstein-Gesellschaft in Bern.

Während andere sich nach der Emeritierung ganz dem Ruhestand widmen, blieb Beno Eckmann seiner Tätigkeit und der ETH treu. Eine ganze Reihe von Veröffentlichungen entstanden während dieser Zeit, darunter auch zahlreiche Forschungsarbeiten. Er betreute die Herausgabe der Gesammelten Werke von Heinz Hopf und veröffentlichte eine umfangreiche Sammlung von Übersichtsvorträgen, die er während seiner langen mathematischen Tätigkeit gehalten hatte. Bis Anfang 2008 war Beno Eckmann regelmäßig in seinem Büro an der ETH anzutreffen; hier diskutierte er gerne intensiv die vielen mathematischen Fragen, die ihn nach wie vor beschäftigten. Hier erzählte er auch den Gesprächspartnern von seinen vielen persönlichen Erinnerungen und Erfahrungen aus seiner langen mathematischen Tätigkeit oder unterhielt sich mit ihnen über seine intensive Beschäftigung mit Literatur, Theater und Musik. Ganz besonders genoss er hier den Kontakt mit den vielen Gästen „seines“ Forschungsinstitutes.

Geistig nach wie vor außerordentlich rege, ließen seine körperlichen Kräfte nach seinem 90. Geburtstag merklich nach. Seine letzten Monate verbrachte Beno Eckmann gut betreut zusammen mit seiner Frau Doris im Hugo Mendel-Heim in Zürich. Er starb am 25. November 2008.

2 Wissenschaftliche Arbeiten

Das umfangreiche mathematische Werk Beno Eckmanns besteht aus 120 Beiträgen in mathematischen Zeitschriften. Er hat ferner die Selecta Hermann Weyl herausgegeben, die Gesammelten Werke von Heinz Hopf [Ho01] und eine Sammlung von Essays [E07] aus seinem reichen mathematischen Leben, die sich an ein allgemeines mathematisches Publikum wenden. Daneben existiert eine längere Reihe von vervielfältigten Ausarbeitungen seiner Vorlesungen. Eine Auswahl seiner Arbeiten ist in den Selecta Beno Eckmann [E87] zusammengefasst, die zu seinem 70. Geburtstag erschienen sind.

Für das Folgende wollen wir aus der Gesamtheit einzelne Gruppen von Arbeiten herausgreifen und sie im Zusammenhang besprechen; es treten dabei Entwicklungslinien hervor, die Eckmann über Jahre in seinem Denken und Forschen verfolgt hat. Aus Platzgründen mussten weitere wichtige Arbeiten hier ganz ausgeschlossen bleiben, wie etwa diejenigen, die sich mit komplexen und fastkomplexen Strukturen beschäftigen. In unserer Darstellung sollen die speziellen Eigenheiten von Eckmanns Werk besonders hervortreten: Peter Hilton, mit dem Eckmann eine langjährige enge und fruchtbare Zusammenarbeit pflegte, sagte einmal, Eckmanns Werk zeichne sich durch *unification, clarification* und *penetration* aus (siehe [Hi78]). Beispielhaft zeigt sich dies in Eckmanns tiefer Überzeugung, dass Topologie und Algebra in einem echt symbiotischen Verhältnis zueinander stehen, und so ist in seinem Werk mehrfach festzustellen, wie neue Begriffsbildungen und Ideen parallel oder nacheinander in beiden Gebieten verfolgt werden. Eine solche Einstellung zur Mathematik als eine Gesamtheit ist heute nicht mehr unüblich, aber damals in der Mitte des 20. Jahrhunderts, als man „der Reinheit der Methode" einen besonderen Stellenwert einräumte, war das anders.

2.1 Das Resultat von Radon und Vektorfeldern auf Sphären

Im Jahre 1938 hatte Beno Eckmann in einem von Heinz Hopf geleiteten Seminar über die Resultate von Adolf Hurwitz und Johann K.A. Radon über die Komposition quadratischer Formen vorzutragen. Es ging dabei um die folgenden Frage:

Für welche ganze Zahlen n und p lassen sich n komplexe bzw. reelle Bilinearformen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *so bestimmen, dass die Identität*

$$(x_1^2 + \cdots + x_p^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

besteht.

Hurwitz hatte den Spezialfall $p = n$ behandelt und Radon den allgemeinen Fall. In beiden Fällen wurden für die Beweise *Ad-hoc*-Methoden verwendet. Eckmann, der sich – wie er später einmal bemerkte – mit diesen *Ad-hoc*-Überlegungen nicht richtig anfreunden konnte, suchte einen anderen Zugang. Er erkannte den Zusammenhang mit der Gruppentheorie, und es gelang ihm, mit Hilfe von tiefliegenden Sätzen von Issai Schur über das Zusammenspiel von komplexen und reellen Darstellungen das allgemeine Resultat von Radon zu beweisen. Im reellen Fall lautet dieses wie folgt:

Genau dann existieren reelle Bilinearformen $z_1, z_2, ..., z_n$, wenn für $n = u \cdot 2^{4\alpha+\beta}$ mit $u > 0$ ungerade und $0 \leq \beta < 4$ gilt $p < 8\alpha + 2^\beta$.

Topologische Konsequenzen lagen unmittelbar auf der Hand: Eine Lösung des reellen Radon-Problems für das Zahlenpaar n und p liefert auf der Sphäre S^{n-1} gerade $p-1$ linear unabhängige Vektorfelder. Dabei sind diese Vektorfelder durch *lineare* Operationen der Koordinaten auf der Sphäre S^{n-1} gegeben. Die Frage, ob auf den Sphären weitere – in diesem Sinn nichtlineare – Systeme von stetigen, linear unabhängigen Vektorfeldern existieren, blieb lange offen, bis sie Frank Adams 1962 ([A62]) im negativen Sinn entschied.

Beno Eckmann hat bei verschiedenen Gelegenheiten (siehe z.B. [114]) den Wunsch und die Hoffnung geäußert, auf Grund von analytischen Methoden, vielleicht mittels Variationsrechnung, einsehen zu können, dass die Existenz von stetigen Vektorfeldern auf Sphären die Existenz von *linearen* impliziert. Der sehr anspruchsvolle Beweis von Adams wäre dann auf ein relativ elementares Problem der linearen Algebra und Darstellungstheorie der Gruppen reduziert. Doch diese Einsicht ist der Mathematik bis heute verwehrt geblieben.

Wir erwähnen noch explizit den Spezialfall $p = n$: Hier besteht ein enger Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz von Divisionsalgebren über den reellen Zahlen. Wie bereits Hurwitz in der entsprechenden Arbeit feststellte, ergibt sich aus seinem Resultat, dass reelle Algebren, welche die Normproduktregel erfüllen, nur für die Dimensionen $1, 2, 4, 8$ existieren können; es sind dies die rellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Oktaven. Aus den Arbeiten von John Milnor [BoM58] und Michel Kervaire [K58] ergibt sich etwas allgemeiner, dass nur in diesen Dimensionen reelle Divisionsalgebren existieren können. Nur wenig später erschien die Arbeit von Frank Adams [A60] mit ihrem tiefliegenden Resultat zur Hopfinvariante. Aus diesem folgt die noch stärkere Aussage, dass es in $\mathbb{R}^n$ nur für $n = 1, 2, 4, 8$ eine nullteilerfreie *stetige* Multipliplikation mit einem zweiseitigen Einselement geben kann. Alle diese neueren Resultate benötigen für ihren Beweis trotz aller heute bekannten Vereinfachungen fortgeschrittene Methoden der algebraischen Topologie, wie die sogenannte Bott-Periodizität der unendlichen orthogonalen bzw. unitären Gruppe und die damit im Zusammenhang stehende K-Theorie. Auch in diesem Spezialfall $p = n$ ist also das oben angesprochene Phänomen relevant, dass die Existenz einer stetigen Operation jeweils auch die Existenz einer *(bi)linearen* Operation impliziert. Eckmann hat in [105] den engen Zusammenhang zwischen den Hurwitz-Radon-Matrizen, wie sie sich aus der Lösung des ursprünglichen Problems ergeben, und der Bott-Periodizität nachgewiesen und darauf aufmerksam gemacht, wie eine tiefere Einsicht in die Natur des oben beschriebenen Phänomens zu einem neuen Verständnis der Bott-Periodizität und damit der topologischen K-Theorie führen könnte.

2.2 Cohomologie der Gruppen

In seiner Arbeit [15] schließt Eckmann an frühere Arbeiten seines Mentors Heinz Hopf [Ho41a, Ho44] an. Dieser hatte für eine gegebene diskrete Gruppe G einen abstrakten algebraischen Komplex definiert, in dem die Homologiebildung die Homologiegruppen eines asphärischen topologischen Raumes mit Fundamentalgruppe G liefert. Dass die Homologiegruppen eines derartigen Raumes nur von der Fundamentalgruppe G abhängen, hatte in den dreißiger Jahren Witold Hurewicz [Hu35] bewiesen; nicht klar war damals aber, ob zu jeder Gruppe G ein derartiger Raum existiert und wie er allenfalls zu konstruieren wäre. Eckmann nahm sich dieses Problems an, arbeitete – abweichend von Hopf – mit der Cohomologie statt mit der Homologie und konstruierte auf kanonische Weise zu gegebenem G einen algebraischen Komplex, der dem Cokettenkomplex der universellen Überlagerung eines derartigen Raumes nachgebildet ist: Es ist die – später so genannte – homogene Standardauflösung von $\mathbb{Z}$ über dem Gruppenring $\mathbb{Z}G$, die hier konstruiert wurde. Mit Hilfe der Coketten beschrieb Eckmann auch explizit die Produktstruktur der Cohomologie; dies führte zur Definition des Cohomologie*ringes* der Gruppe G. Die Arbeit geht detailliert auf die Beziehungen ein, die sich zwischen der topologischen und algebraischen Sichtweise ergeben, insbesondere spiegeln sich im algebraischen Vorgehen explizit die Begriffe der universellen Überlagerung und des Produktes in der Cohomologie eines topologischen Raumes wider.

Es ist mathematikgeschichtlich interessant, dass die (Co)Homologietheorie der Gruppen praktisch gleichzeitig und unabhängig von Hopf und Eckmann auch von Samuel Eilenberg und Saunders MacLane in den USA und von Hans Freudenthal in den Niederlanden in ganz ähnlicher Weise angegangen wurde. Während des Zweiten Weltkrieges war die wissenschaftliche Kommunikation zwischen der Schweiz und dem Ausland fast völlig zum Stillstand gekommen. Von den neuen Entwicklungen hörte man gegenseitig erst nach Ende des Krieges, als die Kontakte langsam wieder aufgenommen werden konnten.[2]

Die Beschäftigung mit der Gruppencohomologie hat Beno Eckmann in [35] fortgesetzt. Dabei wurden die Beziehungen zwischen den Cohomologiegruppen von einer Gruppe G und einer Untergruppe U näher untersucht. Unter anderem ist in dieser Arbeit das Resultat zu finden, das später unter dem Namen Shapiro-Lemma bekannt geworden ist (siehe [35], Theorem 4, [33], Theorem 3); es drückt die Cohomologie einer Untergruppe als Cohomologie der ganzen Gruppe mit speziellen Koeffizienten aus. In heutiger Schreibweise lautet es wie folgt:

$$H^*(U,B) \cong H^*(G, \mathrm{Hom}_U(\mathbb{Z}(G),B)) \ . \tag{1}$$

[2] Im Falle von Saunders MacLane lässt sich dies etwas genauer festlegen (siehe MacLane [ML78]): Eine Note von Hopf, die als Beitrag zu einer Topologiekonferenz gedacht war und die inhaltsmäßig ungefähr seiner Arbeit [Ho41a] entsprach, erreichte im Sommer 1941 noch Eilenberg und MacLane. Diese erkannten deren Wichtigkeit sofort, und es gelang ihnen, zu einer gegebenen Gruppe G einen algebraischen asphärischen Komplex zu konstruieren, der sich später als eine Variante des Eckmannschen Komplexes entpuppte, nämlich als die inhomogene Standardauflösung.

Die allgemeine Theorie in der Cohomologie der Gruppen liefert sofort eine Abbildung (Restriktion) $R: H^*(G) \to H^*(U)$; sie ist durch die entsprechende Einschränkung der Coketten definiert. Nimmt man die Beziehung (1) zur Hilfe, so lässt sich R auch durch den Koeffizienten-Homomorphismus

$$B \cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}(G), B)) \to \mathrm{Hom}_U(\mathbb{Z}(G), B))$$

beschreiben. Im Falle einer Untergruppe U von *endlichem* Index in G lässt sich durch Summenbildung ein Modulhomomorphismus

$$\mathrm{Hom}_U(\mathbb{Z}(G), B) \to B$$

definieren. Eckmann benützt diesen Homomorphismus, um daraus mit Hilfe der Beziehung (1) eine Abbildung (Transfer) T in der der Restriktion umgekehrten Richtung $H^*(U) \to H^*(G)$ zu definieren.[3] Die Namensgebung folgte dabei der Tatsache, dass in der Dimension 1 die so definierte Abbildung zum „klassischen" gruppentheoretischen Transfer (Verlagerung) dual ist. Die Definition erfolgte zusätzlich auch explizit mit Formeln in der Standardauflösung von [15]. Gegenüber der Arbeit [15] sind hier wichtige notationelle Neuerungen festzustellen, wie etwa die Verwendung von Pfeilen für Abbildungen, von exakten Folgen und von Diagrammen; es sind dies Notationen, wie sie sich in jener Zeit rasch in der ganzen Mathematik einbürgerten. Aus den gegebenen Definitionen des Transfers[4] ergaben sich leicht eine Reihe von Folgerungen, die sich für mannigfache Anwendungen in der Gruppentheorie als wichtig erweisen sollten, darunter vielleicht die wohl bekannteste Folgerung, dass die Zusammensetzung $T \circ R$: $H^*(G) \to H^*(G)$ nichts anderes als die Multiplikation mit dem Index von U in G ist.

Mit der Gruppenhomologie und -cohomologie und ihren Anwendungen in der Gruppentheorie hat sich Beno Eckmann in seinem Werk mehrfach wieder beschäftigt. Nach der erfolgreichen Definition der Transferabbildung war Eckmann mehr denn je davon überzeugt, dass die (Co)Homologie von Gruppen auch in der klassischen Gruppentheorie wichtige Anwendungen besitzen würde, die über die bereits bekannte Interpretation der zweiten und dritten Cohomologiegruppe durch Gruppenerweiterungen hinausgehen würden. In der Tat hatte sich gezeigt (siehe [StJ65], [StU66]), dass die einer Gruppenerweiterung zugeordnete, aus der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe stammende, exakte Fünf-Term-Sequenz derartige rein gruppentheoretische Anwendungen erlaubte, welche das Rechnen mit Kommutatoren betrafen, wie sie etwa in der Definition nilpotenter Gruppen auftreten. Aus Sicht der Gruppentheorie bestand deshalb ein Bedürfnis, diese Sequenz auf einfache Weise, d. h. ohne den involvierten Apparat der Spektralreihen herzuleiten. Dies wurde in der Arbeit von Eckmann und Stammbach

[3] Bereits in der etwas früher fertiggestellten Arbeit [33] hat Eckmann diese Transfer-Abbildung definiert.

[4] Gemäß einer mündlichen Mitteilung von Beno Eckmann ging seine Definition des Transfers auf eine Anregung von Emil Artin und John Tate zurück, welche der Gruppen(co)homologie erst dann algebraische Relevanz zusprechen wollten, wenn die klassische gruppentheoretische Konstruktion des Transfers (der Verlagerung) in diese Theorie eingebettet werden konnte. Artin und Tate haben in den unmittelbar folgenden Jahren die Gruppencohomologie in der Klassenkörpertheorie verwendet; siehe u. a. [T52].

[68] geleistet. Es schloss sich eine Reihe weiterer Arbeiten mit P. Hilton an ([72], [73], [74], [76], zum Teil auch gemeinsam mit U. Stammbach), welche die Theorie zentraler Gruppenerweiterungen betrafen: In dieser Situation lässt sich die Fünf-Term-Sequenz durch einen weiteren Term (siehe auch [Ga68]) verlängern, was eine Reihe von gruppentheoretischen Anwendungen auf sogenannte Stammerweiterungen und auf zentrale Produkte erlaubte.

Die Beschäftigung mit der Cohomologietheorie der Gruppen setzte sich in einer langen Reihe von Arbeiten zur homologischen Dualität fort. In seiner Dissertation hatte sich Robert Bieri [Bi72] mit Gruppen beschäftigt, deren ganzzahlige Cohomologie und Homologie eine zur Poincaré-Dualität analoge Dualität aufweisen (siehe auch [JW72]). Darunter fallen selbstverständlich Gruppen, deren Eilenberg-MacLane-Raum eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist, dann aber auch z. B. endlich erzeugte torsionsfreie nilpotente Gruppen. Unmittelbar daran anschließend stellten sich viele Fragen, und eine Reihe von Verallgemeinerungen boten sich an, insbesondere wenn man sich – wie Beno Eckmann – von der Topologie leiten ließ. Die Arbeiten [75], [77], [78], [79], [80], [82], [83] – viele davon gemeinsam mit Robert Bieri – gingen einem Teil dieser Fragen nach.[5] Insbesondere wurde in diesen Arbeiten der Begriff der Poincaré-Dualität verallgemeinert, wobei ein dualisierender Modul auftrat, mit dem man die Koeffizienten auf der Seite der Cohomologie zu tensorieren hatte, um eine Dualität zu erhalten. Der dualisierende Modul ergab sich dabei jeweils als die höherdimensionale Endengruppe $H^n(G,\mathbb{Z}G)$, wobei n die (Co)Homologiedimension der Gruppe G bezeichnet.[6] Ein Spezialfall dieser allgemeineren Dualität ergibt sich zum Beispiel dann, wenn der Eilenberg-MacLane-Raum von G eine *nicht* orientierbare Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall besteht eine verallgemeinerte Poincaré-Dualität, wenn als dualisierender Modul $\hat{\mathbb{Z}}$ verwendet wird, also die unendlich zyklische abelsche Gruppe mit nichttrivialer G-Operation. Es ergaben sich viele weitere Beispiele von Gruppen mit verallgemeinerter Dualität, wobei auch weit kompliziertere dualisierende Moduln auftraten.

Besonders interessant ist im Zusammenhang mit der Poincaré-Dualität der Fall der Dimension 2. Offensichtlich liefern hier die Flächengruppen Beispiele. Es stellt sich sofort die Frage, ob algebraisch gegebene Poincaré-Dualitätsgruppen stets Flächengruppen sind. In einer Serie von Arbeiten hat Eckmann nach wichtigen Vorarbeiten von Robert Bieri, Ralph Strebel und Heinz Müller (siehe [BS78], [Mu81]) diese Frage zusammen mit Peter Linnell im positiven Sinne klären können (siehe [88], [90], [91], [92]). Den Beweis hat Eckmann in [97], [98] zusammenfassend dargestellt.

[5] Wie Beno Eckmann in den Selecta [E87], p. 824, angemerkt hat, sind Teile der Arbeiten später redundant geworden; Kenneth S. Brown [B75] und Ralph Strebel [StR76] haben (unabhängig voneinander) gezeigt, dass die Definition der „Duality group" die Eigenschaft *FP* impliziert. Davon machten Eckmann und Bieri in ihren Beweisen noch keinen Gebrauch.

[6] Die Gruppe der Enden eines topologischen Raumes, die als $H^1(G,\mathbb{Z}G)$ interpretiert werden kann, wurde bereits um 1950 von Heinz Hopf, Hans Freudenthal und Ernst Specker untersucht.

2.3 Eckmann-Hilton-Dualität

Wohl im Zusammenhang mit dem Aufkommen der Kategorientheorie in den späten 40er Jahren (siehe [EML45]) traten in natürlicher Weise Fragen der Dualität von kategorietheoretischen Begriffen auf. Bei den Konstruktionen der Komplexe, und insbesondere beim algebraischen Beweis für die Tatsache, dass im Rahmen der (Co)Homologietheorie der Gruppen die Homologiebildung nicht von der gewählten freien Auflösung abhängt (siehe Hopf [Ho44]), erkannte man rasch, dass dies auch galt, wenn an Stelle der *freien* G-Moduln *projektive* G-Moduln zugelassen wurden. So lag es damals nahe, den kategorietheoretischen Begriff des projektiven Moduls zu dualisieren. Dies führt auf den Begriff des injektiven Moduls. Reinhold Baer, mit dem Beno Eckmann an der University of Illinois at Urbana-Champaign bei seinem Aufenthalt 1951/52 engen mathematischen und persönlichen Kontakt hatte, hat wohl damals in diesem Zusammenhang auf seine frühere Arbeit [B40] hingewiesen. In dieser hatte Baer jeden Modul M in einen umfassenden Modul einbetten können, welcher eine zur Eigenschaft *injektiv* äquivalente Eigenschaft besitzt. Zusammen mit Andreas Schopf[7] gelang es Beno Eckmann einen neuen einfachen Beweis des Resultates von Baer zu geben, und insbesondere zu einem gegebenen Modul M einen – in einem gewissen Sinn kleinsten – injektiven Obermodul $U(M)$ zu konstruieren, es ist dies die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) injektive Hülle von M. Für diesen Nachweis benützten Eckmann und Schopf den Begriff der *wesentlichen Erweiterung* von M, indem sie zeigten, dass die injektive Hülle $U(M)$ gleichzeitig die maximale wesentliche Erweiterung von M ist. Die entsprechende kurze Arbeit [34] gehört zu den am häufigsten zitierten Arbeiten in der homologischen Algebra überhaupt.

Über den damaligen Stand der „homologischen Algebra", soweit dies die Gruppencohomologie betrifft, gibt die Arbeit [40] Auskunft. Es ist dies der Text des Vortrages, den Beno Eckmann am Internationalen Mathematiker-Kongress 1954 in Amsterdam gehalten hat. Hier werden ganz allgemein die verschiedenen Cohomologietheorien behandelt, die sich dadurch definieren lassen, dass die Betrachtung auf verschiedene Arten von Coketten eingeschränkt werden, seien es Coketten, die zu einer Untergruppe gehören, seien es Coketten, die einer Endlichkeitsbedingung genügen.

Der Begriff der Dualität, wie er sich als heuristisches Prinzip aus der Kategorientheorie ergab, spielte in der Folge im Werk Beno Eckmanns eine wichtige Rolle. Dabei war insbesondere auch der topologische Begriff der Homotopie wichtig. Eine Übertragung des Begriffes der Homotopie auf die Situation von Moduln führte zu zwei dualen Begriffsbildungen, nämlich zu einer injektiven und einer projektiven Homotopie (siehe [41]). Es lassen sich damit Homotopiegruppen für Moduln definieren, wie sich auch mit

[7] Andreas Schopf hat seine schriftliche Diplomarbeit an der ETH bei Beno Eckmann verfasst. Für sein hervorragendes Diplom und die Diplomarbeit wurde er mit dem Kern-Preis und der Silbernen Medaille der ETH ausgezeichnet. Die Diplomarbeit bildete den Ausgangspunkt für die gemeinsame Arbeit [34]. Nach einer mehrjährigen Assistententätigkeit an der ETH starb er im Herbst 1959 unter tragischen Umständen während eines Amerikaaufenthaltes.

der Homotopie im Zusammenhang stehende topologische Begriffe, wie etwa die Begriffe der Suspension und des Schleifenraumes, in die Modultheorie übertragen lassen. Daraus ergeben sich dann entsprechende exakte Sequenzen. Im Grunde genommen wurde in den erwähnten Arbeiten zur Modultheorie eine „homologische Algebra" entwickelt, die anstelle der Funktoren Tor und Ext Funktoren setzt, die durch Homotopiegruppen definiert werden. In der Folge hat sich die Theorie der Tor und Ext rasch und erfolgreich entwickelt – dabei spielte sicher das Buch von Cartan-Eilenberg [CE56] eine wichtige Rolle –, während die Homotopiegruppen von Moduln für viele Jahre kaum in weiten Kreisen bekannt wurden. Erst in neuester Zeit haben die damals in die Modultheorie eingeführten Begriffe wieder an Wichtigkeit gewonnen, nämlich in der modernen modularen Darstellungstheorie von endlichen Gruppen (siehe [He60], [He61], [B91] [C96]). Dabei gingen die Ursprünge leider oft fast ganz verloren, als auf die alten Arbeiten kaum mehr Bezug genommen wurde.

Die entsprechenden Überlegungen zur Homotopietheorie von Moduln hat Beno Eckmann zusammen mit Peter Hilton durchgeführt – sie stehen am Anfang ihrer langen und erfolgreichen Zusammenarbeit. Interessanterweise gibt es aber zu diesem Thema keine gemeinsamen Veröffentlichungen, sondern nur zwei Übersichtsvorträge, der eine von Beno Eckmann (siehe [41]), der andere von Peter Hilton (siehe [Hi58]). Diese Tatsache mag mit dazu beigetragen haben, dass die Homotopietheorie von Moduln damals wenig beachtet wurde. Zu diesem Themenkreis gibt es ferner eine gemeinsame Arbeit von Eckmann und Kleisli [48]. Im Anschluss an die Dissertation von Heinrich Kleisli wird hier im Falle einer Frobeniusalgebra, also z. B. für den Fall der Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe, die Homotopietheorie und die Beziehung zur Gruppencohomologie näher untersucht. In diesem speziellen Fall lassen sich die aus der Homotopie gewonnenen exakten Sequenzen mit Hilfe der (gewöhnlichen) Cohomologiegruppen beschreiben.

Wie bereits angemerkt, haben Eckmann und Hilton diese algebraische Entwicklungsspur nicht intensiv weiterverfolgt. Der Grund mag in der frühen Erkenntnis gelegen haben, dass die im Sinne der Kategorientheorie dualen Begriffsbildungen der injektiven und projektiven Homotopie von Moduln eine (wohl als wichtiger erachtete) Dualität in der Topologie suggeriert. Dieser topologischen Dualität sind die unmittelbar nachfolgenden gemeinsamen Arbeiten ([42]–[46], [48], [50]) von Eckmann und Hilton gewidmet.[8] Der wesentliche Gedanke wird bereits in [41] angedeutet. Die Rückübersetzung der algebraischen Überlegungen in die Topologie liefert eine Dualität zwischen der Homotopietheorie und der Cohomologietheorie (siehe dazu weiter unten). Die entsprechenden Grundlagen hat Eckmann 1962 in seinem Vortrag am Internationalen Mathematiker-Kongress in Stockholm (siehe [58]) dargestellt. Dies ist die *Eckmann-Hilton-Dualität*, wie sie als Gebietsbeschreibung in der *Mathematics Subject Classification* der *Mathematical Reviews* vorkommt. In seinem Artikel über das Werk von Beno Eckmann

[8] Über den interessanten und für das Werk von Eckmann charakteristischen Wechsel des Fokus von der Topologie zur Algebra und wieder zurück zur Topologie, der sich in diesen gemeinsamen Arbeiten offenbart, vergleiche man den detaillierten Überblick in [Hi80].

(siehe [Hi78]) gibt Peter Hilton an, dass diese sich auf die Homotopie gründende Dualität das *Leitmotiv* für die vielen gemeinsamen Arbeiten war, die sich in den Folgejahren anschlossen.

Prominent unter diesen Arbeiten ist die – von den damaligen Studierenden so genannte – „Trilogie" zum Thema *Group-like structures in general categories* [52], [56], [57], wo dieser Gesichtspunkt voll zum Tragen kommt. Der Anfangspunkt war das wohlbekannte Resultat der algebraischen Topologie, dass die Homotopieklassen von Abbildungen $\pi(X, Y)$ eine Gruppe bilden, wenn Y eine „Gruppe bis auf Homotopie" ist.[9] Um eine „Gruppe" C in einer allgemeinen Kategorie $\mathbf{C}$ zu definieren, verlangen Eckmann und Hilton in analoger Weise einen Morphismus $m : C \times C \to C$, welcher für jedes X in $\mathbf{C}$ die Menge der Morphismen $\mathbf{C}(X, C)$ zu einer Gruppe macht, und zwar (im kategorietheoretischen Sinn) natürlich in X. Das Dualitätsprinzip lässt sich dann voll ausschöpfen. Es suggeriert als Erstes die Definition einer Cogruppe in einer allgemeinen Kategorie; ferner wurde die Aufmerksamkeit nun besonders auf diejenigen Funktoren gerichtet, welche die Gruppen- bzw. Cogruppenstruktur respektierten. Insbesondere von einem heuristischen Standunkt aus erwies sich dies im Allgemeinen wie auch bei speziellen Anwendungen als sehr fruchtbar: In vielen Gebieten wurden auf diese Weise neue Resultate suggeriert, die anschließend bewiesen werden konnten.

Als ein einfaches Resultat, das sich aus den ganz grundlegenden Überlegungen in diesen drei Arbeiten ergibt, mag hier das folgende angeführt werden. Wenn X in der Kategorie $\mathbf{C}$ eine Cogruppe ist und Y in $\mathbf{C}$ eine Gruppe, so besitzt die Morphismenmenge $\mathbf{C}(X, Y)$ zwei Gruppenstrukturen, die eine kommt von X, die andere von Y. Gemäß [52], Theorem 4.17 stimmen diese zwei Gruppenstrukturen aus ganz allgemeinen Gründen überein. Daraus ergibt sich sofort, dass *verschiedene* Cogruppenstrukturen in X bzw. verschiedene Gruppenstrukturen in Y zu ein und derselben Gruppenstruktur in $\mathbf{C}(X, Y)$ führen und dass ferner diese Gruppenstruktur *abelsch* ist. Als eine konkrete Anwendung dieses allgemeinen und ganz formalen Resultates ergibt sich, dass die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe bzw. eines H-Raumes immer abelsch ist. In den drei Arbeiten haben die Autoren in einer systematischen Weise sowohl einen Überblick über viele Begriffe der Kategorientheorie gegeben, wie auch auf viele konkrete Anwendungen dieser allgemeinen Theorie hingewiesen. Ganz offensichtlich haben Eckmann und Hilton bereits zu diesem frühen Zeitpunkt klar die Möglichkeiten erkannt, welche die konsequente Verwendung der Kategorientheorie zur Vereinheitlichung der Mathematik leisten kann. Dieser Standpunkt ist heute allgemein geworden, so dass heutige Mathematiker Mühe haben, sich anderes vorzustellen.

Die kategorietheoretischen Überlegungen waren inspiriert durch die oben erwähnte topologische Dualität, wie sie in [53] und [59] beschrieben worden sind: Der Schleifenraum ΩX eines punktierten topologischen Raumes X ist offensichtlich ein H-Raum, die Suspension ΣX ebenso offensichtlich ein coH-Raum. Die resultierenden Gruppen

[9] Der letztere Begriff war von Hopf in seiner Arbeit [Ho41b] geprägt worden. Der Vorschlag, solche Räume H-Räume zu nennen, geht offenbar auf J. P. Serre zurück.

$[\Sigma X, Y]$ und $[X, \Omega Y]$ sind natürlich isomorph und mittels Iteration führt dies zu Gruppen

$$\Pi_n(X, Y) = [\Sigma^n X, Y] = [\Sigma^{n-1} X, \Omega Y] = \cdots = [X, \Omega^n Y] ,$$

die nach obigem für $n \geq 2$ abelsch sind. Da die Sphäre S^n als n-te Suspension der Nullsphäre S^0 angesehen werden kann, erhält man

$$\Pi_n[S^0, Y] = [S^n, Y] = \pi_n(Y) ,$$

also die n-te Homotopiegruppe von Y. Indem man „dual" vorgeht und den Eilenberg-MacLane-Raum $K(\mathbb{Z}, m)$ als Schleifenraum ansieht, erhält man eine Cohomologietheorie

$$H^m(X, \mathbb{Z}) = [X, K(\mathbb{Z}, m)] .$$

Diese stimmt für CW-Komplexe mit der zellulären (bzw. singulären) Cohomologie überein. Die Räume $K(\mathbb{Z}, m)$, bilden das sogenannte Eilenberg-MacLane-Spektrum. Neben diesem gibt es andere Spektren, die beim analogen Vorgehen zu allgemeineren Cohomologietheorien führen, die das „Dimensionsaxiom" nicht erfüllen. So erhält man zum Beispiel die K-Theorie, indem man das Bott-Spektrum verwendet; es besteht aus der unendlichen unitären Gruppe U für m ungerade und aus ΩU für m gerade.

2.4 Harmonische Ketten, ℓ_2-Cohomologie

Im Jahre 1949 publizierte Beno Eckmann den Artikel *Coverings and Betti numbers* [19]. Wie sich etwa 30 Jahre später zeigte, war diese Arbeit der Anfang einer intensiven Entwicklung, die auf einer systematischen Nutzung von Hilbertraum-Strukturen in Kettengruppen und Cohomologiegruppen beruht und im Rahmen der ℓ_2-Cohomologie aufgegriffen wurde (siehe [115]). Eckmann betrachtet ein endliches, simpliziales und zusammenhängendes Polyeder P, welches ein Überlagerungsraum des Polyeders $\overline{P}$, mit simplizial operierender Decktransformationengruppe G, ist. Er beweist, dass sich die Betti-Zahlen $b_n(\overline{P})$ von $\overline{P}$ aus der Darstellung von G in der Homologie des Überlagerungskomplexes P berechnen lassen und gibt eine explizite Formel für diese Betti-Zahlen.

Sein Beweis ist kurz und elegant und verwendet den Begriff von *simplizialen harmonischen Ketten*, ein heute geläufiger Begriff im Rahmen der ℓ_2-Cohomologie. Für ein endliches simpliziales Polyeder haben die reellen Kettengruppen eine natürliche euklidische Struktur, und es ist deshalb sinnvoll, vom zur Randabbildung ∂ adjungierten Operator δ zu sprechen sowie vom sogenannten simplizialen Laplace-Operator $\Delta = \partial\delta + \delta\partial$, einem Endomorphismus der Kettengruppen. Die Elemente im Kern von Δ heißen *harmonische* Ketten. Eckmann beweist, dass die harmonischen Ketten Zykeln sind und dass jede Homologieklasse genau einen harmonischen Repräsentanten besitzt. Der Raum der harmonischen n-Ketten ist somit natürlich isomorph zur n-ten Homologiegruppe. Dies gilt sowohl für P wie auch für den Bahnenraum $\overline{P}$, mit dem Unterschied, dass im Falle von P zusätzlich die Decktransformationengruppe G auf den Kettengruppen operiert. Eckmann beweist, dass der Raum der G-invarianten harmonischen n-Ketten von P isomorph ist zur n-ten Homologiegruppe von $\overline{P}$. Indem er den G-invarianten Teil als Bild eines Projektionsoperators, nämlich der Mittelbildung bezüglich der Gruppenoperation auffasst, erhält er hieraus eine explizite Formel für die Dimension des Raumes der G-invarianten harmonischen n-Ketten, und diese Dimension ist genau die gesuchte n-te Betti-Zahl $b_n(\overline{P})$ von $\overline{P}$.

In der allgemeineren Situation der ℓ_2-(Co)homolgie sind die Definitionen wie folgt (siehe [115]). Der Einfachheit halber skizzieren wir den Fall, wo $P \to \overline{P}$ die universelle Überlagerung eines endlichen, zusammenhängenden simplizialen Polyeders $\overline{P}$ mit $G = \pi_1(\overline{P})$ bezeichnet. Die Decktransformationengruppe G operiert dann simplizial, ist nun aber nicht mehr unbedingt endlich, aber abzählbar, da der Bahnenraum P/G endlich ist. Der G-Vektorraum der reellen simplizialen n-Ketten von P besitzt auch in diesem allgemeineren Fall eine natürliche euklidische Struktur. Eine orthonormale Basis ist durch die Vektoren gegeben, welche den n-Simplexen entsprechen. Es folgt daraus, dass die G-Operation auf dem Raum der n-Ketten isometrisch ist. Vervollständigt man diese Kettenräume bezüglich der ℓ_2-Norm, so erhält man einen Kettenkomplex von Hilbert-G-Räumen. Der adjungierte Operator δ zum beschränkten Randoperator ∂ entspricht dem Corandoperator, und $\Delta = \delta\partial + \partial\delta$ ist der Laplace-Operator, dessen Kern *per definitionem* aus den harmonischen ℓ_2-Ketten besteht. Die (reduzierte) ℓ_2-Homologiegruppe $\mathcal{H}_n$ von $\overline{P}$ ist definiert als Raum der harmonischen ℓ_2-Ketten von P in der Dimension n. Diese ℓ_2-Homologiegruppe $\mathcal{H}_n$ ist ein Hilbert-G-Modul und besitzt als solcher eine *von Neumann*-Dimension $\beta_n(\overline{P})$, die eine Homotopieinvariante von $\overline{P}$ ist. Die $\beta_n(\overline{P})$ heißen ℓ_2-Betti-Zahlen von $\overline{P}$ und sind nicht-negative, reelle Zahlen. Sie sind häufig gleich 0, aber im Unterschied zu den gewöhnlichen Betti-Zahlen im Allgemeinen nicht ganzzahlig. Eine fundamentale Eigenschaft der ℓ_2-Betti-Zahlen von $\overline{P}$ ist die Tatsache, dass, analog wie im Falle der gewöhnlichen Betti-Zahlen, die Eulercharakteristik $\chi(\overline{P})$ durch die alternierende Summe $\sum(-1)^n\beta_n(\overline{P}) = \chi(\overline{P})$ gegeben ist. Beno Eckmann verwendet dies in [103] um Folgendes zu beweisen:

Ist G amenabel und unendlich und sind die simplizialen Homologiegruppen $H_i(P,\mathbb{Z})$ für $0 < i < N = \dim(P)$ alle gleich 0, so besteht die Ungleichung $(-1)^{\dim(P)}\chi(\overline{P}) \geq 0$. Ferner ist $\chi(\overline{P})$ genau dann gleich 0, wenn zusätzlich die simpliziale Homologiegruppe $H_N(P,\mathbb{Z})$ verschwindet.

Mit einer Zusatzüberlegung ergibt sich daraus für ein Polyeder $\overline{P}$ der Form $K(G,1)$ mit G unendlich und amenabel, dass $\chi(\overline{P}) = 0$ ist. In [107] untersucht Beno Eckmann die Umkehrung dieses Satzes im Falle, wo $\overline{P} = M$ eine 4-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit mit unendlicher, amenabler Fundamentalgruppe G ist. Er zeigt, dass die Bedingung $\chi(M) = 0$ zusammen mit dem Verschwinden der Endengruppen $H^i(G,\mathbb{Z}G)$ für $i = 1,2$ impliziert, dass M ein $K(G,1)$-Raum und mithin G eine 4-dimensionale Poincaré-Dualitätsgruppe ist.

Falls $\overline{P} = M$ eine geschlossene, nicht unbedingt orientierbare N-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, so erfüllen die ℓ_2-Homologiegruppen von $\overline{P}$ als Hilbert-G-Moduln ganz allgemein die Poincaré-Dualität $\mathcal{H}_n \cong \mathcal{H}_{N-n}$. Somit ist $\beta_n(M) = \beta_{N-n}(M)$. Ist G unendlich, so gilt immer $\beta_0(\overline{P}) = 0$, so dass für eine geschlossene Mannigfaltigkeit M der

Dimension N mit unendlicher Fundamentalgruppe stets folgt $\beta_N(M) = 0$. Zum Beispiel ergibt sich für $\overline{P}=F$ eine geschlossene, nicht unbedingt orientierbare, Fläche mit unendlicher Fundamentalgruppe:

$$\beta_0(F) = 0, \quad \beta_1(F) = -\chi(F), \quad \beta_2(F) = 0 \,.$$

Weitere Anwendungen betreffen den *Defekt* $\mathrm{def}(G)$ einer endlich präsentierbaren Gruppe G. Ist P eine endliche Präsentierung von G mit e Erzeugenden und r Relatoren, so ist $\mathrm{def}(P) = e - r$, und $\mathrm{def}(G)$ ist definiert als Maximalwert von $\mathrm{def}(P)$, wobei P die endlichen Präsentierungen von G durchläuft. Es ist eine elementare Tatsache, dass die Ungleichung $\mathrm{def}(G) \leq b_1(G) - b_2(G)$ gilt, wobei $b_i(G)$ für die i-te Betti-Zahl des Eilenberg-MacLane-Raumes $K(G,1)$ steht. Bezeichnen wir die ℓ_2-Betti-Zahlen von $K(G,1)$ mit $\beta_i(G)$, so gilt nach Theorem 4.1.2 von [115]

$$\mathrm{def}(G) \leq 1 - \beta_0(G) + \beta_1(G) - \beta_2(G) \,.$$

Die folgenden Beispiele illustrieren den Nutzen dieser zweiten Ungleichung. Ist G eine endlich präsentierbare amenable Gruppe G, so folgt $\mathrm{def}(G) \leq 1$, denn in diesem Fall ist $\beta_1(G) = 0$. Andere Beispiele von Gruppen mit $\beta_1 = 0$ sind die Gruppen mit der Kazhdan-Eigenschaft T, die Gruppen der Form $H \times K$ mit beiden Faktoren unendlich und die Knotengruppen; alle diese Gruppen haben somit einen Defekt ≤ 1. Eine PD^2-Gruppe σ ist nach einem im Abschnitt 2.2 erwähnten Satz von Eckmann-Linnell [92], [98] isomorph zu einer Flächengruppe. Ein wesentlicher Schritt im Beweis dieses Satzes besteht darin zu zeigen, dass es eine surjektive Abbildung $\sigma \to \mathbb{Z}$ gibt, also $b_1(\sigma) > 0$ ist. Dies kann man, wie Beno Eckmann bemerkt hat, mittels der ℓ_2-Betti-Zahlen wie folgt sehen. Aus bekannten allgemeinen Sätzen schließt man, dass eine PD^2-Gruppe σ ein endliches CW-Modell $K(\sigma,1)$ besitzt. Schreiben wir $\chi(\sigma)$ für die Eulercharakteristik von $K(\sigma,1)$, so folgt:

$$\chi(\sigma) = 1 - b_1(\sigma) + b_2(\sigma) = \beta_0(\sigma) - \beta_1(\sigma) + \beta_2(\sigma) = -\beta_1(\sigma)$$

und somit

$$b_1(\sigma) \geq 1 \,.$$

Für die Fundamentalgruppe π einer Fläche vom Geschlechte $g > 0$ liefert die Standardpräsentierung für den Defekt im orientierbaren Fall $2g - 1 = 1 - \chi(\pi)$ als untere Schranke und im nicht-orientierbaren Fall $g - 1 = 1 - \chi(\pi)$. Zusammen mit der oberen Schranke $1 + \beta_1(\pi) = 1 - \chi(\pi)$ ergibt sich daraus auf Grund des Satzes von Eckmann-Linnell, dass der Defekt einer beliebigen PD^2-Gruppe σ gleich $1 - \chi(\sigma)$ ist.

Beno Eckmann hat die ℓ_2-Cohomologie in [111] auch auf weitere Situationen in einem erstaunlich umfangreichen Gebiet der algebraischen Topologie und Algebra angewendet, so auf die Hausmann-Weinberger-Invariante (siehe [HW85]) von endlich präsentierbaren Gruppen, auf die holomorphe Eulercharakteristik einer Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension 2 und (in [118]) auf Gitter in zusammenhängenden halbeinfachen Liegruppen.

2.5 Algebraische K-Theorie

Die Hattori-Stallings-Spur Φ_P eines endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Moduls P ist eine $\mathbb{Z}$-wertige Funktion, die auf den Konjugationsklassen der Gruppe G definiert ist. Eine Vermutung von Hyman Bass besagt, dass, wie im Falle eines freien Moduls, höchstens der Wert $\Phi_P(e)$ verschieden von 0 sein kann; $\Phi_P(e) = \kappa(P)$ nennt man die Kaplansky-Spur. Nach einem Satz von Kaplansky ist $\kappa(P) \geq 0$, und $\kappa(P) = 0$ gilt genau dann, wenn $P = 0$ ist. Damit verwandt ist die Augmentierungsspur $\epsilon(P) = \dim_{\mathbb{C}}(P \otimes_G \mathbb{C})$, wobei $\mathbb{C}$ als trivialer G-Modul aufzufassen ist. Sie entspricht der Summation der Werte von Φ_P über alle Konjugationsklassen. Ist die Bass-Vermutung erfüllt, so gilt offenbar $\kappa(P) = \epsilon(P)$. Erfüllt eine Gruppe G für alle endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Moduln die letztere Gleichung, so sagt man G erfülle die *schwache Bass-Vermutung*. Die Bass-Vermutung ist zum Beispiel für endliche Gruppen erfüllt, denn in diesem Fall zeigt sich, dass ein endlich erzeugter projektiver $\mathbb{Z}G$-Modul P unter der Skalarerweiterung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ zu einem freien $\mathbb{Q}G$-Modul $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ wird. Allgemeiner ist die Bass-Vermutung für amenable Gruppen erfüllt, aber auch für freie Gruppen und allgemeiner, nach einem Resultat von Peter Linnell, für alle residuell endlichen Gruppen. Eckmann hat in [99] bewiesen, dass eine torsionfreie Gruppe G die Bass-Vermutung erfüllt, falls für alle Elemente $x \in G$, die rationale Cohomologiedimension von $C_x/\langle x\rangle$ endlich ist, wobei C_x den Zentralisator von x in G bezeichnet. Eckmanns Beweis verwendet eine bekannte Berechnung der zyklischen Homologie des Gruppenrings $\mathbb{Q}G$. Die oben definierte Klassenfunktion Φ_P kann als Element $\overline{\Phi}_P$ in der zyklischen Homologie von $\mathbb{Q}G$ in der Dimension 0 aufgefasst werden. Wie Beno Eckmann zeigt, impliziert die Voraussetzung über die cohomologische Dimension der Zentralisatorquotienten, dass $\overline{\Phi}_P$ in dem der Konjugationsklasse von $e \in G$ entsprechenden Summanden der zyklischen Homologie liegt und dies entspricht genau der Aussage der Bass-Vermutung.

Unter Verwendung von Resultaten von Robert Bieri und Ralph Strebel (siehe [Bi76], [StR76]) gelingt es Beno Eckmann, die Bedingung betreffend der cohomologischen Dimension der Zentralisatorquotienten im Falle der Gruppen mit Cohomologiedimension 2 nachzuweisen (siehe [99]) und somit die Bass-Vermutung für diese Klasse von Gruppen zu beweisen.

In den Arbeiten [110], [116] untersucht Eckmann endlich erzeugte projektive Moduln M über $\mathcal{N}(G)$, der komplexen von Neumann-Algebra von G, eine Banach-Algebra, welche die komplexe Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ umfasst. Ein endlich erzeugter projektiver $\mathcal{N}(G)$-Modul M besitzt eine *von Neumann-Dimension* $\dim(M) \in \mathbb{R}$. Dabei gilt $\dim(M) = 0$ genau für $M = 0$. Die von Neumann-Dimension ist wie folgt mit der Kaplansky-Spur eines endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Moduls P verknüpft: Es gilt $\kappa(P) = \dim(\mathcal{N}(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} P)$. Eckmann zeigt, dass für einen endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Modul P, der projektive $\mathcal{N}(G)$-Modul $\mathcal{N}(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} P$ frei und damit isomorph zu $\mathcal{N}(G)^{\kappa(P)}$ ist. Erfüllt G die schwache Bass-Vermutung, so ist ferner $\kappa(P) = \epsilon(P)$, und mithin $\mathcal{N}(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} P \cong \mathcal{N}(G)^{\epsilon(P)}$. Dies verwendet Eckmann, um zu zeigen, dass für einen endlich dominierten zusammenhängenden CW-Komplex X die ℓ_2-Eulercharakteristik von X mit der üblichen Eulercharakteristik übereinstimmt, falls die Fundamentalgruppe von X die schwache Bass-Vermutung erfüllt.

2.6 Charakteristische Klassen von Darstellungen von Gruppen

In den Arbeiten [84], [86], [89], [96] studiert Beno Eckmann (in Zusammenarbeit mit G. Mislin) charakteristische Klassen von Gruppen-Darstellungen. Im Falle einer reellen n-dimensionalen Darstellung ρ mit darstellenden Matrizen von positiver Determinante, ist die Eulerklasse $e_n(\rho) \in H^n(G, \mathbb{Z})$ definiert als Eulerklasse des durch ρ induzierten flachen, orientierten $\mathbb{R}^n$-Bündels über dem klassifizierenden Raum von G.

Die Arbeit [84] bezieht sich auf die Situation einer $\mathbb{Q}$-Darstellung einer endlichen Gruppe G. Für die Eulerklasse $e_n(\rho)$ einer solchen Darstellung wird bewiesen, dass ihre Ordnung durch eine von der endlichen Gruppe G und der spezifischen n-dimensionalen Darstellung unabhängigen, optimalen Schranke E_n beschränkt ist, die in überraschender Weise mit den Bernoulli-Zahlen zusammenhängt (siehe [84], Theorem 3.2).

Analog sind die Chernklassen $c_i(\rho) \in H^{2i}(G, \mathbb{Z})$ einer komplexen n-dimensionalen Darstellung ρ als Chernklassen des durch ρ induzierten flachen $\mathbb{C}^n$-Bündels über BG definiert. Es zeigt sich, dass die gleiche optimale Schranke E_i für die Ordnung von $c_i(\rho)$ auftritt, falls die Darstellung ρ reell ist und rationale Charakterwerte besitzt (siehe [84], Theorem 4.2). Beispiele zeigen, dass dies für nichtreelle Darstellungen im Allgemeinen nicht richtig bleibt, und zwar auch dann nicht, wenn die Darstellung rationale Charakterwerte besitzt.

In der Arbeit [86] werden Darstellungen über beliebigen Zahlkörpern betrachtet. Es werden universelle Schranken für die Eulerklasse von reellen Darstellungen endlicher Gruppen in Abhängigkeit vom reellen Zahlkörper, über dem sie definiert sind, angegeben; entsprechende Schranken gelten für die Chernklassen (siehe [89]).

Es ist leicht zu sehen, dass es keine universelle Schranke für die Ordnung der Chernklassen $c_i(\rho)$ für komplexe Darstellungen von beliebigen, nicht unbedingt endlichen Gruppen geben kann; insbesondere sind für $N \gg j$ die universellen Chernklassen $c_j(\mathbb{C}) \in H^{2j}(GL_N^\delta(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^{2j}(GL_\infty^\delta(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ der identischen Darstellung der diskreten Gruppe $GL_N^\delta(\mathbb{C})$ von unendlicher Ordung. In [93] wird das Verhalten dieser Chernklassen $c_j(\mathbb{C})$ unter Körperautomorphismen von $\mathbb{C}$ studiert. In diesem Zusammenhang ist es zweckmäßig, die sogenannten profiniten Chernklassen zu betrachten. Ist K ein Zahlkörper, so lässt sich die Wirkung der Galois-Automorphismen der Körpererweiterung $K \subset \mathbb{C}$ auf diesen Chernklassen explizit bestimmen. Daraus lassen sich universelle Schranken für die Chernklassen von Darstellungen über dem Zahlkörper K für beliebige, auch unendliche Gruppen herleiten.

Dank. Die Autoren danken Frau Doris Eckmann herzlich für viele mündliche Informationen sowie für die freundliche Erlaubnis, Einsicht in persönliche Unterlagen zu nehmen, die Beno Eckmann betreffen. – Ein weiterer Dank geht an den Springer-Verlag für die freundliche Erlaubnis, den Namenszug von Beno Eckmann, die Liste der betreuten Dissertationen und die Liste der Publikationen aus den Selecta [E87] verwenden zu dürfen sowie für die Unterstützung hinsichtlich der Rechte am Bild von Beno Eckmann, das in den „Mathematical Survey Lectures" [E07] abgedruckt wurde.

Literatur

[A60] Adams F.: On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math. **72** (1960), 20–104

[A62] Adams F.: Vector fields on spheres, Ann. of Math. **75** (1962), p. 603–632

[B40] Baer R.: Abelian groups that are direct summands of every containing abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), p. 800–806

[B91] Benson D.: *Representations and Cohomology.* (Two Volumes) Cambridge University Press 1991

[Bi72] Bieri R.: Gruppen mit Poincaré-Dualität, Comment. Math. Helv. **47** (1972), p. 373–396

[Bi76] Bieri R.: *Homological dimension of discrete groups.* Queen Mary College Lecture Notes, London, 1976

[BS78] Bieri R., Strebel R.: Almost finitely presented soluble groups, Comment. Math. Helv. **53** (1978), p. 258–278

[BoM58] Bott R., Milnor J.: *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), p. 87–89

[B75] Brown, K.S.: Homological criteria for finiteness, Comment. Math. Helv. **50** (1975), p. 129–135

[C96] Carlson J.F.: *Modules and group algebras*, Birkhäuser Basel 1996

[CE56] Cartan H., Eilenberg S.: *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956

[E87] Eckmann B.: *Selecta*, (Ed. Knus M.-A., Mislin G., Stammbach U.), Springer-Verlag, 1987

[E07] Eckmann, B.: *Mathematical Survey Lectures 1943–2004*, Springer-Verlag, 2007.

[EML45] Eilenberg S., MacLane S.: General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), p. 231–294

[Ga68] Ganea T.: Homologie et extensions centrales de groupes, C.R. Acad. Sc. Paris **266** (1968), p. 557–558

[HW85] Hausmann J.-C., Weinberger S.: Caractéristiques d'Euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4, Comment. Math. Helv. **60** (1985), p. 139–144

[He60] Heller A.: The loop space functor in homological algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), p. 382–394

[He61] Heller A.: Indecomposable representations and the loop-space operation, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), p. 640–643

[Hi58] Hilton P.J.: Homotopy theory of modules and duality. Proc. Mexico Symposium (1958), p. 273–281

[Hi78] Hilton P.J.: Some contributions of Beno Eckmann to the development of topology and related fields, in: M.-A. Knus, G. Mislin, U. Stammbach (Ed.): *Topology and Algebra*, Enseign. Math. Monograph **26**, 1978, p. 11–27

[Hi80] Hilton P.J.: Duality in homotopy theory: a retrospective essay, J. Pure Appl. Algebra **19** (1980), p. 159–169

[Ho41a] Hopf H.: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comment. Math. Helv. **14** (1941/42), p. 257–309

[Ho41b] Hopf H.: Über die Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, Ann. of Math. **42** (1941), p. 22–52

[Ho44] Hopf H.: Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comment. Math. Helv. **17** (1944/45), p. 39–79

[Ho01] Hopf H.: *Collected papers, Gesammelte Abhandlungen*, (Ed. Beno Eckmann), Springer-Verlag, 2001.

[Hu35] Hurewicz W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), p. 112–119, Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), p. 521–528, Proc. Akad. Amsterdam **39** (1936), p. 215–224

[JW72] Johnson F.E.A., Wall C.T.C.: On groups satisfying Poincaré duality, Ann. of Math. **96** (1972), p. 592–598

[K58] Kervaire M.A.: Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), p. 280–283
[ML78] MacLane S.: Origins of the cohomology of groups, in: M.-A. Knus, G. Mislin, U. Stammbach (Ed.): *Topology and Algebra*, Enseign. Math. Monograph **26**, 1978, p. 191–219
[Mu81] Müller, H.: Decomposition theorems for group pairs, Math. Z. **176** (1981), p. 223–246
[StU66] Stammbach U.: Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen, Math. Z. **94** (1966), p. 157–177
[StJ65] Stallings J.: Homology and central series of groups, J. of Algebra **2** (1965), p. 170–181
[StR76] Strebel R.: A homological finiteness criterion, Math. Z. **151** (1976), p. 263–275
[T52] Tate J.: The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. of Math. **56** (1952), p. 294–297

Wissenschaftliche Arbeiten und Übersichtsartikel von Beno Eckmann

Die Liste der Publikationen [1] bis [99] ist aus den *Selecta* [E87], p. 825–830, übernommen.

[1] Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, Comment. Math. Helv. **14** (1941/42), p. 141–192
[2] Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen, Comment. Math. Helv. **14** (1941/42), p. 234–256
[3] Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen, Comment. Math. Helv. **15** (1942/43), p. 1–26
[4] Vektorfelder auf Sphären, Société math. suisse 1941, Enseign. Math. **39** (1944), p. 9–10
[5] Solutions continues de systèmes d'équations linéaires, Société math. suisse 1942, Enseign. Math. **39** (1944), p. 18–19
[6] Über Zusammenhänge zwischen algebraischen und topologischen Problemen, Mitteilung der Naturf. Ges. Bern (1942), p. 54–55
[7] L'idée de dimension, Leçon inaugurale Lausanne 5 février 1943, Revue de Théologie et Philosophie **127** (1943), p. 3–17
[8] Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme, Comment. Math. Helv. **15** (1942/43), p. 318–339
[9] Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen, Comment. Math. Helv. **15** (1942/43), p. 358–366
[10] Sur les groupes monothétiques, Société math. suisse 1943, Enseign. Math. **39** (1944), p. 24–25
[11] Topologie und Algebra, Antrittsvorlesung ETH 22. Mai 1943, Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich **89** (1944), p. 25–34
[12] Über monothetische Gruppen, Comment. Math. Helv. **16** (1943/44), p. 249–263
[13] Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex, Comment. Math. Helv. **17** (1944/45), p. 240–255
[14] Lois de Kirchhoff et fonctions discrètes harmoniques, Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. **63** (1945), p. 67–78
[15] Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, Comment. Math. Helv. **18** (1945/46), p. 232–282
[16] Der Cohomologiering einer beliebigen Gruppe, Société math. suisse (1945), p. 97–99
[17] On complexes over a ring and restricted cohomology groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33** (1947), p. 275–281
[18] On infinite complexes with automorphisms, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33** (1947), p. 372–376
[19] Coverings and Betti numbers, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), p. 95–101
[20] Sur les applications d'un polyèdre dans un espace projectif complexe, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), p. 1397–1399
[21] On fibering spheres by toruses (with H. Samelson and G. W. Whitehead), Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), p. 433–438

[22] Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion. I. Structure complexe, formes pures (with H. Guggenheimer), C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 464–466
[23] Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion. II. Formes de classe k; formes analytiques (with H. Guggenheimer), C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 489–491
[24] Sur les variétés closes à métrique hermitienne sans torsion (with H. Guggenheimer), C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 503–505
[25] Quelques propriétés globales des variétés kählériennes, C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 577–579
[26] Cartesisches und Alexandersches Produkt in der Cohomologietheorie (with H. Brändli), Comment. Math. Helv. **24** (1950), p. 68–72
[27] Continu et discontinu, in: *Études de Philosophie des Sciences, hommage à F. Gonseth*, Editions du Griffon (1950), p. 83–90
[28] Continu et discontinu, in: *Actes du congrès international de philosophie des sciences Paris 1949*, Hermann (1951), p. 67–74
[29] Espaces fibrés et homotopie, Coll. Topol. Centre Belge de Rech. Math. (1950), p. 83–99
[30] Sur l'intégrabilité des structures presque complexes (with A. Frölicher), C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), p. 2284–2286
[31] Complex-analytic manifolds, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1950 II*, American Mathematical Society (1952), p, 420–427
[32] Räume mit Mittelbildungen, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1950 I*, American Mathematical Society (1952), p. 523
[33] On complexes with operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953), p. 35–42
[34] Über injektive Moduln (with A. Schopf), Arch. Math. **4** (1953), p. 75–78
[35] Cohomology of groups and transfer, Ann. of Math. **8** (1953), p. 481–493
[36] A class of compact, complex manifolds which are not algebraic (with E. Calabi), Ann. of Math. **58** (1953), p. 494–500
[37] Sur les structures complexes et presque complexes, Géométrie différentielle, Coll. Int. du Centre Nat. de la Rech. Scientifique (1953), p. 151–159
[38] Structures complexes et transformations infinitésimales, in: *Convegno di Geometria Differenziale 1953*, Edizioni Cremonese (1954), p. 1–9
[39] Räume mit Mittelbildungen, Comment. Math. Helv. **28** (1954), p. 329–340
[40] Zur Cohomologietheorie von Räumen und Gruppen, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1954 III*, North-Holland Publishing Co. (1957), p. 170–177
[41] Homotopie et dualité, Coll. Topol. Alg. Centre Belge de Rech. Math. 1956, p. 41–53
[42] Groupes d'homotopie et dualité. Groupes absolus (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), p. 2444–2447
[43] Groupes d'homotopie et dualité. Suites exactes (with P. J. Hilton). C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), p. 2555–2558
[44] Groupes d'homotopie et dualité. Coefficients (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), p. 2291–2293
[45] Transgression homotopique et cohomologique (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **247** (1958), p. 620–623
[46] Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), p. 2054–2056
[47] On the homology and homotopy decomposition of continuous maps (with P. J. Hilton), Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45** (1959), p. 372–375
[48] Groupes d'homotopie et dualité, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), p. 271–281
[49] Operators and cooperators in homotopy theory (with P. J. Hilton), Math. Ann. **141** (1961), p. 1–21
[50] Homotopy groups of maps and exact sequences (with P. J. Hilton), Comment. Math. Helv. **34** (1960), p. 271–304
[51] Structure maps in group theory (with P. J. Hilton), Fund. Math. **50** (1961), p. 207–221

[52] Group-like structures in general categories I. Multiplications and comultiplications (with P. J. Hilton), Math. Ann. **145** (1962), p. 227–255
[53] Homotopie und Homologie, Enseign. Math. **8** (1962), p. 209–217
[54] Algebraic homotopy groups and Frobenius algebras (with H. Kleisli), Illinois J. Math. **6** (1962), p. 533–552
[55] Generalized means (with T. Ganea and P. J. Hilton), in: *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, Stanford University Press (1962), p. 82–92
[56] Group-like structures in general categories III. Primitive categories (with P. J. Hilton), Math. Ann. **150** (1963), p. 165–187
[57] Group-like structures in general categories II. Equalizers, limits, lengths (with P. J. Hilton), Math. Ann. **151** (1963), p. 150–186
[58] Homotopy and cohomology theory, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1962*, Institut Mittag-Leffler (1963), p. 59–73
[59] A natural transformation in homotopy theory and a theorem of G. W. Whitehead (with P. J. Hilton), Math. Z. **82** (1963), p. 115–124
[60] Unions and intersections in homotopy theory (with P. J. Hilton), Comment. Math. Helv. **38** (1963/64), p. 293–307
[61] Exact couples in an abelian categogory (with P. J. Hilton), J. Algebra **3** (1966), p. 38–87
[62] Composition functors and spectral sequences (with P. J. Hilton), Comment. Math. Helv. **41** (1966/67), p. 187–221
[63] Filtrations, associated graded objects and completions (with P. J. Hilton), Math. Z. **98** (1967), p. 319–354
[64] Homologie et différentielles. Suites exactes (with U. Stammbach), C. R. Acad. Sci. Paris **265** (1967), p. 11–13
[65] Homologie et différentielles. Basses dimensions; cas spéciaux (with U. Stammbach), C. R. Acad. Sci. Paris **265** (1967), p. 46–48
[66] Commuting limits with colimits (with P. J. Hilton), J. Algebra **11** (1969), p. 116–144
[67] Continuous solutions of linear equations – some exceptional dimensions in topology, in: *Battelle Rencontres 1967, Lectures in Mathematics and Physics*, W.A. Benjamin (1968), p. 516–526
[68] On exact sequences in the homology of groups and algebras (with U. Stammbach), Illinois J. Math. **14** (1970), p. 205–215
[69] Homotopical obstruction theory (with P. J. Hilton), An. Acad. Brasil. Ciênc. **40** (1968), p. 407–425
[70] Le groupe des types simples d'homotopie sur un polyèdre (with S. Maumary), in: *Essays on Topology and Related Topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham*, Springer-Verlag (1970), p. 173–187
[71] Simple homotopy type and categories of fractions, Symp. Math. **5** (1970), p. 285–299
[72] On central group extensions and homology (with P. J. Hilton), Comment. Math. Helv. **46** (1971), p. 345–355
[73] On the homology theory of central group extensions: I – The commutator map and stem extensions (with P. J. Hilton and U. Stammbach), Comment. Math. Helv. **47** (1972), p. 102–122
[74] On the homology theory of central group extensions: II – The exact sequence in the general case (with P. J. Hilton and U. Stammbach), Comment. Math. Helv. **47** (1972), p. 171–178
[75] Groupes à dualité homologique (with R. Bieri), C. R. Acad. Sci. Paris **275** (1972), p. 899–901
[76] On the Schur multiplicator of a central quotient of a direct product of groups (with P. J. Hilton and U. Stammbach), J. Pure Appl. Algebra **3** (1973), p. 73–82
[77] Propriétés de finitude des groupes à dualité (with R. Bieri), C. R. Acad. Sci. Paris **276** (1973), p. 831–833
[78] Groups with homological duality generalizing Poincaré duality (with R. Bieri), Invent. Math. **20** (1973), p. 103–124
[79] Finiteness properties of duality groups (with R. Bieri), Comment. Math. Helv. **49** (1974), p. 74–83

[80] Amalgamated free products of groups and homological duality (with R. Bieri), Comment. Math. Helv. **49** (1974), p. 460–478

[81] Aspherical manifolds and higher-dimensional knots, Comment. Math. Helv. **51** (1976), p. 93–98

[82] Cobordism for Poincaré duality groups (with R. Bieri), Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), p. 137–139

[83] Relative homology and Poincaré duality for group pairs (with R. Bieri), J. Pure Appl. Algebra **13** (1978), p. 277–319

[84] Rational representations of finite groups and their Euler class (with G. Mislin), Math. Ann. **245** (1979), p. 45–54

[85] Two-dimensional Poincaré duality groups and pairs (with R. Bieri), in: C.T.C. Wall (Ed.): *Homological Group Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series **36** (1979), p. 225–230

[86] On the Euler class of representations of finite groups over real fields (with G. Mislin), Comment. Math. Helv. **55** (1980), p. 319–329

[87] Some recent developments in the homology theory of groups (Groups of finite and virtually finite dimension), J. Pure Appl. Algebra **19** (1980), p. 61–75

[88] Poincaré duality groups of dimension two (with H. Müller), Comment. Math. Helv. **55** (1980), p. 510–520

[89] Chern classes of group representations over a number field (with G. Mislin), Compositio Math. **44** (1981), p. 41–65

[90] Plane motion groups and virtual Poincaré duality of dimension two (with H. Müller), Invent. Math. **69** (1982), p. 293–310

[91] Groupes à dualité de Poincaré de dimension 2 (with P. Linnell), C. R. Acad. Sci. Paris **295** (1982), p. 417–418

[92] Poincaré duality groupes of dimension two, II (with P. Linnell), Comment. Math. Helv. **58** (1983), p. 111–114

[93] Profinite Chern classes for group representations (with G. Mislin), in: I.M. James (Ed.): *Topological Topics*, London Math. Soc. Lecture Note Series **86** (1983), p. 103–119

[94] The p-periodicity of the groups $\mathrm{GL}(n, O_S(M))$ and $\mathrm{SL}(n, O_S(M))$ (with B. Bürgisser), Mathematika **31** (1984), p. 89–97

[95] Sur les groupes fondamentaux des surfaces closes, Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1984), p. 41–46

[96] Galois action on algebraic matrix groups, Chern classes, and the Euler class (with G. Mislin), Math. Ann. **271** (1985), p. 349–358

[97] Surface groups and Poincaré duality, in: R. Piccinini, D. Sjerve (Ed.): *Conference on Algebraic Topology in Honor of Peter Hilton*, Contemp. Math. **37**, Amer. Math. Soc. (1985), p. 51–59

[98] Poincaré duality groups of dimension two are surface groups, in: *Combinatorial group theory and topology*, Ann. Math. Stud. **111** (1987), p. 35–51

[99] Cyclic homology of groups and the Bass conjecture, Comment. Math. Helv. **61** (1986), p. 193–202

[100] Nilpotent group action and Euler characteristic, in: *Algebraic topology, Barcelona 1986*, Lecture Notes in Math. **1298**, Springer-Verlag, 1987, p. 120–123

[101] Hurwitz-Radon matrices and periodicity modulo 8, Enseign. Math., **35** (1989), p. 77–91

[102] Continuous solutions of linear equations – An old problem, its history, and its solution, Expo. Math. **9** (1991), p. 351–365

[103] Amenable groups and Euler charactereristic, Comment. Math. Helv. **67** (1992), p. 383–393

[104] Georges de Rham 1903–1990, Elem. Math. **47** (1992), p. 118–122

[105] Hurwitz-Radon matrices revisited: from effective solution of the Hurwitz-Radon matrix equations to Bott periodicity, in: G. Mislin (Ed.): *The Hilton symposium 1993 (Montreal 1993)*, CRM Proc. Lecture Notes **6**, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, p. 23–35

[106] Guidelines 1900–1950 (with P. Dugac and J. Mawhin), in: J.-P. Pier (Ed.): *Development of mathematics 1900–1950*. Birkhäuser 1994, p. 1–34

[107] Manifolds of even dimension with amenable fundamental group, Comment. Math. Helv. **69** (1994), p. 501–511

[108] Zum 100. Geburtstag von Heinz Hopf, Elem. Math. **49** (1994), p. 133–136

[109] Naissance des fibrés et homotopie, in: *Matériaux pour l'histoire des mathématiques aux XXe siècle – Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice 1996)*, Sémin. Congr. **3** (1998), p. 31–36. Soc. Math. France, Paris.

[110] Projective and Hilbert modules over group algebras, and finitely dominated spaces, Comment. Math. Helv. **71** (1996), p. 453–462. Addendum: Comment. Math. Helv. **72** (1997), p. 329

[111] 4-manifolds, group invariants, and ℓ_2-Betti numbers, Enseign. Math. **43** (1997), p. 271–279

[112] Approximating ℓ_2-Betti numbers of an amenable covering by ordinary Betti numbers, Comment. Math. Helv. **74** 1999, p. 150–155

[113] Birth of fibre spaces, and homotopy, Expo. Math. **17** (1999), p. 23–34. English version of [109], translated by Peter Hilton.

[114] Topology, algebra, analysis – relations and a missing link, Notices Amer. Math. Soc. **46** 5 (1999), p. 520–527

[115] Introduction to ℓ_2-methods in topology: reduced ℓ_2-homology, harmonic chains, ℓ_2-Betti numbers, Israel J. Math. **117** (2000), 183–219

[116] Idempotents in a complex group algebra, projective modules, and the von Neumann algebra, Arch. Math. **76** (2001), p. 241–249

[117] Kolmogorow and contemporary mathematics, Newsletter of the European Mathematical Society **50** (2003), p. 13

[118] Lattices, ℓ_2-Betti numbers, deficiency, and knot groups, Enseign. Math. **50** (2004), p. 123–137

[119] Social choice and topology: A case of pure and applied algebra, Expo. Math. **22** (2004), p. 385–393

[120] Hermann Weyl in Zürich 1950–1955, Notices Amer. Math. Soc. **53** 10 (2006), p. 1222–1223

Liste der von Beno Eckmann betreuten Dissertationen

Die Liste ist aus den *Selecta* [E87], p. 831–833, übernommen.

[1] Guggenheimer, Heinrich, *Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik*, 1951

[2] Ghenzi, Albert Georges, *Studien über die algebraischen Grundlagen der elektrischen Netzwerke*, 1953

[3] Kirchhoff, Adrian, *Beiträge zur topologischen linearen Algebra*, 1953

[4] Grauert, Hans, *Kählersche Metrik in Holomorphiegebieten*, 1954[10]

[5] Frölicher, Alfred, *Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen*, 1955

[6] Aeppli, Alfred, *Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten*, 1957

[7] Curjel, Caspar Robert, *Über die Homotopie- und Cohomologie-Gruppen von Abbildungen*, 1961

[8] Kleisli, Heinrich, *Homotopy theory in abelian categories*, 1962

[9] Huber, Peter Jost, *Homotopy theory in general categories*, 1962

[10] Eingereicht an der Universität Münster mit Heinrich Behnke als Referent.

[10] Stärk, Roland, *Nullsysteme in allgemeinen Kategorien*, 1963
[11] Meier, Werner, *Beiträge zur algebraischen Homotopietheorie der Moduln*, 1963
[12] Fatt, Milton Jacob, *On the homotopical approach to algebraic topology and the Hurewicz theorem*, 1964
[13] Matzinger, Heinrich, *Über den Begriff der uniformen Struktur und die Konvergenz in Booleschen Algebren*, 1963
[14] Carnal, Henri Claude, *Unendlich oft teilbare Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf kompakten Gruppen*, 1964
[15] Thöni, Werner, *Äquivariante Homotopie und Cohomologie*, 1965
[16] Stamm, Emil, *Über die Homotopiegruppen gewisser Faserungen*, 1965
[17] Frei, Armin, *Freie Objekte und multiplikative Strukturen*, 1966
[18] Stammbach, Urs, *Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen*, 1966
[19] Sigrist, François, *Obstruction et transgression cohomologigue dans les espaces fibrés*, 1967
[20] Déruaz, Marcel, *Sur la catégorie de Lusternik-Schnirelmann des espaces fibrés et des groupes de Lie*, 1967
[21] Knus, Max-Albert, *Sur une classe d'algèbres filtrées*, 1967
[22] Vögele, Heinz, *Algebren mit multiplikativen Strukturen*, 1967
[23] Terrier, Jean-Marc, *Variétés minimales*, 1967
[24] Ojanguren, Manuel, *Freie Präsentierung endlicher Gruppen und zugehörige Darstellungen*, 1968
[25] Mislin, Guido, *Über Gruppen, die in Cohomologie-Moore-Räumen operieren*, 1968
[26] Storrer, Hans Heinrich, *Epimorphismen von kommutativen Ringen*, 1968
[27] Suter, Ulrich, *Schnittflächen komplexer Stiefel-Mannigfaltigkeiten*, 1968
[28] Grünenfelder, Luzius, *Über die Struktur von Hopf-Algebren*, 1969
[29] Held, René Pierre, *Exakte Paare und Homotopietheorie*, 1969
[30] Bachmann, Franz, *Kategorische Homologietheorie und Spektralsequenzen*, 1969
[31] Hösli, Hans Ulrich, *Über die Existenz von H-Raum-Strukturen auf einer gewissen Klasse von Polyedern*, 1970
[32] Glaus, Christian, *Mayer-Vietoris-Funktoren und Kompositionsfunktoren*, 1970
[33] Schorta-Schrag, Evelyn, *Raumgruppen in N Dimesionen und Cohomologie*, 1971
[34] Ledergerber, Paul, *The torsion decomposition of finite CW-complexes*, 1971
[35] Kubli, Hans Ulrich, *Galois-Theorie für unendliche, rein-inseparable Körpererweiterungen vom Exponenten 1*, 1971
[36] Gronstein, Claude, *Catégories avec modèles, préfaisceaux, et coalgèbres*, 1971
[37] Näf, Franz Jacob, *Eigentliche Homotopie unendlicher Polyeder und Lokalisierung von Kategorien*, 1971
[38] Bieri, Robert, *Gruppen mit Poincaré-Dualität*, 1973
[39] Castellet, Manuel, *Grupos finitos cohomologia periódica y espacios que admiten recubrimientos esféricos*, 1973[11]
[40] Dubach-Szodoray, Elisabeth, *Über die Struktur der Ω-Ringoide*, 1973
[41] Bolthausen, Erwin, *Einfache Isomorphietypen in lokalisierten Kategorien und einfache Homotopietypen von Polyedern*, 1973
[42] Pont, Jean-Claude, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, 1974
[43] Zufferey, Richard, *Sur le produit cotensoriel des comodules et ses foncteurs dérivés Cotor*, 1974
[44] Gut, Arthur, *Zur Homologietheorie der zentralen Erweiterungen von Gruppen und von Lie-Algebren*, 1974
[45] Meier, Willi, *Phantomabbildungen und klassifizierende Räume*, 1975
[46] Egli, Herbert, *Picard-Kategorien und funktorielle Determinantentheorien*, 1975
[47] Huber, Martin, *Klassen von Moduln über Dedekindringen und Satz von Stein-Serre*, 1976

[11] Eingereicht an der Universitat de Barcelona.

[48] Lundmark, Rolf, *Zur Cohomologietheorie der zentralen Erweiterungen von p-periodischen Gruppen*, 1977
[49] Schneebeli, Hans Rudolf, *Virtuelle Eigenschaften in der Gruppentheorie und virtuelle Cohomologie*, 1977
[50] Hübschmann, Johannes, *Verschränkte n-fache Erweiterungen von Gruppen und Cohomologie*, 1977
[51] Müller, Heinz, *Über die höherdimensionalen Endengruppen von Gruppen*, 1978
[52] Bürgisser, Balz Christoph, *Gruppen virtuell endlicher Dimension und Periodizität der Cohomologie*, 1979
[53] Biner, Hermann-Josef, *Homologische Dualität von Moduln, insbesondere über Hopf-Algebren*, 1981
[54] Plesko-Meier, Hanna, *Lie-Algebren mit homologischer Dualität*, 1983
[55] Lage, Alexander J.P., *Über die Chernklassen flacher komplexer Vektorbündel*, 1981
[56] Widmer, Hans Rudolf, *Gruppenpaare mit homologischer Dualität der Dimension zwei*, 1981
[57] Staffelbach, Othmar Joh., *Aufspaltung komplexer Vektorbündel in flache Linienbündel*, 1983
[58] Wies, Ghislain Joseph, *Gruppenpaare mit virtueller Poincaré-Dualität in der Dimension zwei*, 1984
[59] Fornera, Linda, *Caractéristique eulérienne de groupes et rangs de modules projectifs*, 1986

Der SFB/Transregio 45 „Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten" der Deutschen Forschungsgemeinschaft

Stefan Müller-Stach

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 11G99, 14D99, 14G99, 14J99
- Keywords and Phrases: moduli space, period, diophantine equation, rational point, Shimura variety, Calabi-Yau space, cohomology, Hodge theory, finite field, algebraic cycle, derived category
  Schlagwörter: Modulraum, Periode, diophantische Gleichung, rationaler Punkt, Shimura-Varietät, Calabi-Yau-Raum, Kohomologie, Hodge-Theorie, endlicher Körper, algebraische Zykeln, derivierte Kategorie

Im Sommer 2007 wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft der SFB/Transregio 45 „Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten" an den Standorten Bonn, Duisburg-Essen und Mainz (Sprecherhochschule) eingerichtet. Thematisch ist der Transregio im Gebiet der Algebraischen und Arithmetischen Geometrie verankert. In diesem Artikel werden die mathematischen Forschungsthemen und einige strukturelle Aspekte beschrieben.

Eingegangen: 15.11.2009

Stefan Müller-Stach, Institut für Mathematik, Fachbereich 08,
Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Staudingerweg 9, D-55099 Mainz
stach@uni-mainz.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

1 Einführung: Was ist ein Transregio?

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) gibt es in ihrer heutigen Form seit der Fusion des „Deutschen Forschungsrats“ mit der „Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft“ im August 1951. Die DFG hat neben der Einzelförderung bereits eine lange Tradition im Bereich der koordinierten Forschungsförderung. Zum Beispiel feierte das Förderinstrument „Sonderforschungsbereiche“ im Jahr 2008 sein 40-jähriges Bestehen [2]. Sonderforschungsbereiche waren zunächst ausschließlich an einem Standort angesiedelt. In der Mathematik war die dazu erforderliche Konstellation von miteinander kooperierenden Wissenschaftlern nur an wenigen Instituten gegeben. Meines Wissens gab es in dieser Zeit etwa 14 Sonderforschungsbereiche, in denen die Mathematik eine tragende Rolle hatte. Davon hatte die Hälfte einen Schwerpunkt in der theoretischen Mathematik. Die ersten beiden mathematischen Sonderforschungsbereiche wurden in Bonn gegründet: Der SFB 40 (1969–1985) „Theoretische Mathematik“, aus dem in gewisser Weise das Max-Planck-Institut hervorgegangen ist, und der SFB 72 (1971–1986) in der angewandten Mathematik. Innerhalb des Programms Sonderforschungsbereiche wurde in den 90er Jahren deutlich, dass auch standortübergreifende Zusammenarbeit innerhalb von Deutschland immer mehr nachgefragt wurde. Man entschloss sich 1999 dazu, das Programm SFB/Transregio für zehn Jahre befristet parallel anzubieten. In der Mathematik gibt es inzwischen auch mehrere Transregios. Im Jahr 2008 erfolgte eine externe Evaluation dieser Pilotphase, die seit einigen Monaten vorliegt [1]. Aus dieser Quelle möchte ich einige Sätze zitieren, die die Intention des Programms Transregio aus erster Hand wiedergeben:

„Die Deutsche Forschungsgemeinschaft fördert seit dem Jahr 1999 unter der Bezeichnung SFB/Transregio Sonderforschungsbereiche, an denen sich mehrere Hochschulen als Standorte beteiligen können. Dafür müssen die wissenschaftlichen und strukturellen Voraussetzungen, die für die Einrichtung eines Sonderforschungsbereichs gefordert werden, an allen antragstellenden Hochschulen gegeben sein. Zusätzlich müssen die Beiträge der beteiligten Partner für das Forschungsziel essenziell, komplementär und synergetisch sein. Es gilt das Prinzip der freien Partnerwahl, das heißt, es wird erwartet, dass in einem SFB/ Transregio jeweils die besten Gruppen in Deutschland zusammenarbeiten.“

Im Oktober 2009 wurde beschlossen, das Förderprogramm SFB/Transregio dauerhaft zu etablieren. Die maximale Anzahl der beteiligten Standorte (Städte) in einem Transregio ist prinzipiell auf drei begrenzt. Seit einigen Jahren hat die DFG auch angeregt, in die Sonderforschungsbereiche und Transregios Doktorandenschulen zu integrieren [3].

2 Kurzvorstellung des Transregio 45

Der SFB/Transregio 45 wurde im Juli 2007 von der DFG eingerichtet. Im Januar 2008 fand eine feierliche Eröffnungsveranstaltung statt, bei der Friedrich Hirzebruch und Shing-Tung Yau Vorträge hielten zu den Themen „Examples of Hilbert polynomials in simultan erfüllen. Ein bekanntes Beispiel dafür sind die *Fermathyperflächen*, die durch eine homogene Gleichung

$$x_0^d + x_1^d + \cdots + x_n^d = 0$$

als Teilmenge des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n$ gegeben sind. Für $d = 3$ und $n = 2$ ergibt sich dabei eine ebene *elliptische Kurve*. Die Koeffizienten der Fermathyperfläche sind alle 1, daher ist diese Varietät über jedem Körper oder Ring definierbar. Dies gilt auch für die *Clebsch-Kubik* (siehe Abbildung 1)

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

die das offizielle Logo des Transregio 45 darstellt.

Abbildung 1. Clebsch-Diagonalkubik (Bild: Oliver Labs)

Auf dieser Figur kann man eine Konfiguration von 27 (farbigen) Geraden und ihre doppelten und dreifachen Schnittpunkte sehen. Wählt man als Koeffizientenring die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, so wird solch ein polynomiales Gleichungssystem *diophantisch* genannt. Der Name geht auf Diophant zurück, der bereits in der Antike ganzzahlige Lösungen polynomialer Gleichungen untersucht hat. Die berühmte *Fermatsche Vermutung*, die von Andrew Wiles gelöst wurde, lässt sich – wie viele andere Probleme der Zahlentheorie – als diophantische Gleichung

$$a^d + b^d = c^d$$

in drei Variablen a, b, c interpretieren. Eine Umformulierung durch Gerhard Frey führte zu ebenen elliptischen (Frey-)Kurven

$$y^2 = x(x - a^d)(x + b^d).$$

Die Lösung des Problems durch Wiles bestand darin, die Modularität jeder (semi-stabilen) elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$ zu zeigen, was der Existenz einer nicht-trivialen Lösung wegen eines Resultats von Ribet widersprach.

Aufgrund solcher Zusammenhänge wird klar, dass Geometrie und Arithmetik eng verwoben sind. Neuere innermathematische Entwicklungen in den letzten Jahren und auch externe Anwendungen in der Kryptographie oder in der mathematischen Physik haben beide Gebiete noch weiter zusammenwachsen lassen. Ein wichtiges Ziel des Transregios ist es, Nachwuchswissenschaftlern von Anfang an arithmetische und geometrische Sichtweisen und deren Zusammenspiel zu vermitteln.

In der algebraischen Geometrie sind nicht nur Varietäten der Hauptgegenstand des Interesses. Auch Objekte wie *Vektorbündel* oder allgemeiner *kohärente Garben* auf X werden ausgiebig untersucht. Ein wichtiges Beispiel dafür ist das *Tangentialbündel* T_X zu einer glatten algebraischen Varietät X, welches die Menge aller Tangentialvektoren an alle Punkte von X zusammenfasst. Die *abelsche Kategorie* $Coh(X)$ der kohärenten Garben und ihre *derivierte Kategorie* $D^b(X)$ sind primäre Studienobjekte im Transregio.

Die Gleichungen interessanter Varietäten enthalten typischerweise noch weitere Parameter in den Koeffizienten. Ein berühmtes Beispiel ist die *Legendrefamilie* ebener elliptischer Kurven, die durch die Familie von Gleichungen

$$F_t(x_0, x_1, x_2) = x_2^2 x_0 - x_1(x_1 - x_0)(x_1 - tx_0) = 0$$

gegeben ist. Der Parameter t ist dabei frei wählbar als Element der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$. Bei den Werten $t = 0, 1, \infty$ passiert der Kurve $E_t = \{F_t(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ jedoch etwas „Schlimmes“, d. h. sie bekommt eine *Singularität*. Ein solcher Parameterraum wird auch *Modulraum* genannt, wenn er, wie hier der $\mathbb{P}^1$, *alle* durch das gestellte Modulproblem definierten Objekte bis auf Isomorphie gleichzeitig parametrisiert. Der Parameter t in einem solchen Modulraum hängt eng mit den *Perioden* zusammen: Betrachten wir wieder die Legendrefamilie. Die Differentialform

$$\frac{dx}{y}$$

ist holomorph auf den glatten elliptischen Kurven E_t der Familie und die Perioden

$$\Phi(t) = \int_\gamma \frac{dx}{y},$$

wobei γ ein geschlossener Weg ist, hängen von t ab. Man kann zeigen, dass $\Phi(t)$ eine *hypergeometrische* Differentialgleichung

$$t(1-t)\frac{d^2\Phi}{dt^2} + (1-2t)\frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{4}\Phi = 0$$

erfüllt und somit eine hypergeometrische Funktion darstellt. Solche Periodenfunktionen existieren in viel allgemeineren Situationen und sind im allgemeinen kein treues Abbild der Modulparameter, d. h. t lässt sich nicht zurückgewinnen. In vielen Fällen gelingt dies aber doch und es lässt sich manchmal aus den Perioden sogar eine *Uniformisierung* des Modulraums konstruieren. So ist zum Beispiel im Fall der Legendrefamilie der Parameterraum $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ vermöge der Perioden ein Quotient $X = \Gamma(2)\backslash\mathbb{H}$ der oberen Halbebene $\mathbb{H} = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ nach einer expliziten Kongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$ der $SL_2(\mathbb{Z})$. Man nennt X auch *Modulkurve* oder *Shimurakurve*. Häufig, aber nicht immer, gelingt die Uniformisierung bei Modulräumen von kompakten algebraic geometry and combinatorics“ sowie „Nonlinear methods in complex and algebraic geometry“.

Die Standorte des Transregios sind Bonn (inkl. MPI), Duisburg-Essen (Campus Essen) sowie Mainz als Sprecherhochschule. Mit Bedacht wurde der detaillierte Titel „Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten“ gewählt. Die wesentlichen Forschungsgebiete im Grenzbereich zwischen Algebraischer Geometrie und Arithmetik sind dadurch klar umrissen. Durch die explizite Definition des gemeinsamen Arbeitsgebietes und die bereits vorhandenen Kooperationen von Wissenschaftlern zwischen den beteiligten Standorten konnte eine dichte Vernetzung sichergestellt werden, so dass die Voraussetzungen für einen SFB/Transregio im Sinne der oben gegebenen Definition geschaffen waren. Einige andere Themen, die nicht direkt im Titel zum Ausdruck kommen, wie zum Beispiel Calabi-Yau-Räume, Galoisdarstellungen, Picard-Fuchs-Gleichungen, Shimuravarietäten, Kohomologietheorien und Motive bilden Querverbindungen, die weit über die einzelnen Teilprojekte hinausgehen und damit auch zum Zusammenhalt beitragen.

Genauere Informationen, insbesondere über die beteiligten Wissenschaftler, die Teilprojekte, die Preprints und über aktuelle Veranstaltungen finden sich auf den Webseiten unter `http://www.sfb45.de`. Als vielleicht interessanteste Information möchte ich hier aber auf der folgenden Seite die Liste der 32 geförderten Teilprojekte angeben.

3 Eine Reise durch die Mathematik des Transregio

In diesem Abschnitt möchte ich die Mathematik, die im Transregio untersucht wird, vorstellen. Dazu gebe ich zunächst eine elementare Einführung in die Grundbegriffe des Forschungsgebiets. Darauf aufbauend werde ich anschließend einige exemplarische Forschungsprojekte und neuere Ergebnisse erklären.

Valentina Damerowa von der DFG, den Herausgebern sowie den Kolleg(inn)en Blickle, Böckle, Esnault, Görtz, Gonska, Huybrechts, Labs, Lehn, Möller, Rapoport, Schröer, van Straten, Viehweg und Zuo danke ich für ihre Unterstützung.

3.1 Eine elementare Einführung in das Forschungsgebiet

Eine *algebraische Varietät* X ist ein Gebilde, das zumindest lokal durch Nullsetzen polynomialer Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(x_0,\dots,x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_0,\dots,x_n) &= 0 \end{aligned}$$

entsteht, wobei die Koeffizienten der Polynome aus einem Körper K oder allgemeiner einem Ring R stammen. *Punkte* auf X, in einem naiven Sinne, sind Tupel $p = (p_0,\dots,p_n)$ im affinen Raum $\mathbb{A}^{n+1}$ oder im projektiven Raum $\mathbb{P}^n$, die die Gleichungen

Liste der 32 geförderten Teilprojekte

Periods of the nilpotent completion of the fundamental group
Tannaka group schemes of certain categories of bundles
Higgs bundles and Higgs cohomology on quasi-projective manifolds
Feynman integrals and motives
Some aspects of limiting mixed Hodge structures
Motivic cycles and regulators
Modular Galois representations and Galois theoretic lifts
Universal deformations, the rigidity method and Galois representations
Arithmetic of Katz modular forms
The cohomology of A-crystals, moduli spaces in positive characteristic and p-adic étale cohomology on schemes over $\mathbb{Z}_p$
p-adic cohomology
Congruences for the number of rational points over finite fields
p-adic point counting on Calabi-Yau threefolds
Non-archimedean period domains
Period domains of hyperkähler manifolds
Picard-Fuchs equations, monodromy, and the Mumford-Tate group of special families of Calabi-Yau manifolds
Picard-Fuchs equations of Calabi-Yau type
Periods and period domains for abelian varieties
Local models of Shimura varieties
Affine Deligne-Lusztig varieties
$SL_2(\mathbb{R})$-action on translation surfaces and Teichmüller curves
Arithmetic cycles on Shimura varieties
Special subvarieties of Shimura varieties
Algebraic Calabi-Yau categories
Derived categories of Calabi-Yau manifolds
Non-liftable Calabi-Yau manifolds in positive characteristics
Lagrangian fibrations on symplectic manifolds
Rozansky-Witten invariants
Symplectic singularities
Vector bundles
Moduli with GIT
Construction of moduli spaces: compactifications and ample sheaves

Mannigfaltigkeiten, bei denen das *kanonische Bündel*, d. h., die Determinante des Tangentialbündels trivial ist. Beispiele dafür sind elliptische Kurven oder allgemeiner *abelsche Varietäten*, sowie die *Calabi-Yau-* und *Hyperkähler*-Mannigfaltigkeiten. Beispiele für die beiden zuletzt genannten Arten von Mannigfaltigkeiten sind die $K3$-*Flächen*, zum Beispiel die *Fermatquartik*

$$\{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{C}).$$

Sehr schöne Parameterräume mit uniformisierenden Perioden und arithmetischer Relevanz sind die *Shimuravarietäten*, die Modulkurven verallgemeinern und eine zentrale Rolle im Transregio spielen. Deren Komponenten sind *lokal-symmetrische Räume* $X = \Gamma\backslash D$, wobei $D = G(\mathbb{R})K$ ein *Hermitesch symmetrischer Bereich* ist und $\Gamma \subseteq G(\mathbb{Q})$ eine *arithmetische Untergruppe*, die auf D operiert. Ein prominentes Beispiel ist die Clebsch-Kubik, die ein birationales Modell einer *Hilbertschen Modulfläche* $\Gamma\backslash\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ist. Modulräume von g-dimensionalen *abelschen Varietäten* sind Shimuravarietäten für die *symplektische Gruppe* $G(\mathbb{R}) = Sp(2g, \mathbb{R})$. Dagegen sind Modulräume von Calabi-Yau-Varietäten selten Shimuravarietäten.

In dieser Einführung habe ich oft an die geometrische Anschauung appelliert. Im Transregio werden auch analoge Situationen betrachtet, die in der Welt der *endlichen Körper* $\mathbb{F}_{p^n}$ oder der *p-adischen Zahlen* $\mathbb{Q}_p$ vorkommen. So verwenden wir zum Beispiel auch *rigid-analytische Räume* und *p-adische Periodengebiete*. Dazu ist es nötig, viele Begriffe der komplexen algebraischen Geometrie einschließlich der Hodgetheorie auf diese Felder hin zu erweitern.

3.2 Das mathematische Spektrum

Im folgenden Abschnitt wird genauer auf einige exemplarische Teilprojekte und neuere Ergebnisse eingegangen, die von am Transregio beteiligten Wissenschaftlern bearbeitet wurden. Die Auswahl ist sicherlich nicht vollständig repräsentativ. Ab jetzt werde ich etwas mehr mathematisches Vorwissen beim Leser voraussetzen. Weiterführende Literatur ist in den angegebenen Referenzen zu finden.

Lösung der Gieseker-Vermutung

In diesem Abschnitt geht es um algebraische Vektorbündel und *Zusammenhänge*. Unter einem (algebraischen) Zusammenhang auf einem Vektorbündel V auf einer komplexen algebraischen Mannigfaltigkeit X verstehen wir eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\nabla : V \to \Omega_X^1(V),$$

die die Leibnizregel $\nabla(fs) = f\nabla(s) + df \otimes s$ erfüllt, wobei Ω_X^1 die algebraischen 1-Formen sind. Wenn die Krümmung des Zusammenhangs – eine 2-Form mit Werten in den Endomorphismen des Bündels – verschwindet, so nennt man (V, ∇) *flach*. Flache Vektorbündel auf X, bei denen wir reguläre Singularitäten im Unendlichen voraussetzen, falls X nicht eigentlich ist, lassen sich mit Hilfe der *Riemann-Hilbert-Korrespondenz* mit komplexen linearen Darstellungen der topologischen Fundamentalgruppe $\pi_1^{\mathrm{top}}(X,*)$ von X identifizieren. Ist insbesondere $\pi_1^{\mathrm{top}}(X,*)$ trivial, so sind flache Bündel trivial. Aber es gilt viel mehr: Nach einem Satz von Malcev und Grothendieck sind komplexe lineare Darstellungen von $\pi_1^{\mathrm{top}}(X,*)$ trivial, wenn bereits die pro-endliche Komplettierung $\widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X,*)}$ trivial ist. Andererseits, als Konsequenz des Riemannschen Existenzsatzes, können wir $\widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X,*)}$ mit Grothendiecks étaler Fundamentalgruppe $\pi_1^{\mathrm{et}}(X,*)$ identifizieren. Also gilt: Ist $\pi_1^{\mathrm{et}}(X,*)$ trivial, so sind flache Bündel trivial. Obwohl beide Seiten des Satzes algebraischer Natur sind, verwendet der Beweis die komplexe Topologie.

Wie sieht nun die Situation aus, wenn wir uns nicht auf einer komplexen Mannigfaltigkeit, sondern auf einer glatten, algebraischen Varietät über einem perfekten Körper der Charakteristik p befinden? In diesem Fall benutzt man stattdessen den Pullback F^* unter der *Frobeniusabbildung*, die Funktionen zur p-ten Potenz erhebt. Die zugrundeliegenden Objekte sind dann *stratifizierte Bündel* $E = (E_n, \sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Dabei ist E_n ein Vektorbündel auf X und

$$\sigma_n : F^* E_{n+1} \xrightarrow{\cong} E_n$$

ein $\mathcal{O}_X$-linearer Isomorphismus. Diese Objekte bilden eine volle Unterkategorie $\mathrm{Strat}(X)$ der kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln auf X und stimmen nach einem Theorem von Katz mit der Unterkategorie der $\mathcal{O}_X$-kohärenten Objekte überein. Im Fall der komplexen Bündel gilt ein analoges Resultat, d. h. die flachen Bündel sind genau diejenigen kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln, die auch $\mathcal{O}_X$-kohärent sind. Wenn man dies für den Moment mal glaubt, so stellt sich sofort die Frage: Was passiert, wenn die Fundamentalgruppe von X trivial ist? Hier haben wir nur $\pi^{\mathrm{et}}(X,*)$ zur Verfügung. David Gieseker hat 1975 vermutet, dass auch in diesem Fall, d. h. bei trivialer étaler Fundamentalgruppe, alle stratifizierten Bündel trivial sind. In 2009 wurde die Vermutung von Esnault und Mehta gezeigt:

Theorem 3.1 ([8]) *Sei X eine glatte, geometrisch zusammenhängende projektive Varietät, die über einem perfekten Körper k der Charakteristik $p > 0$ definiert ist. Wenn $\pi_1^{et}(X \otimes_k \bar{k}, \bar{x}) = 1$ gilt, dann existieren keine nicht-trivialen stratifizierten Bündel.*

Feynmangraphen und Motive

Sei ein einfacher, zusammenhängender Graph Γ gegeben, ohne Orientierung der Kanten oder andere Dekoration. Wir nennen die Kantenmenge E und betrachten für jede Kante e eine Variable x_e. Damit können wir ein *Graphpolynom* (Kirchhoff-Polynom)

$$\Psi_\Gamma = \sum_T \prod_{e \notin T} x_e$$

im Polynomring $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ definieren. In der Definition durchläuft T alle aufspannenden Bäume von Γ. Dieses Polynom ist homogen und linear in jeder Variablen. Zum Beispiel hat der Graph Γ, der zum einem regelmäßigen n-Eck gehört, das lineare Graphpolynom

$$\Psi_\Gamma = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

da alle Spannbäume dadurch entstehen, dass man genau eine Kante entfernt. Der Grad von Ψ_Γ wird durch die erste Bettizahl $b_1(\Gamma)$ gegeben.

Die *Feynmanregeln* aus der physikalischen Störungstheorie liefern eine komplexe *Periode* $P(\Gamma)$ im Sinne von Kontsevich und Zagier zu jedem Graphen Γ, die sich durch ein Integral aus dem Graphpolynom berechnen lässt.

Die *Graphhyperflächen* X_Γ werden als Nullstellengebilde von Ψ_Γ im projektiven Raum $\mathbb{P}^{\sharp E-1}$ definiert. Sie sind meist hochgradig singulär, aber sie bilden andererseits interessante *Motive*. Nach einem Resultat von Belkale und Brosnan sind sie sogar allgemein innerhalb der Motive im Sinne ihrer Zählfunktionen $q \mapsto |X_\Gamma(\mathbb{F}_q)|$. Es ist noch nicht ganz geklärt, wann die Periode $P(\Gamma)$ ein *multipler Zetawert* ist, dies ist jedoch bei allen „kleinen" Graphen der Fall.

In [6] haben Bloch, Esnault und Kreimer die Periode des „Rades mit n Speichen" untersucht (siehe Abbildung 2). Es war bekannt, dass dabei bis auf einen universellen Faktor ein ungerader Zetawert herauskommt, aber die Übersetzung in die Sprache der Motive und der algebraischen Geometrie gelang erst in [6]. Andere Graphen wurden von Dzmitry Doryn in seiner Dissertation untersucht. In jüngster Zeit haben Bloch und Kreimer diesen Ansatz weiter verfolgt und die *Renormierung* in der *Störungstheorie* der Physik in Verbindung mit gemischten Hodgestrukturen im Limes in Verbindung gebracht. Mir scheint die Verbindung zwischen Physik und der Theorie der Motive besonders spannend zu sein, zumal die Periodenintegrale bei zusätzlich variierenden Impulsen und Massen interessante *transzendente Funktionen* darstellen. Eine enge Zusammenarbeit mit einigen Physikern beginnt sich zu entwickeln.

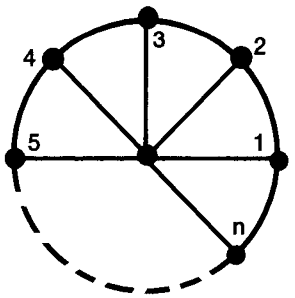


Abbildung 2. Rad mit n Speichen

Endliche Körper, Cartier-Moduln und Singularitäten

Der Frobeniushomomorphismus spielt eine fundamentale Rolle beim Studium von Varietäten über endlichen Körpern. Einige Projekte beschäftigen sich damit, Analoga zu topologischen und hodgetheoretischen Methoden auch in diesem Gebiet mit Hilfe der zusätzlichen Struktur, die der Frobenius liefert, zu etablieren (siehe auch den Abschnitt über die Gieseker-Vermutung). Eine solche Analogie ist beispielsweise der Begriff des *Kristalls*, der im vorliegenden Funktionenkörperfall die *lokalen Systeme*, oder etwas allgemeiner die *perversen Garben* nachbildet.

In einer neueren Arbeit [4] betrachten Blickle und Böckle sogenannte *Cartier-Moduln*. Dazu sei X eine $\mathbb{F}_q$-Varietät und M ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. M ist ein Cartier-Modul, falls es eine Operation von Frobenius von *rechts* auf M gibt. Beachte, dass die „normale" Operation, zum Beispiel auf $\mathcal{O}_X$, von *links* erfolgt, denn es gilt offenbar $F(rs) = r^q F(s)$. Allerdings erfolgt die von Cartier eingeführte wichtige Operation auf der dualisierenden Garbe ω_X von rechts, auch *Cartier-Operator* genannt. Links- und Rechtsoperation werden durch die *Serre-Dualität* ineinander übergeführt. Die Autoren zeigen eine Endlichkeitsaussage über solche Cartier-Operatoren:

Theorem 3.2 ([4]) *Sei X ein lokal Noethersches Schema über $\mathbb{F}_q$, so dass F eine endliche Abbildung ist. Dann hat jeder Cartier-Modul M bis auf Nilpotenz endliche Länge.*

Dieses Resultat impliziert und erweitert eine Reihe von Endlichkeitsaussagen anderer Autoren, welche einem Einblicke in die Struktur der *lokalen Kohomologie* singulärer Varietäten und den daraus erwachsenden Invarianten liefern.

Higgsbündel und Eigenschaften von Shimuravarietäten

Higgsbündel werden in vielen Projekten des Transregio untersucht, sowohl im komplexen wie im p-adischen Fall. Ein holomorphes Higgsbündel (E, ϑ) auf einer komplexen, algebraischen Mannigfaltigkeit X ist ein Paar (E, ϑ) bestehend aus einem Vektorbündel E zusammen mit einem Homomorphismus

$$\vartheta : E \to E \otimes \Omega^1_X,$$

der die Regel $\vartheta \wedge \vartheta = 0$ erfüllt.

Higgsbündel entstehen auf natürliche Weise auf Modulräumen X: Gegeben eine glatte, eigentliche Familie $f : A \to X$ von projektiven Mannigfaltigkeiten über X, so tragen die lokal-konstanten Bildgarben $R^k f_* \mathbb{C}$ oder allgemeiner direkte Summanden $\mathbb{V} \subseteq R^k f_* \mathbb{C}$ eine zusätzliche Struktur, die man als *Variation von Hodge-Strukturen* (VHS) bezeichnet. Insbesondere gibt es auf dem Vektorbündel $V = \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ eine Filtrierung $V = F^0 \supset F^1 \supset \cdots$ durch Vektorbündel, so dass der kanonische flache *Gauß-Manin*-Zusammenhang ∇ auf dem graduierten Objekt

$$E = \bigoplus_{p=0}^{k} E^{p,k-p}, \quad E^{p,k-p} = F^p / F^{p+1}$$

die $\mathcal{O}_X$-linearen Endomorphismen

$$\vartheta^{p,k-p} : E^{p,k-p} \to E^{p-1,k-p+1} \otimes \Omega^1_X,$$

induziert und damit ein Higgsbündel (E, ϑ) mit ϑ als Summe dieser Abbildungen. Unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen vom *Fuchsschen Typ*, die bei geometrischen Familien immer erfüllt sind, lässt sich dieser Endomorphismus nach Deligne sogar zu einem *logarithmischen Higgsbündel*

$$\vartheta : \bar{E} \to \bar{E} \otimes \Omega^1_{\bar{X}}(\log D)$$

im Wesentlichen kanonisch fortsetzen. Hierbei ist $\bar{X} = X \cup D$ eine algebraische Kompaktifizierung von X, D ein Divisor mit normalen Überkreuzungen und $\Omega^1_{\bar{X}}(\log D)$ das Vektorbündel der meromorphen Differentialformen mit höchstens logarithmischen Polen entlang D. Innerhalb des Transregio werden die (logarithmischen) Higgsbündel mehrfach eingesetzt:

(i) Ähnlich wie bei der DeRham-Kohomologie existiert auch eine Higgs-Version der *L^2-Kohomologie*, die von Jost, Yang und Zuo entwickelt wurde. Eine relativ elementare Definition im Fall einer Kurve X findet man in [5]. Diese Methode wird dort benutzt, um interessante Hodgezykel auf Familien von Calabi-Yau-Varietäten zu finden. Mit der gleichen Technik kann man die Kohomologie von *automorphen Vektorbündeln* auf nicht-kompakten Shimuravarietäten effektiv berechnen.

(ii) Higgsbündel kann man auch in der p-adischen Theorie definieren und man hat dort eine *Simpson-Korrespondenz* zwischen ihnen und verallgemeinerten *Galoisdarstellungen* [9]. Man erhofft sich eine Verfeinerung zu einer Korrespondenz zwischen einer expliziten Unterkategorie p-adischer Higgsbündel zu den echten Galoisdarstellungen.

(iii) Für Variationen von Hodgestrukturen liefert die Simpson-Korrespondenz numerische Ungleichungen für den *Slope* der Hodgebündel. So kann man zeigen, dass auf einer Kurve immer eine *Arakelov-Ungleichung* gilt:

$$\mu(\mathbb{V}) := \frac{\deg(E^{k,0})}{\mathrm{rk}(E^{k,0})} - \frac{\deg(E^{0,k})}{\mathrm{rk}(E^{0,k})} \leq k \cdot \deg(\Omega^1_{\bar{X}}(\log D)).$$

Für Familien abelscher Varietäten wählt man $k = 1$, und die Gleichheit $\mu(\mathbb{V}) = \deg(\Omega^1_{\bar{X}}(\log D))$ für alle nicht-unitären $\mathbb{V}$ impliziert, dass $X \subset \mathcal{A}_g$ eine Shimurakurve ist, oder zumindest in eine solche deformiert werden kann.

Ähnliches bleibt richtig für Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über Kurven, und für Familien von abelschen Varietäten über höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Im zweiten Fall braucht man jedoch neben Gleichheit in der Arakelov-Ungleichung weitere numerische Bedingungen (siehe [18]), um Shimuravarietäten $X \subset \mathcal{A}_g$ zu charakterisieren oder, etwas allgemeiner, *geodätische* Untervarietäten für die *Hodge-Metrik* auf $\mathcal{A}_g$.

Auch eindimensionale Geodäten für die *Kobayashi-Metrik* auf $\mathcal{A}_g$ kann man numerisch charakterisieren:

Theorem 3.3 ([19]) *Eine Kurve $Y_0 \subset \mathcal{A}_g$ ist eine Kobayashi-Geodäte genau dann, wenn die kanonische VHS $\mathbb{W}$ auf Y_0 ein irreduzibles, nicht-unitäres Untersystem $\mathbb{V}$ enthält, das Arakelov-Gleichheit erfüllt.*

Insbesondere sind solche Kobayashi-Geodäten über $\bar{\mathbb{Q}}$ definiert, eine Aussage, die von Martin Möller schon im Spezialfall der *Teichmüllerkurven* bewiesen wurde.

(iv) Die numerischen Charakterisierungen von Shimurakurven in iii) legen es nahe, eine geometrische Form der *André-Oort-Vermutung* zu betrachten. Sie würde implizieren, dass eine Untervarietät $Z \subset \mathcal{A}_g$, die selbst eine unendliche, Zariski-dichte Menge von Shimurakurven enthält, eine Shimuravarietät sein muss. Dies ist für $g = 2$ einfach nachzuweisen, für $g \geq 3$ offen. In [18] wird diese Frage unter einigen technischen Voraussetzungen, die ich verschweige, für eine andere Klasse von Shimuravarietäten behandelt. Es zeigt sich, dass „genügend viele" Divisoren ausreichend sind:

Theorem 3.4 ([18]) *Sei M eine orthogonale Shimuravarietät zur Gruppe $G = SO(2, n)$ und $Z \subset M$ eine beliebige irreduzible Untervarietät der Dimension $2 \leq d \leq n$. Angenommen Z enthält genügend viele paarweise verschiedene Shimuradivisoren $W_i \subset Z$, die jeweils eine numerische Arakelovgleichung erfüllen. Dann ist Z selbst eine Shimuravarietät vom orthogonalen Typ oder ein Ballquotient.*

Dieser Satz verallgemeinert *Proportionalitäts(un)gleichungen* von Hirzebruch. Für die Anzahl der benötigten W_i existiert eine effektive Schranke, abhängig von der *Picardzahl* von Z [18].

Lokale Modelle von Shimuravarietäten

Wir haben bisher einige Beispiele von Shimuravarietäten gesehen, allerdings im Kontext von (zusammenhängenden) lokal-symmetrischen Räumen. Bei arithmetischen Untersuchungen werden in der Regel endliche Vereinigungen von solchen Komponenten betrachtet. Shimuravarietäten sind über Zahlkörpern definiert und man kann die Wirkung der *absoluten Galoisgruppe* studieren. Ein übergeordnetes Ziel ist das Studium ihrer L-Funktionen und deren Zusammenhang mit speziellen (d. h. modularen) algebraischen Zykeln, die *CM-Punkte* und *Hirzebruch-Zagier Zykeln* verallgemeinern. Dazu ist es nötig, erst ein Modell über einem Zahlring, z.B. $\mathbb{Z}$, zu konstruieren und dann die Reduktion modulo p zu betrachten. Durch Komplettierung bei Primstellen kommt man zu Modellen über *Wittringen* W, wie zum Beispiel den p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ oder deren Erweiterungen. Die spezielle Faser (die *Reduktion*) ist dann über einem endlichen Körper definiert und die allgemeine Faser über einem p-adischen lokalen Körper. Wir verweisen auf einen Übersichtsartikel von Rapoport [17] für eine wesentlich detailliertere Darstellung dieser *lokalen Modelle*.

In einer neueren Arbeit [15] betrachten Kudla und Rapoport lokale Modelle zu Shimuravarietäten der *unitären* Liegruppe $GU(1, n-1)$ mit Signatur $(1, n-1)$. Ziel des Projekts ist der Zusammenhang zwischen erzeugenden Funktionen, die aus speziellen arithmetischen Zykeln konstruiert werden und der speziellen Werte einer Ableitung einer gewissen *Eisensteinreihe* zur Liegruppe $U(n, n)$. Bei solchen lokalen Modellen kann man mit Modulräumen *p-divisibler* Gruppen arbeiten und die Methoden von Zink über *Displays* und deren *Windows* erfolgreich benutzen. In [15] konstruieren die Autoren zuerst einen formalen Modulraum $\mathcal{N}$ von p-divisiblen Gruppen X der Dimension n und Höhe $2n$, die Signaturstruktur $(1, n-1)$ im Endomorphismenring besitzen, polarisiert und zu einer festen supersingulären Struktur quasi-isogen sind. Dieser Modulraum $\mathcal{N}$ ist formal glatt von der relativen Dimension $n-1$ über dem Wittring W und wurde von Wedhorn und Vollaard studiert. Insbesondere hat die reduzierte (singuläre) Faser $\mathcal{N}_{red}$ eine Zerlegung in Zusammenhangskomponenten $\mathcal{N}_i$, und diese wiederum besitzen eine Stratifizierung in lokal-abgeschlossene, irreduzible Teilmengen $\mathcal{V}^0(\Lambda)$, wobei Λ gewisse Gitter durchläuft. Analog zur *Drinfeldschen oberen Halbebene* ergibt sich hier eine kombinatorische Beschreibung durch ein *Gebäude* von Gittern zur unitären Gruppe. Daraufhin konstruieren die Autoren spezielle Zykel, die mit $\mathcal{Z}_{i,j}(x_1, \ldots, x_m)$ bezeichnet werden und zeigen:

Theorem 3.5 ([15]) *Die Zykel $\mathcal{Z}_{i,j}(x_1, ..., x_m)$ sind rein-dimensional und Vereinigung endlich vieler Strata $\mathcal{V}^0(\Lambda)$. Ist der Zykel $\mathcal{Z}_{i,j}(x_1, ..., x_m)_{red}$ 0-dimensional, so besteht er aus einem Punkt und die Länge des lokalen Rings kann durch die explizite Formel $\sum_{\ell=0}^{a} p^\ell(a+b+1-2\ell)$ berechnet werden, deren Parameter a, b sich aus der Definition des Zykel ergeben.*

In der Arbeit wird auch eine Vermutung über die Schnittzahlen der speziellen Zykel angegeben.

Ebenfalls im Zusammenhang mit der Reduktion von Shimuravarietäten stehen die *affinen Deligne-Lusztig-Varietäten* $X_x(b)$. Durch sie kann die Beziehung des lokalen Modells, insbesondere der Singularitäten der Reduktion, mit der *Newton-Stratifizierung* untersucht werden. Deren Definition ist sehr einfach als Teilmenge der *affinen Flaggenvarietät* $G(L)/I$:

$$X_x(b) = \{g \in G(L)/I : g^{-1}b\sigma(g) \in IxI\} \subset I\backslash G(L)I.$$

Hierbei ist $k = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper, $L = \bar{k}((\epsilon))$ der Laurentreihenkörper über dem Abschluss von k, G eine zusammenhängende, reduktive, algebraische Gruppe über k, I eine *Iwahori*-Untergruppe und σ der Frobeniusautomorphismus auf $\bar{k}/k$ bzw. $G(L)$. Ferner ist $b \in G(L)$, und x ist ein Element der erweiterten *affinen Weyl-Gruppe*, die die I-Doppelnebenklassen in $G(L)$ parametrisiert.

Man möchte charakterisieren, wann $X_x(b)$ nichtleer ist, und wissen, welche Dimension es besitzt. In der Arbeit [11] von Görtz et al. wird eine präzise Vermutung in algebraischen Termen darüber gegeben, wann die $X_x(b)$ leer sind. In der Abbildung 3 wird dies anschaulich illustriert, siehe [11] für eine Erklärung solcher Bilder. Die Autoren zeigen auch, dass $X_x(b)$ leer ist, falls es die Vermutung vorhersagt. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist eine Aussage über *Hodge-Newton Zerlegungen*, auf die ich aber nicht eingehe. Schließlich wird in [11] ein algorithmischer Ansatz zur Berechnung der Dimension von $X_x(b)$ gegeben. Damit ergibt sich unterstützendes Datenmaterial für die Untersuchungen der Autoren. Görtz hat einen einführenden Artikel [12] zu diesem Forschungsgebiet geschrieben.

Derivierte Kategorien und ihre Invarianten

Sei X eine beliebige k-Varietät. Natürliche Invarianten von X sind die Kategorie $Coh(X)$ der kohärenten Garben auf X sowie ihre *derivierte Kategorie* $D^b(X)$. Man kann sich fragen, ob sich X oder seine Invarianten aus $Coh(X)$ bzw. $D^b(X)$ rekonstruieren lassen. Nach einem Satz von Gabriel lässt sich X bis auf Isomorphie aus $Coh(X)$ als k-lineare Kategorie wiedergewinnen. Für $D^b(X)$ gilt ein solcher Satz nicht, wie man aus der Äquivalenz von $D^b(A)$ und $D^b(A^\vee)$ zwischen einer abelschen Varietät A und ihrer dualen $A^\vee$ sieht. Diese Äquivalenz wird über die *Fourier-Mukai Transformation* [14] geleistet, die man wie folgt verallgemeinern kann. Seien X, Y k-Varietäten und $P \in D^b(X \times Y)$. Dann definiert man

$$FT_P : D^b(X) \to D^b(Y), \quad E \mapsto p_Y^*(p_X^* E \otimes P).$$

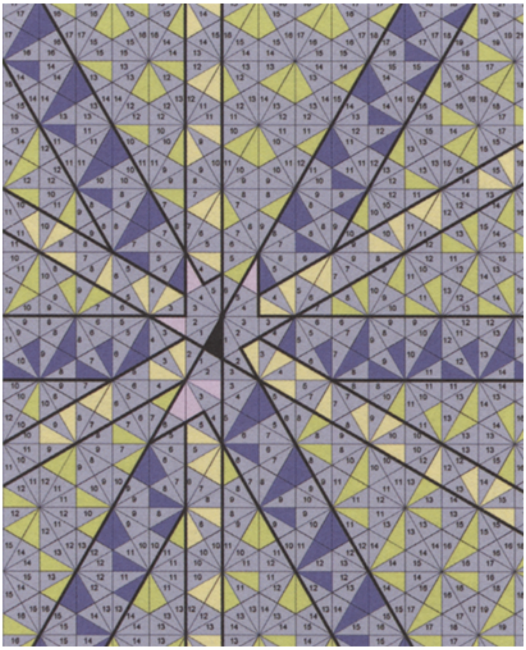


Abbildung 3. Wann sind Deligne-Lusztig-Varietäten leer? (Bild: Ulrich Görtz)

Bondal und Orlov haben gezeigt, dass allerdings im Fall glatter, projektiver Varietäten X mit amplem oder anti-amplem kanonischen Divisor ω_X die Varietät X wieder aus $D^b(X)$ bis auf Isomorphie erhalten werden kann. Berücksichtigt man zusätzlich die Tensor-(trianguliert)-Struktur auf $D^b(X)$, so zeigt ein Satz von Balmer sogar, dass sich X immer wiedergewinnen lässt. Es wird vermutet, dass birationale Korrespondenzen wie *flops*, die ω_X erhalten, die derivierte Kategorie ebenfalls nicht ändern.

Derivierte Kategorien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten besitzen als zusätzliche Struktur einen *Serre-Funktor*, der einer Dimensionsverschiebung entspricht. Kategorien mit solchen Eigenschaften werden *Calabi-Yau-Kategorien* genannt. Sie spielen auch eine große Rolle in anderen Gebieten. Insbesondere in der Darstellungstheorie sind sie enorm wichtig, denn es gibt eine starke Verbindung mit *Clusteralgebren*. Zwei Teilprojekte des Transregio beschäftigen sich mit Calabi-Yau-Kategorien, eines davon mit sogenannter *Tilting-Theorie* auf diesen Kategorien [10], das andere mit dem Problem, welche Eigenschaften von $D^b(X)$ Varietäten untereinander unterscheiden können.

Man kann sich aber auch fragen, ob andere Invarianten wie zum Beispiel die *K-Gruppen* oder *Chowgruppen* Invarianten der derivierten Kategorie $D^b(X)$ sind. Dies ist etwas schwächer, als nach X selbst bis auf Isomorphie zu fragen. In einem Teilprojekt werden solche Fragen im Kontext von $K3$-Flächen gestellt. Hintergrund dieser Untersuchungen ist ein Ergebnis von Beauville und Voisin über den *Chowring* $CH^*(X) = CH^0(X) \oplus CH^1(X) \oplus CH^2(X)$ einer komplexen, projektiven $K3$-Fläche X.

Sie bewiesen, dass die Teilmenge

$$R(X) = CH^0(X) \oplus CH^1(X) \oplus c_2(X) \cdot \mathbb{Z} \subset CH^*(X)$$

ein Unterring ist und $c_2(X) = 24[P]$ ist, wobei P ein abgeschlossener Punkt auf einer (möglicherweise singulären) rationalen Kurve in X ist. Es stellt sich die Frage, ob $R(X)$ stabil unter derivierter Äquivalenz, d. h. Fourier-Mukai Transformation ist. Zunächst gilt:

Theorem 3.6 ([13]) *Seien X, X' komplexe, projektive $K3$-Flächen und FT_P, $FT_Q : D^b(X) \xrightarrow{\cong} D^b(X')$ zwei Fourier-Mukai Äquivalenzen der jeweiligen derivierten Kategorien. Sind die induzierten Operationen $FT_P, FT_Q : H^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(X', \mathbb{Z})$ identisch als Abbildungen zwischen den Mukai-Gittern, so auch die Wirkung auf den Chowgruppen: $FT_P = FT_Q : CH^*(X) \xrightarrow{\cong} CH^*(X')$.*

Dieses Resultat von Huybrechts ist motiviert durch eine Vermutung von Bloch, wie in [13] ausgeführt wird. Als Anwendung bekommt man, dass der Ring $R(X)$ stabil unter derivierter Äquivalenz zwischen $K3$-Flächen mit Picardzahl $\rho \geq 2$ ist. In [13] wird auch noch diskutiert, wie sich die Situation ändert, wenn man $K3$-Flächen X über Zahlkörpern betrachtet. Es zeigt sich, dass dann gewisse (*sphärische*) Objekte in $D^b(X)$ auch über einem Zahlkörper definiert sind.

Symplektische Singularitäten

Die spannende Suche nach einer noch unbekannten Klassifikation *symplektischer Singularitäten* [16] und der Theorie *universeller Poisson-Deformationen* wird zur Zeit in einem Teilprojekt des Transregio von Lehn und van Straten in Kooperation mit Namikawa und Sorger verfolgt. Die klassischen *ADE-Graphen* schlagen eine Brücke zwischen den endlichen Untergruppen $G \subset \mathrm{SU}(2)$ und den einfachen Liealgebren: Im ersten Falle beschreibt der Graph die Konfiguration der exzeptionellen Kurven in der Auflösung der Singularität des Quotienten $\mathbb{C}^2/G$, im zweiten Falle das Wurzelsystem der zugehörigen Liealgebra. Ein direkter geometrischer Zusammenhang zwischen diesen Objekten wird durch Sätze von Grothendieck, Brieskorn und Slodowy hergestellt. Im Falle eines Dynkin-Graphen vom Typ A_{n-1} stellt er sich wie folgt dar: Es sei $\chi : \mathfrak{sl}_n \to \mathbb{C}^{n-1}$ die durch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms gegebene Abbildung. Die Nullfaser $N = \chi^{-1}(0)$ ist der Kegel der *nilpotenten* Elemente, auf dem die Gruppe Sl_{n-1} operiert. Eine transversale Scheibe S an ein subreguläres Element von N schneidet aus dem Kegel eine Flächensingularität genau vom Typ A_{n-1} heraus. Außerdem ist die Projektion $\chi : S \to \mathbb{C}^{n-1}$ die universelle Deformation dieser Singularität.

Erstaunlicherweise kann man diesen Satz auf Strata höherer Kodimension ausweiten: Eine transversale Scheibe S an eine beliebige Bahn in N liefert eine symplektische Singularität und die Projektion $\chi|_S$ ist eine universelle Poisson-Deformation dieser Singularität. Bei diesen Untersuchungen sind die Kollegen 2009 auf die ersten symplektischen Hyperflächensingularitäten jenseits der ADE-Singularitäten gestoßen: Eine solche vierdimensionale Serie ist etwa durch das schöne Polynom

$$a^2x + 2aby + b^2z + (xz - y^2)^n$$

gegeben. Man erwartet, dass es überhaupt nur sehr wenige symplektische Hyperflächensingularitäten gibt, für den Augenblick sind die Argumente dafür aber noch nicht zwingend.

Liftungen von Calabi-Yau-Varietäten über endlichen Körpern

Calabi-Yau-3-Faltigkeiten und allgemeiner Varietäten mit Kodairadimension 0 spielen eine wichtige Rolle in Teilprojekten des Transregio, bei denen es um Perioden oder Modulräume geht. Jedoch gibt es auch spannende Fragestellungen arithmetischer Natur, bei denen sie ebenfalls interessante Eigenschaften besitzen. Seit etwa 10 Jahren ist durch Arbeiten von Hirokado und Schröer bekannt, dass es Calabi-Yau-3-Faltigkeiten über $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ gibt, deren Gleichungen sich nicht zu Charakteristik 0 hochliften lassen. Ein Teilprojekt beschäftigt sich mit diesem Phänomen. Es war nicht klar, ob solche Beispiele auch in höherer Charakteristik existieren können, zum Beispiel über $\mathbb{F}_5$. In [7] zeigen Cynk und van Straten, dass es nicht-liftbare rigide Beispiele über $\mathbb{F}_3$, sowie ein Beispiel über $\mathbb{F}_5$ mit einer obstruierten Deformation gibt. Wenn man die Kategorie der algebraischen Varietäten verlässt und (nicht-projektive) *algebraische Räume* zulässt, so gibt es sogar noch viel mehr Beispiele. Eine Konstruktion über $\mathbb{F}_5$ in loc. cit. entsteht durch eine Auflösung von Singularitäten einer zweifachen Überlagerung von $\mathbb{P}^3$ mit Verzweigungsdivisor D, der aus der Vereinigung der Clebsch-Kubik (siehe oben) und 5 zusätzlichen Ebenen besteht, die die Kubik an den Schnittpunkten dreier Geraden, den sogenannten *Eckardtpunkten*, berühren. Mit ähnlichen Methoden können die Autoren folgenden Satz zeigen:

Theorem 3.7 ([7]) *Für jede Primzahl* $p = 3, 5, 7, 11, 17, 29, 41, 73, 251, 919, 9001$ *gibt es einen nicht-liftbaren* 3*-dimensionalen Calabi-Yau-Raum über* $\mathbb{F}_p$.

Kompaktifizierungen von Modulräumen

Schon vor längerer Zeit konstruierte Viehweg quasi-projektive Modulräume M_h für polarisierte, projektive Mannigfaltigkeiten mit festem Hilbertpolynom h. Kollár vereinfachte diesen Ansatz im Falle von vollständigen Modulproblemen, also in den Fällen, in denen M_h eine Kompaktifizierung besitzt, die selbst ein Moduliproblem löst. Selbst im kanonisch polarisierten Fall, und selbst nach den jüngsten Fortschritten im „*Minimalen Modell Programm*“ gibt es zur Zeit solche Kompaktifizierungen nur für Kurven und Flächen.

Für viele Anwendungen reicht es jedoch, eine Kompaktifizierung zu haben, auf der ample Garben sich in natürlicher Weise auf den Rand fortsetzen. Unter Ausnutzung technisch anspruchsvoller Konstruktionen von Abramovich-Karu und Gabber ist dies in [20] im kanonisch polarisierten Fall und für polarisierte minimale Modelle der Kodairadimension 0 gelungen. In diesen beiden Fällen gibt es eine ample „Garbe“ $L_m \in \mathrm{Pic}(M_h)_{\mathbb{Q}}$, die für eine „universelle“ Familie $f : X \to M_h$ mit $\det(f_*\omega^m_{X/M_h})$ übereinstimmt.

Theorem 3.8 *Sei M_h der Modulraum kanonisch polarisierter, projektiver Mannigfaltigkeiten oder der polarisierten minimalen Modelle der Kodairadimension 0, in beiden Fällen mit festem Hilbertpolynom h. Es sei $m > 0$ so gewählt, dass $f_*\omega^m_{X/M_h} \neq 0$ ist. Dann gibt es eine projektive Kompaktifizierung M'_h von M_h, so dass sich L_m in natürlicher Weise zu einer numerisch effektiven invertierbaren Garbe L'_m fortsetzt, die ample bezüglich M_h ist.*

Diese Aussage wird erst sinnvoll, wenn man den Begriff „natürlich" erläutert. Hier wollen wir noch bemerken, dass eine Folgerung des Satzes ist, dass für eine semistabile Familie $g : X \to C$ der Grad von $g_*\omega^m_{X/C}$ eine Art Höhenfunktion auf M_h definiert. Ähnlich wie im Abschnitt iii) von 3.2 gibt es obere Abschätzungen für diese Höhe.

4 Wie stellt man einen Antrag und was kommt auf einen zu?

Einige Leser finden es vielleicht interessant, wenn ich aus meiner persönlichen Sicht auf die Vorgeschichte eines Transregioantrags und die erforderlichen Schritte bei der Antragstellung eingehe. Zu Anfang ist es nötig, sich klarzumachen, ob man überhaupt in Erwägung zieht, einen solchen Antrag für einen SFB oder Transregio zu stellen, oder doch lieber auf andere Förderinstrumente zurückgreift. Dies hängt vom angestrebten Personenkreis ab, der diesen Antrag stellen will und auch durchaus von Antragsfristen, die einzuhalten sind. Neben dem individuellen Normalverfahren und diversen Stipendienprogrammen gibt es bei der DFG weitere Verbundförderung, an der mehrere Standorte partizipieren können. Dazu gehören Forschergruppen, Schwerpunkte, Graduiertenkollegs, Exzellenzcluster und Forschungszentren. Hat man die kritische Masse von etablierten und jungen Wissenschaftlern zusammen und sich zur Beantragung eines SFB oder Transregio entschieden, so ist von seiten der DFG jede Menge Information in Form von Merkblättern erhältlich, siehe [3]. Nachdem man Kontakt mit der DFG aufgenommen hat, ist ein Konzeptpapier zu erstellen, in dem die Grundstruktur festgelegt und vorgestellt wird. In diesem Dokument ist, als die conditio sine qua non, der Mehrwert herauszuarbeiten, den die ganze Gruppe in ihrer Zusammenarbeit über die individuelle Stärke der einzelnen Wissenschaftler hinaus erbringen kann. Bei einem Transregio wie unserem bedeutet dies eine enge und standortübergreifende wissenschaftliche Kooperation zwischen den jeweils beteiligten Arbeitsgruppen in den zentralen Teilgebieten des Gesamtvorhabens. Dabei ist die Grundvoraussetzung, dass die beteiligten Arbeitsgruppen bis dato schon eine hohe internationale Reputation auf dem jeweiligen Gebiet erworben haben. Die Verzahnung kann zumindest teilweise auf gemeinsamen Vorarbeiten aufbauen, soll aber ein noch deutlich stärkeres Zusammenwachsen in der Zukunft vorhersehen lassen. Ein gewisser Anteil an innovativen, d. h. riskanten Projektfeldern wird, so scheint mir, ebenfalls erwartet. Es ist auch darzustellen, wie die geplanten Kooperationsstrukturen bezüglich der Ausbildung und Forschungsleistung von Nachwuchswissenschaftlern Früchte tragen sollen. Dieses Konzeptpapier wird dann von einer Expertengruppe und der DFG selbst begutachtet und von den Beteiligten in Bonn vorgestellt. Dabei ist bereits mit konkurrierenden Anträgen zu rechnen, obwohl sich das aufgrund des Gesamtaufwands und der Voraussetzungen in der Mathematik in Grenzen hält. Ist das Konzeptpapier erfolgreich durch die Gremien der DFG gelaufen, so wird binnen einer Frist von mehreren Monaten ein Vollantrag gefordert. In diesem wird das wissenschaftliche Gesamtvorhaben, eine Beschreibung jedes Teilprojekts, der geplante Finanzhaushalt, alle Strukturmaßnahmen, wie Gleichstellung, Doktorandenausbildung und Nachwuchsförderung, das interne Kooperations- und Kursprogramm, Ideen für geplante Tagungen und Workshops, sowie die Lebensläufe und Publikationen der Teilprojektleiter gesammelt. Insgesamt ergibt dies in der Regel ein stattliches Büchlein von mehreren hundert Seiten. Durch etwa 10 Gutachter wird der Antrag an zwei Tagen unter Teilnahme der Teilprojektleiter, wichtiger Mitarbeiter und Vertretern der Hochschulen ausführlich unter die Lupe genommen. Der Aufwand für eine solche Begutachtung ist beträchtlich und ähnelt einer kleinen Konferenz. Am ersten Tag ist dabei die wissenschaftliche Begutachtung in Form von Kurzvorträgen, Einzelbefragungen und ggfs. Postervorstellungen vorgesehen, am zweiten Tag sind offene Fragen und Strukturplanungen in Zusammenarbeit mit den Hochschulen vorgesehen. An diesem Tag wird dazu eine imposante Runde einberufen, an der Wissenschaftler und Hochschulvertreter teilnehmen, und offene Fragen im Plenum angesprochen werden. Am Nachmittag kommen die Gutachter mit der DFG im Beisein der Hochschulvertreter zu einer Empfehlung an den Hauptausschuss der DFG, die sehr differenziert über die einzelnen Teilprojekte und den Gesamtantrag urteilt. Das Ergebnis wird in Teilen dem designierten Sprecher mitgeteilt und bei positivem Ausgang kann man dann gespannt der Entscheidung der DFG entgegensehen, die einige Wochen danach im Hauptausschuss der DFG getroffen wird.

Die Selbstorganisation eines SFB/Transregio

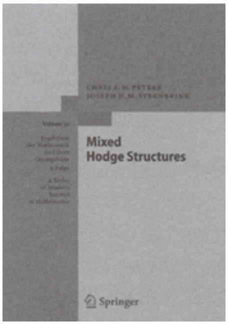
Die Verwaltung eines SFB ist durchaus sehr aufwändig und wird von der jeweiligen Sprecherhochschule aus gesteuert. Man hat ein Budget von bis zu 2 Mio. Euro jährlich zur Verfügung, das sinnvoll ausgegeben und korrekt verwaltet werden muss. Bei mehreren Standorten sind dazu Vereinbarungen zwischen den Hochschulen zu etablieren. Die meisten Mittel entfallen auf Personalstellen, die in der Regel von den Teilprojektleitern besetzt werden. Die restlichen Mittel wie Pauschalmittel oder von der Universität zurückfließende Overheadmittel sind vom Sprecher in Abstimmung mit den Kollegen zu verwalten, und er ist berichtspflichtig. Für die gesamte Mittelbewirtschaftung sollte man eine Verwaltungskraft beschäftigen, entweder ein sehr gutes Sekretariat oder einen hauptamtlichen Administrator. Nicht zu vernachlässigen ist auch der Aufwand für den Webauftritt und eine Datenbank, d. h. für eine langfristige Speicherung von Informationen über Publikationen, Veranstaltungen und Personal wie Mitarbeiter und Gäste. Nicht zuletzt zum Verfassen der Berichte ist dies nützlich. Der Sonderforschungsbereich hat sich auch eine Ordnung zu geben, in der die Organisationsstruktur des Transregio und der integrierten Doktorandenschule geregelt werden. Insgesamt ist ein SFB also ein großes Unterfangen, besonders nach der Genehmigung und erfordert effektive Organisation und Kommunikation.

Schlussbemerkung

Ich möchte der Deutschen Forschungsgemeinschaft, insbesondere Herrn Frank Kiefer, ganz herzlich für die Realisierung dieses Transregios und den damit verbundenen Möglichkeiten für alle beteiligten Wissenschaftler danken.

Literatur

[1] Evaluation des DFG-Förderprogramms SFB/Transregio, Wiley-VCH Verlag (2009).
[2] 40 Jahre Sonderforschungsbereiche, Beilage zur Deutschen Universitätszeitung, herausgegeben von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (2008).
[3] Merkblatt 60.02: Förderung von Sonderforschungsbereichen/Transregios, siehe `www.dfg.de/forschungsfoerderung/formulare/sonderforschungsbereiche.html`.
[4] Gebhard Böckle, Manuel Blickle: Cartier modules: finiteness results, `arXiv:0909.2531`.
[5] Pedro del Angel, Stefan Müller-Stach, Duco van Straten, Kang Zuo: Hodge classes associated to 1-parameter families of Calabi-Yau 3-folds, `arXiv:0911.0277`.
[6] Spencer Bloch, Hélène Esnault, Dirk Kreimer: On motives associated to graph polynomials, `arXiv:math/0510011`.
[7] Slawomir Cynk, Duco van Straten: Small resolutions and non-liftable Calabi-Yau threefolds, `arXiv:0804.0668`.
[8] Hélène Esnault, Vikram Mehta: Simply connected projective manifolds in char $p > 0$ have no nontrivial stratified bundles, `arXiv:0907.3375`.
[9] Gerd Faltings: A p-adic Simpson correspondence, Adv. in Mathematics, 847–862 (2005).
[10] Christoph Geiß, Bernard Leclerc, Jan Schröer: Cluster algebra structures and semicanonical bases for unipotent groups, `arXiv:math/0703039`.
[11] Ulrich Görtz, Tom Haines, Robert Kottwitz, Daniel Reuman: Affine Deligne-Lusztig varieties in affine flag varieties, `arXiv:0805.0045`.
[12] Ulrich Görtz: Matrixgleichungen und Familien abelscher Varietäten in positiver Charakteristik, DMV Mitteilungen 17/2009, 23-30.
[13] Daniel Huybrechts: Chow groups of $K3$-surfaces and spherical objects, `arXiv:0809.2606`.
[14] Daniel Huybrechts: Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry, Oxford Univ. Press (2006).
[15] Stephen Kudla, Michael Rapoport: Special cycles on unitary Shimura varieties I, `arXiv:0804.0600`.
[16] Manfred Lehn, Christoph Sorger: La singularité de O'Grady, `arXiv:math/0504182`.
[17] Michael Rapoport: A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties, Astérisque 298, 271–318 (2005).
[18] Stefan Müller-Stach, Kang Zuo, Eckart Viehweg: Relative proportionality for subvarieties of moduli spaces of $K3$ and abelian surfaces, `arXiv:0801.2834`.
[19] Martin Möller, Eckart Viehweg: Kobayashi geodesics in $\mathcal{A}_g$, `arXiv:0809.1018`.
[20] Eckart Viehweg: Compactifications of smooth families and of moduli spaces of polarized manifolds, `arXiv:0605093`.



Chris A. M. Peters
Joseph H. M. Steenbrink
Mixed
Hodge Structures

Springer, Berlin, 2008, 470 Seiten, € 139,05

This book has been awaited for many years. As the authors explain in the introduction, the first attempt at the beginning of the 80s by the second named author to write down the foundations of mixed Hodge theory came to a standstill when Morihiko Saito developed his own theory of mixed Hodge modules. Fortunately, the authors did not give up, and the book which is now available will certainly rapidly become one of the standard references on the topic.

Hodge theory assigns to a complex variety data which come from linear algebra. The linear algebra is a bit subtle, but this is linear algebra and surely much easier than the analytic and algebraic geometry contained in a complex variety. Pure Hodge theory is what comes out of smooth projective varieties, while one needs the notion of extensions of such pure structures when the variety is singular, or not projective, or arises as a limit of such (in a way I do not describe). The package is coded in the notion of mixed Hodge theory. Here "mixed" refers to the extensions with graded pieces being pure. Mixed Hodge theory is an absolutely central tool in complex algebraic geometry. Deligne developed it, as well as an analogous theory of weights for varieties defined over finite fields. Later on p-adic Hodge theory has been developed, notably and among others by Fontaine. Those parallel theories in different worlds show how deep the notions are developed in Hodge theory.

Let us describe the different parts of the volume. In the first part, the authors recall the basic abstract definitions of Hodge structures. It includes Deligne's viewpoint on a Hodge structure as an algebraic representation, and the definition of the Mumford-Tate group of a Hodge structure. In the second part, the authors link the theory to geometry. Aside from applications to singularities, it includes Deligne's fixed part theorem. The third part summarizes the construction of Hodge theory on the pronilpotent completion of the topological fundamental group. (The reader can consult the third section of *Deligne, P., Goncharov, A.: Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Annales de l'ENS (4)* **38** *(2005), no1, 1–56*, in which it is shown that the pronilpotent completion is the cohomology of a cosimplicial scheme, and thus knowledge from the second part yields a mixed Hodge structure on it.) This part includes the construction of the minimal model. The fourth part is tied to the second author's own work, in which he defined the mixed Hodge structure on the limit in a one parameter family. The first half of the part culminates at 11.2.7 in which the authors follow Guillén/Navarro Aznar's presentation. (The reader can consult *Illusie, L.: Autour du théorème de monodromie locale, in Périodes p-adiques, Astérisque* **223** *(1994), 9–57* for a viewpoint closer to Rapoport-Zink and M. Saito). In the second half of this part, the authors lay the foundations of M. Saito's mixed Hodge theory. This will surely be a very useful source for this poorly documented theory which nonetheless plays an important rôle. Finally, the authors gathered in various appendices the tools of homological algebra, topology and differential geometry needed in the course of the volume.

I heartily recommend the book.

Essen Hélène Esnault

Alexander I. Bobenko
Yuri B. Suris
Discrete Differential Geometry – Integrable Structure
Graduate Studies in Mathematics, Vol. 98.

American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, xxiv+404 S. ISBN 978-0-8218-4700-8, € 66,99

Diskrete Differentialgeometrie hat ihren Ursprung in dem Bedürfnis nach intelligenten Diskretisierungen differentialgeometrischer Begriffe für die Zwecke der Numerik und der geometrischen Datenverarbeitung [4,3] und enthält heute ein ausgereiftes Theoriegebäude, das als Spezialfall die klassische Differentialgeometrie der Koordinatensysteme in Flächen umfasst und das eng mit der Theorie diskreter integrabler Systeme verknüpft ist. An dieser Entwicklung sind beide Autoren wesentlich beteiligt. Das Phänomen der Erschließung einer glatten Theorie durch eine diskrete tritt auch anderswo auf, zum Beispiel bei der durch W. Thurston initiierten Approximation von konformen Abbildungen durch Kreispackungen. Es ist vielleicht kein Zufall, dass einer der größten Erfolge des diskreten Zugangs zu glatten Flächen – die effektive Bestimmung der Formen von Minimalflächen aus der Kombinatorik ihrer Krümmungslinien [1] – sowohl Thurstons Idee als auch dem integrablen Zugang verpflichtet ist.

Das vorliegende Werk deklariert in seinem Vorwort die Leitideen *„Diskretisiere die ganze Theorie, nicht nur die Gleichungen"* und *„Diskretisiere Gleichungen durch Diskretisieren der Geometrie"*. Ich möchte diese anhand von zwei Beispielen illustrieren.

Das erste betrifft Punktgitter $x : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass die vier Knoten jeder 2-Facette kozirkulär liegen, also einen Umkreis besitzen. Ihre Existenz und gleichzeitig die Anzahl der Freiheitsgrade ist durch die *Konsistenz* der definierenden Eigenschaft sichergestellt, die für $m = 3$ wie folgt lautet: Sind in dem kombinatorischen Würfel $x : \{0,1\}^3 \to \mathbb{R}^n$ die vier nicht an $x_{1,1,1}$ grenzenden Facetten zirkulär, so gibt es genau eine Wahl von $x_{1,1,1}$, sodass alle 6 Facetten zirkulär werden (Satz von Miquel). Man sagt, Zirkularität definiert ein 4D-konsistentes, 3-dimensionales System. Durch einen partiellen Limes kann x in ein $(m-2)$-dimensionales Gitter $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}^{m-2} \to \mathbb{R}^3$ von Krümmungslinienparametrisierungen glatter Flächen übergehen; jedes $f|_{\mathbb{R}^2 \times i}$ ist dabei die Ribaucour-Transformierte seiner Nachbarn.

Das zweite Beispiel sind diskrete *K-Netze* $x : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$, die durch zwei Eigenschaften definiert sind: (i) Koplanarität jedes Punktes $x_{i,j}$ mit seinen vier direkten Nachbarn und (ii) die Forderung, dass $\|x_{i,j} - x_{i+1,j}\|$ bzw. $\|x_{i,j} - x_{i,j+1}\|$ nur von i bzw. j abhängen. Eine als Limes von K-Netzen entstehende glatte Parametrisierung einer Fläche ist eine asymptotische Parametrisierung einer Fläche konstanter Gauß-Krümmung. Die Existenz von K-Netzen höherer Dimension zeigt Existenz und Eigenschaften von Bäcklund-Transformationen für solche Flächen. Dieser Zusammenhang war im Wesentlichen schon in den 1950er Jahren bekannt. Eine bemerkenswerte jüngere Einsicht, die eine Verbindung zu diskreten integrablen Systemen ergibt, ist die Gültigkeit der Hirota-Gleichung

$$\sin\frac{\phi_{i+1,j+1}-\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j}}{4}=$$

$$C_i C_j' \sin\frac{\phi_{i+1,j+1}+\phi_{i+1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j}}{4}$$

für bestimmte Winkel $\phi_{i,j}$, die in dem Netz auftreten und aus denen eine Spektralschar $x_{i,j}(\lambda)$ von K-Netzen rekonstruierbar ist [2]. Diese Gleichung stellt ein diskretes Analogon der von den glatten K-Flächen bekannten Sinus-Gordon-Gleichung $\partial_{uv}\psi - \sin\psi = 0$ dar. Dass man aus jeder ihrer Lösungen ϕ eine neue gewinnen kann (Bäcklund-Transformation ϕ^+ von ϕ) und dass dafür ein Permutabilitätssatz gilt, wurde auf diese Weise als Folge der 3- und 4-dimensionalen Konsistenz der geometrischen Eigenschaften der K-Netze erkannt. Eine weitere Analogie zum glatten Fall ist die Äquivalenz der Hirota-Gleichung zur Integrabilitätsbedingung für die Differenzengleichung eines begleitenden Dreibeins $\mathbb{Z}^2 \to SU_2[\lambda]$ der Schar $x(\lambda)$ (*zero curvature representation* der Hirota-Gleichung).

Das vorliegende Werk besteht aus einer systematischen Darstellung dieser Zusammenhänge. Kapitel 1 wiederholt die klassischen Ergebnisse betreffend Koordinatensysteme auf Flächen und ihrer Transformationen. Der Abschnitt *Discretization Principles* führt die umfangreiche diskrete Theorie anhand von 3-dimensionalen integrablen Systemen mit 4D-Konsistenz ein. Das erste der beiden obigen Beispiele gehört hierher. Zweidimensionale integrable Systeme und deren 3D-Konsistenz sind die Grundlage des 4. Kapitels, *Special Classes of Discrete Surfaces*, wo die geometrisch sehr interessanten K-Netze, isothermen Netze, und Netze konstanter mittlerer Krümmung besprochen werden. Auch die s-isothermen Netze von [1] gehören hierher. Schließlich wird die Interpretation der glatten Theorie als Grenzfall der diskreten im Kapitel *Approximation* streng begründet, indem die Konvergenz der Lösungen von gut gestellten diskreten Goursat-Problemen gegen die Lösungen entsprechender partieller Differentialgleichungen gezeigt wird.

Der begriffliche Kern des Werkes ist Kapitel 6, *Consistency as integrability*. Wesentlich ist die Erkenntnis, dass die 3D-Konsistenz von Gleichungen auf zweidimensionalen Gittern für die üblicherweise verlangten Attribute integrabler Systeme verantwortlich ist (Bäcklund-Transformationen und *zero curvature representations*). Es werden auch Gleichungen auf irregulären Strukturen (Quad-Graphen, rhombische Einbettungen) untersucht und die relevanten Typen von zweidimensionalen integrablen Systemen vollständig klassifiziert. Das Kapitel enthält weiteres Material über integrable Systeme mit Daten auf den Kanten eines Gitters (Yang-Baxter-Abbildungen) und die weniger zahlreichen dreidimensionalen 4D-konsistenten integrablen Systeme.

Kapitel 7 und 8, *Discrete Complex Analysis. Linear Theory / Integrable Circle Patterns* studieren integrable Versionen von diskreten Cauchy-Riemann-Gleichungen auf Graphen, und geometrische Eigenschaften von Kreispackungen (= diskrete holomorphe Funktionen). Es stellt sich heraus, dass das Finden von Kreismustern mit vorgeschriebener Kombinatorik und konformem Typ (Schnittwinkeln von Kreisen) auf das Lösen von Gleichungen auf Quad-Graphen hinausläuft, die zu früher behandelten Doppelverhältnis-Systemen und Hirota-Systemen äquivalent sind. Das Kapitel schließt mit Beispielen für Kreismuster, Monodromieeigenschaften und der Differentiation von diskreten holomorphen Funktionen. Ein Hauptresultat ist das Erkennen von Kapitel 7 als Linearisierung von Kapitel 8. Das letzte Kapitel, *Foundations*, stellt Grundlagen aus der projektiven Geometrie bereit.

Dieses Werk richtet sich nicht nur an Mathematiker, sondern an alle, die im Zusammenhang mit numerischer Simulation, Datenverarbeitung oder sogar Freiformarchitektur mit 3D-Geometriedaten zu tun haben. Differentialgeometer werden mit großem Interesse die Verbindungen zu integrablen Systemen zur Kenntnis nehmen, während Leser, die aus der mathematischen Physik kommen und mit letzteren vertraut sind, die geometrische Konsistenz als den eigentlichen Hintergrund des schwer exaktifizierbaren Begriffs der Integrabilität erkennen können. Der projektiven Geometrie Kundige werden erstaunt sein, an welchen Stellen Inzidenz-Sätze und Konfigurationen eine Rolle spielen. Es ist den Autoren in beeindruckender Weise gelungen, ein bisher nur aus Einzelpublikationen zugängliches Teilgebiet der Mathematik in geschlossener Form darzustellen; gleichzeitig enthält dieses Werk neue, bisher noch nicht erschienene Resultate. Durch die vielen Übungsaufgaben ist es sehr gut als Grundlage für Vorlesungen verwendbar; die Lektüre kann uneingeschränkt empfohlen werden.

Graz Johannes Wallner

Literatur

[1] A. Bobenko, T. Hoffmann, B. Springborn, Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics. *Annals of Mathematics* **164** (2006), 231–264.

[2] A. Bobenko, U. Pinkall, Discrete surfaces with constant negative Gaussian curature and the Hirota equation, *J. Differential Geometry* **43** (1996), 527–611.

[3] M. Desbrun, E. Grinspun, P. Schröder, *Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction*. SIGGRAPH Course Notes, 2005. *http://ddg.cs.columbia.edu*

[4] U. Pinkall, K. Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experiment. Math.* **2** (1993), 15–36.