Über die Anfänge einer Fields-Medaillistin

Michael Joswig

Maryam Mirzakhani (Foto: Privat/Stanford University)

Im vergangenen Jahr erhielt Maryam Mirzakhani auf dem ICM in Seoul eine Fields-Madaille, als erste Frau überhaupt. Ausgezeichnet wurde sie für ihre Arbeiten zu Modulräumen Riemannscher Flächen. Dieser Text richtet den Blick aber auf den Beginn von Mirzakhanis wissenschaftlicher Karriere. Damals interessierte sich die junge Forscherin für Graphentheorie.

Geboren wurde Maryam Mirzakhani 1977 in Teheran. In den Jahren 1994 und 1995 nahm sie mit dem iranischen Team erfolgreich an Internationalen Mathematik-Olympiaden teil. Ihren Bachelor erlangte sie 1999 im Iran, an der Scharif-Universität für Technologie. Anschließend ging Mirzakhani nach Harvard, um bei Curtis McMullen, einem der Fields-Medaillisten von 1998, zu promovieren. Nach Stationen am Clay Mathematical Institute und in Princeton ist sie seit 2008 Professorin an der Stanford University.

Mirzakhanis mathematisches Wirken beginnt in der Kombinatorik, und zwar mit der folgenden Fragestellung: Sei G ein endlicher Graph mit ungerichteten Kanten. Mehrfachkanten und Schleifen kommen nicht vor, das heißt G ist ein einfacher Graph. Eine *k-Färbung* von G ordnet jedem Knoten eine von k Farben zu, sodass die beiden Knoten jeder Kante unterschiedlich gefärbt sind. Die Frage nach der Existenz und der Konstruktion von Färbungen von Graphen ist überaus reichhaltig. Graphenfärbung berührt zahlreiche innermathematische Aspekte und weist darüber hinaus. Anwendungen betreffen beispielsweise die Registerallozierung beim Compilerbau oder die Frequenzzuweisung in Mobilfunknetzen. Einen von vielen zentralen Sätzen in diesem Gebiet bewiesen 1976/77 Kenneth Appel und Wolfgang Haken (mit John B. Koch). Dieser *Vierfarbensatz* besagt, dass jeder planare Graph 4-färbbar ist [1, 2]. Da der Beweis zu einem wesentlichen Teil auf Computerberechnungen beruhte, entstand damals eine Diskussion darüber, inwieweit man einem solchen Beweis trauen dürfe. Spätestens 2005 hatte sich das Thema aber erledigt, als Georges Gonthier und Benjamin Werner einen formalisierten Beweis des Vierfarbensatzes in dem Beweisassistenten `Coq` vorlegten; siehe [4].

Bei einer *Listenfärbung* werden jedem Knoten eines Graphen endlich viele Farben als Kandidaten angeboten. Damit verbunden ist die Aufgabe, aus diesen Farblisten jeweils eine Farbe pro Knoten so auszuwählen, dass eine korrekte Färbung entsteht. Hier wird explizit zugelassen, dass verschiedene Knoten verschiedene Farblisten besitzen. Der Graph heißt *k-listenfärbbar*, wenn für jede Zuweisung von je k Kandidatenfarben pro Knoten die Listenfärbungsaufgabe eine Lösung besitzt. Falls G nun k-listenfärbbar ist, dann kann man insbesondere alle Farblisten mit denselben k Farben bestücken. Das bedeutet, dass G dann auch k-färbbar ist. Die Umkehrung gilt nicht: In Abbildung 1 ist der vollständig bipartite Graph $K_{2,4}$ dargestellt, der *nicht* 2-listenfärbbar ist. Klarerweise genügen hier zwei Farben, wenn man nicht an vorgegebene Listen gebunden ist.

In ihrer Arbeit *A small non-4-choosable planar graph* von 1996 gab Maryam Mirzakhani einen planaren – nach Appel und Haken also 4-färbbaren – Graphen mit 63 Knoten an, der nicht 4-listenfärbbar ist [5]. Die Existenz solcher Graphen hatten Paul Erdős, Arthur L. Rubin und Herbert Taylor 1979 vermutet [3], und dies war auch bereits 1993 durch eine Konstruktion mit 238 Knoten von Margit Voigt bestätigt worden [7]. Mirzakhanis Arbeit stellt eine Verbesserung dar, weil sie mit deutlich weniger Knoten auskommt. Viel interessanter an Mirzakhanis Graph ist aber, dass er im Gegensatz zu Voigts Konstruktion sogar 3-färbbar ist. Und dies erledigte ein damals offenes Problem. Um die historische Einordnung abzuschließen, sei erwähnt, dass Carsten Thomassen kurz darauf zeigte, dass jeder planare Graph 5-listenfärbbar ist [6].

Im Folgenden will ich die recht einfache Konstruktion von Mirzakhanis Graph kurz skizzieren. Es soll also ein 3-färbbarer planarer Graph „gebaut" werden, der nicht

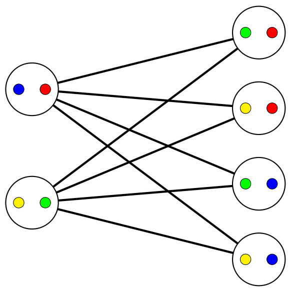

Abbildung 1. *Der vollständig bipartite Graph $K_{2,4}$. Egal wie man aus den vorgegebenen Farblisten wählt, es entsteht keine gültige Färbung.*

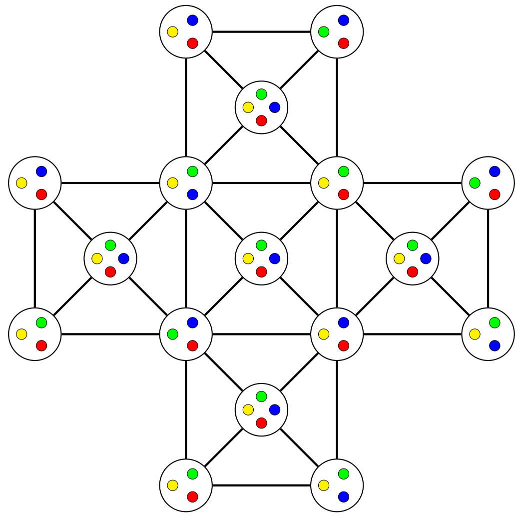

Abbildung 2. *Der Graph B mit einer Listenfärbungsaufgabe ohne Lösung*

4-listenfärbbar ist. In Abbildung 2 sieht man einen planaren Graphen mit 17 Knoten. Nennen wir ihn B. Jeder der Knoten hat jeweils drei oder vier Farben als Kandidaten, je nachdem, ob es sich um einen *inneren* oder einen *äußeren* Knoten handelt. Die inneren Knoten haben jeweils vier Nachbarn (und vier Farben), wohingegen die äußeren Knoten nur drei Nachbarn und Farben besitzen. Die inneren Knoten haben alle dieselben vier Farben, und dies sind auch die Farben, die insgesamt nur zur Verfügung stehen. Man muss sich nun davon überzeugen, dass die angegebenen Farblisten nicht „funktionieren". Das heißt, es ist nicht möglich, für jeden Knoten jeweils eine Farbe aus den vorgegebenen so auszuwählen, dass eine korrekte Färbung entsteht. Eine detaillierte Begründung will ich hier nicht ausführen. Tatsächlich sind gar nicht so viele Fälle zu berücksichtigen, wie auf den ersten Blick zu erwarten wäre. Es ist nämlich möglich, sich die Symmetrie des Graphen und der Farblisten zunutze zu machen.

Ist dieser Baustein B erst einmal da, ist die Sache recht einfach zu Ende zu führen. Dann nimmt man nämlich vier disjunkte Kopien von B plus einen weiteren Knoten, den man mit allen äußeren Knoten verbindet. Nun wählt man vier neue Farben, sodass insgesamt acht Farben auftreten. Nehmen wir an, die neuen Farben seien a, b, c und d. Jede der vier neuen Farben verwendet man für jeweils eine der vier Kopien von B und fügt in dieser Kopie den Farblisten der äußeren Knoten diese Farbe hinzu. Der Extraknoten erhält alle vier neuen Farben $abcd$. Auf diese Weise entsteht ein planarer Graph mit $4 \cdot 17 + 1 = 69$ Knoten und Farblisten der Länge 4. Die zugehörige Listenfärbungsaufgabe besitzt keine Lösung. Der Grund liegt in der Sonderrolle des Extraknotens. Könnte man nämlich aus den Kandidaten eine Farbe auswählen, sodass eine gültige Färbung entsteht, ergäbe sich folgender Widerspruch: Angenommen die Farbe des Extraknotens sei a. Dann wäre a für alle äußeren Knoten in der a-Kopie von B verboten. Somit entsteht in diesem Teilgraphen wiederum genau die Listenfärbungsaufgabe für B aus Abbildung 2, deren Unlösbarkeit bereits nachgewiesen wurde. Damit ist der konstruierte Graph mit 69 Knoten nicht 4-listenfärbbar. Dass er auch 3-färbbar ist, ergibt sich aus dem klassischen Kriterium von Heawood: Jeder Knoten hat eine gerade Anzahl an Nachbarn. Denn jeder innere Knoten hatte von vornherein vier Nachbarn, während die äußeren Knoten ursprünglich zwar mit drei oder sieben Nachbarn gestartet sind, aber noch mit dem einen Extraknoten verbunden wurden. Es ist übrigens nicht nötig, den Grad dieses Extraknotens auszurechnen, denn dieser muss nach dem Handshake-Lemma zwangsläufig gerade sein.

Damit ist die Sache eigentlich schon erledigt. Mit ein bisschen Feintuning lassen sich dann noch die vier Kopien des Grundbausteins B aus Abbildung 2 so miteinander verschmelzen, dass insgesamt sechs Knoten eingespart werden. Allerdings ist der Preis hierfür, dass man die Farblisten in den vier Kopien geschickt variieren muss. Am Ende kommt man mit insgesamt fünf Farben aus. Das Resultat ist der Graph M mit $63 = 69 - 6$ Knoten in Abbildung 3. Zur Verdeutlichung der Konstruktion sind in den Farblisten der äußeren Knoten in den (verschmolzenen) Kopien von B diejenigen Farben größer gezeichnet, die festlegen, zu welcher Kopie von B der jeweilige Knoten gehört.

—

Was bleibt noch zu sagen? Mirzakhanis Arbeit stellt in ihrer kompakten und luziden Darstellung ein mathematisches Kleinod dar. Das Ergebnis ist meines Wissens bis heute nicht verbessert worden. Ich kenne jedenfalls keinen kleineren 3-färbbaren Graphen, der nicht

4-listenfärbbar ist. Maryam Mirzakhanis besonderes Talent ist hier bereits zu erkennen, gerade weil die Konstruktion so schwerelos leicht ist. Sich früh mit offenen Problemen aus der Kombinatorik zu beschäftigen, scheint also nicht hinderlich zu sein auf dem Weg zu einer Fields-Medaille.

Ich danke Benjamin Lorenz für seine Unterstützung bei der Illustration der Graphen mit TikZ.

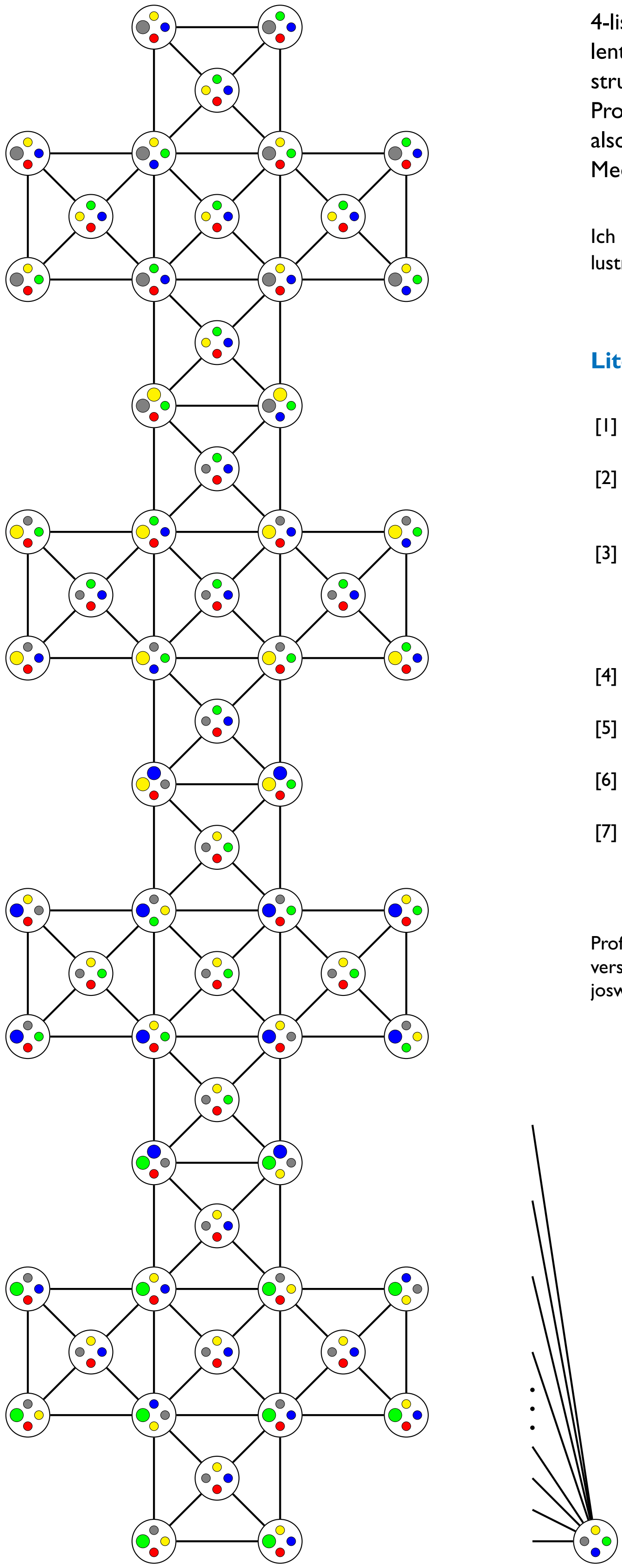

Abbildung 3. *Der Mirzakhani-Graph M ist 3-färbbar, aber nicht 4-listenfärbbar.*

Literatur

[1] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. Every planar map is four colorable. I. Discharging. *Illinois J. Math.*, 21(3):429–490, 1977.

[2] Kenneth Appel, Wolfgang Haken, and John B. Koch. Every planar map is four colorable. II. Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21(3):491–567, 1977.

[3] Paul Erdős, Arthur L. Rubin, and Herbert Taylor. Choosability in graphs. In *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979)*, Congress. Numer., XXVI, pages 125–157. Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980.

[4] Georges Gonthier. Formal proof – the four-color theorem. *Notices Amer. Math. Soc.*, 55(11):1382–1393, 2008.

[5] Maryam Mirzakhani. A small non-4-choosable planar graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 17:15–18, 1996.

[6] Carsten Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Combin. Theory Ser. B*, 62(1):180–181, 1994.

[7] Margit Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Math.*, 120(1-3):215–219, 1993.

Prof. Dr. Michael Joswig, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, MA 6-2, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
joswig@math.tu-berlin.de